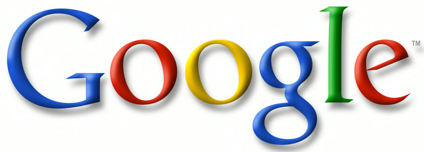


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

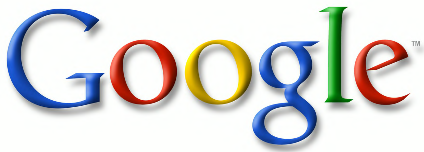
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



Pernot-Verstraeten,
RELIEUR,
Rue Savaen, No 58



UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT



Math. 156a

APPLICATIONS

DE LA

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

OUVRAGES PUBLIÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

PAR

M. THÉODORE OLIVIER.

I. COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE :

PREMIÈRE PARTIE. *Du point, de la droite et du plan;* vol in-4° de 125 pages; avec un Atlas de 42 planches in-4°.

DEUXIÈME PARTIE. *Des courbes et des surfaces, et en particulier des sections coniques et des surfaces du second ordre;* vol. in-4° de 400 pages, avec un Atlas de 54 planches in-4° (1844).

II. DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; vol. in-4° de 450 pages, avec un Atlas de 27 planches in-4° (1843).

III. COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; vol. in-4° de 472 pages, avec un Atlas de 30 planches in-4° (1845).

IV. APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, aux ombres, à la perspective, à la gnomonique et aux engrenages; vol. in-4° de 415 pages, avec un Atlas de 58 planches petit in-folio (1846).

V. THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES ENGRENAGES destinés à transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes situés ou non situés dans un même plan; vol. in-4° de 125 pages, avec 4 planches, dont une grand in folio (1842).

SOUS PRESSE

(*Pour paraître successivement.*)

VI. APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE à la coupe des pierres et à la coupe des bois; vol. in-4°, avec un Atlas in-folio.

VII. DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; vol. in-4°, avec un Atlas in-4°.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

APPLICATIONS

DE LA

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

AUX OMBRES, A LA PERSPECTIVE, A LA GNOMONIQUE ET AUX ENGRENAGES.

PAR **THÉODORE OLIVIER,**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET ANCIEN OFFICIER D'ARTILLERIE ; DOCTEUR ÈS SCIENCES DE LA FACULTÉ DE PARIS,
ANCIEN PROFESSEUR-ADJOINT DE L'ÉCOLE D'APPLICATION DE L'ARTILLERIE ET DU GÉNIE MILITAIRE A METZ ;
ANCIEN RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ;
PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE ROYAL DES ARTS ET MÉTIERS ;
PROFESSEUR-FONDATEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES ;
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS ET DU COMITÉ DES ARTS MÉCANIQUES DE LA SOCIÉTÉ D'ENCOURAGEMENT POUR L'INDUSTRIE NATIONALE,
MEMBRE ÉTRANGER DES DEUX ACADÉMIES ROYALES DES SCIENCES ET DES SCIENCES MILITAIRES DE STOCKHOLM ;
MEMBRE CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE ;
DES ACADÉMIES DE METZ, DIJON ET LYON ;
CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR ET DE L'ORDRE ROYAL DE L'ÉTOILE POLAIRE DE SUÈDE.

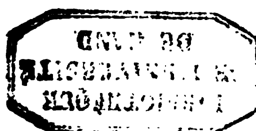
PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET V^{or} DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n°s 39 et 41.

1847



APPLICATIONS

DE LA

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Je me suis proposé, en écrivant ce cinquième ouvrage sur la géométrie descriptive, de faire connaître les utiles applications que l'on peut faire de cette science: 1° à la détermination des ombres; 2° au tracé d'une perspective; 3° à la construction des cadrans solaires; et 4° à la description graphique de divers engrenages.

Je n'ai point eu en vue d'écrire sur chacune de ces matières un traité complet, mais seulement de faire connaître plusieurs *choses anciennes* qui n'avaient point encore été imprimées, et de donner aussi quelques idées nouvelles et que les divers auteurs qui ont écrit sur ces sujets n'ont point présentées dans les ouvrages qu'ils ont publiés.

J'ai suivi dans ce cinquième ouvrage la marche que j'ai adoptée dans les quatre premiers; ainsi, je n'expose point ce qui a été dit par d'autres avant moi, à

moins qu'après avoir examiné une question déjà traitée, je n'aie été conduit, ou à la présenter sous un nouveau jour, ou à employer des méthodes nouvelles, ou à déduire des conséquences qui n'avaient point encore été signalées.

Je pense que ceux qui étudient, ainsi que ceux qui enseignent la géométrie descriptive, trouveront dans ce cinquième ouvrage des choses nouvelles et dignes de quelque intérêt, soit sous le point de vue *scientifique*, soit sous le point de vue d'*application*, et même encore sous le point de vue *historique*.



LIVRE PREMIER.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AUX OMBRES.

Le problème des ombres à déterminer sur une surface donnée, se trouve complétement résolu dans le Cours de géométrie descriptive, puisque nous avons montré que la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur une surface donnée n'était autre que la courbe de contact de cette surface avec un cylindre, si l'on supposait un *rayon* lumineux, ou avec un cône, si l'on supposait un *point* lumineux; et que l'ombre portée par la même surface sur une autre surface n'était autre que la courbe d'intersection de cette seconde surface avec le *cylindre* ou le *cône* lumineux.

D'après ce qui précède, on doit comprendre que sous le point de vue théorique il ne reste plus rien à faire ; et dès lors on doit être porté à penser qu'un livre, dans lequel on traite des applications de la géométrie descriptive aux ombres, est à peu près inutile.

Mais dans le Cours de géométrie descriptive, on a considéré les surfaces, en les divisant par groupes suivant leurs divers modes de génération, et l'on a exposé des méthodes générales, et dépendant chacune seulement du mode particulier de génération de la surface considérée.

Or, lorsque l'on veut appliquer ces méthodes générales à des surfaces spéciales appartenant à un même mode de génération, il arrive fréquemment que ces méthodes générales peuvent être simplifiées en vertu de certaines propriétés géométriques dont jouit telle ou telle de ces surfaces spéciales, à l'exclusion de certaines autres appartenant au même mode de génération.

Ainsi, si l'on propose de déterminer la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, il ne faudra pas employer la méthode générale qui appartient aux surfaces engendrées par une courbe plane mobile et variable de forme, se mouvant parallèlement à elle-même en restant

toujours semblable à elle-même. Il faudra profiter de la propriété géométrique dont jouit l'ellipsoïde à trois axes inégaux, savoir : que la courbe de contact avec un cylindre ou un cône est toujours une courbe plane, et dès lors la solution du problème d'ombre se trouve ramené à celui-ci : *Intersection d'un plan donné par deux droites qui se coupent et d'un ellipsoïde à trois axes inégaux.* Et aussitôt l'on doit remarquer que pour résoudre ce nouveau problème, en n'employant que la ligne droite et le cercle, il faut effectuer un changement des plans de projection et prendre pour nouveaux plans de projection, savoir : pour plan horizontal le plan diamétral donnant une section circulaire dans l'ellipsoïde, et pour plan vertical un plan perpendiculaire à ce plan de section circulaire.

D'après ce qui vient d'être dit, on doit voir qu'il n'est plus sans intérêt d'écrire, non pas un traité sur les ombres, mais un ouvrage dans lequel on réunirait à la suite les unes des autres les solutions de divers problèmes d'ombres, ces solutions étant exécutées d'après les principes que nous venons d'exposer ci-dessus.

Un pareil ouvrage pourrait être très-volumineux, aussi n'ai-je donné qu'un petit nombre de problèmes d'ombres, ce qui m'a paru suffisant pour bien faire comprendre la marche que l'on doit suivre dans la solution de chacun des problèmes qui pourraient être proposés; et à la fin de ce premier livre, j'ai donné un très-grand nombre de programmes de problèmes d'ombre que chacun pourra s'exercer à résoudre.

En terminant ces réflexions, nous devons faire remarquer qu'il est très-utile, après avoir exposé la théorie des méthodes générales, de faire des applications spéciales, car presque toujours les surfaces spéciales que l'on a à examiner, non-seulement nous permettent, comme nous l'avons dit ci-dessus, de modifier d'une manière élégante la solution générale, en vertu des propriétés géométriques propres à chacune de ces surfaces particulières, mais encore chaque surface spéciale peut nous faire découvrir des propriétés auxquelles on n'aurait pas songé, si l'on s'était contenté des aperçus généraux.

C'est ainsi qu'en déterminant la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur le piédouche (surface dont le mode de génération est identique à celui de l'ellipsoïde de révolution), on a reconnu qu'il pouvait exister une génératrice du *cylindre* lumineux ou du *cône* lumineux, telle qu'elle fût tangente à cette courbe de séparation ; et l'on a reconnu que ce *fait* ne pouvait avoir lieu que pour une surface dont les rayons de courbure étaient dirigés en sens opposé.

Ce fut alors que Hachette pensa à l'emploi d'un hyperboloïde osculateur pour déterminer ce point remarquable sur le piédouche, et que plus tard je fus conduit à employer les surfaces osculatrices du second ordre pour construire les tangentes au point multiple de la courbe intersection de deux surfaces quelconques, et

aussi pour construire la tangente en un point quelconque de la courbe de contact de deux surfaces quelconques.

Lors donc que l'on se proposera la solution d'un problème d'ombre sur des surfaces particulières, il faudra non-seulement chercher les simplifications que les propriétés géométriques de la surface particulière considérée peuvent apporter à la méthode générale de solution, mais encore examiner avec soin si l'on ne pourrait pas découvrir quelques propriétés nouvelles, que l'on cherchera ensuite à généraliser ; procédant ainsi du *simple* au *composé*.

N° 1.

(MÉMOIRE INÉDIT.).

TRAITÉ DES OMBRES DANS LE DESSIN GÉOMÉTRAL (*).

AVANT-PROPOS.

Dès le premier établissement de l'École du génie à Mézières, on s'est attaché à donner aux jeunes officiers les principes du dessin, et à le faire avec méthode. La facilité de l'expression avec le crayon et l'intelligence du dessin donnent celle

---

(*) Ce mémoire fait partie de la collection des manuscrits de la bibliothèque de l'École d'application de l'artillerie et du génie à Metz.

Il est coté pièce n° 12, carton n° 1, et provient du fonds de l'ancienne École du génie qui fut transférée de Mézières à Metz en 1793.

On ignore le nom de l'auteur de ce petit traité, ainsi que sa date précise. Cependant, on a lieu de croire qu'il a été écrit à l'École de Mézières pour l'instruction des jeunes officiers du génie, vers l'an 1775 à 1780.

Les dessins qui accompagnent ce petit traité sont évidemment de la même *main* que deux dessins qui existent encore dans les collections de l'École d'application de Metz, et qui portent le millésime 1774.

On sait que ce fut en 1775 [1] que Monge écrivit un mémoire sur les ombres, et dans lequel il employa l'*analyse*. Dix ans plus tard, il écrivit quelques pages (que nous donnons ci-après) sur les ombres, mais alors il employa la méthode des projections, la géométrie descriptive.

C'est d'après le petit traité que nous publions ici pour la première fois que fut exécutée l'*épure* de l'ombre des cheminées qui existe dans la collection des épures gravées de l'École polytechnique, épures gravées qui datent presque toutes de la fondation de l'École polytechnique en 1796. T. O.

[1] Voyez ce que Hachette dit au sujet de ce mémoire de Monge dans la Correspondance sur l'École polytechnique, vol. 1er, pag. 295. T. O.

de là bonne construction des ouvrages des places, du tracé et relief de la fortification et en général de tout ce qui y a rapport, celle des ouvrages relatifs à la guerre de campagne et de siége, forme le coup d'œil pour la reconnaissance des places; c'est le dessin, en un mot, entendu et appliqué à tous les objets, qui caractérise en partie les ingénieurs.

On n'a rien trouvé de plus propre pour leur procurer cette connaissance parfaite du dessin, que de leur faire suivre des cours de coupe des pierres et des bois, et on a pris soin à cet effet de développer la partie de la coupe des bois, qui ne l'avait point été jusqu'à présent. Indépendamment des avantages qui résultent de cette étude, relativement aux constructions dont les officiers du génie ont la direction, on conçoit facilement que quand on fait développer toutes les faces et connaître tous les angles, plans ou solides, d'une pierre quelconque employée dans une voûte, une trompe, etc., ou d'une pièce de charpente employée dans un comble, un dôme, un escalier, etc., qu'on a bien de la facilité à développer un bastion, une demi-lune, un cavalier de tranchée, une batterie, etc.; que quand on sait bien former la représentation de toutes ces choses pour les faire entendre aux autres, on est en état de se les représenter comme si elles étaient déjà exécutées, et d'en combiner les différentes constructions pour les rendre autant parfaites qu'elles peuvent l'être.

Mais jusque-là l'étude du dessin a été bornée aux simples traits; l'art du lavis, les dégradations des teintes et des ombres sont nécessaires pour lui donner l'effet du relief convenable; et souvent sans ces secours, le dessin ne pourrait être que difficilement entendu. L'art du lavis s'acquiert par l'exercice, les dégradations des teintes doivent être tirées des lois de la nature, et l'étendue des ombres portées par les corps devant être proportionnelle aux distances, doit être traitée avec le secours de la géométrie.

C'est de l'harmonie de ces différentes parties bien entendues que dépendent la correction et l'expression du dessin. La partie de la fixation proportionnelle des ombres n'ayant point été traitée jusqu'à présent relativement au dessin géométral dont les ingénieurs font usage, nous avons cherché des pratiques puisées dans la géométrie, commodes et expéditives pour les déterminer, en n'employant néanmoins sur les dessins que le moins de lignes possibles, parce qu'elles ne pourraient qu'altérer la propreté qui leur est nécessaire. Mais ces pratiques et les principes sur lesquels elles sont fondées n'ayant pas été mis en ordre jusqu'à présent, et n'ayant été enseignées que par intervalles, suivant le besoin de différents cas, ne pouvaient rester, ni s'arranger dans la tête; ce qui a engagé à les rassembler et expliquer dans ce petit traité, que l'on donne ici en forme de leçon pour l'usage de l'école.

Après avoir établi des notions générales sur les dessins, nous indiquerons la manière de disposer ceux des ingénieurs.

Nous donnerons ensuite la méthode pour déterminer les ombres sur toutes sortes de surfaces, en l'appliquant à des exemples ; et nous finirons par détailler les principes suivant lesquels les ombres et les teintes se dégradent et s'affaiblissent, en mettant aussi sous les yeux les exemples nécessaires pour en faciliter l'intelligence.

Notions générales sur le dessin.

1. Le dessin est l'art de représenter les objets sur des surfaces quelconques; ces surfaces sont ordinairement planes. Les peintres se servent de toiles, et donnent à leurs ouvrages le nom de *tableau.* Nous ne nous servirons que du papier, auquel on donnera le nom en général de dessin ; celui de *la figure*, *de l'ornement*, *du paysage* ne s'acquiert que par les leçons d'un bon maître et par un exercice suivi pendant un certain temps. Le dessin de l'architecture civile et militaire, de la fortification, etc., prend ses principes dans les arts et dans la géométrie, et s'exécute avec la règle et le compas. Ce que c'est que le dessin.

2. On distingue deux espèces principales et primitives de ce genre de dessin ; l'un est le dessin en perspective, et l'autre est le dessin géométral. Espèces primitives du dessin.

3. Le dessin en perspective représente les objets tels qu'ils paraissent d'un point fixe pris à volonté parmi tous ceux d'où ils peuvent être vus, c'est-à-dire qu'on suppose que de l'œil du spectateur partent autant de rayons qu'il y a de points dans l'objet qu'on représente, lesquels, par leur intersection avec le tableau ou la feuille de papier qu'on suppose placée entre l'œil et l'objet, y représentent les mêmes points qui, étant joints par des lignes correspondantes à celles de l'objet, les rendent en perspective. Cette manière de dessiner est l'imitation de la nature, et peut être très-utile en plusieurs occasions, surtout lorsqu'on doit rendre compte d'un objet et de la position respective de ses parties pour un même point de vue ; mais elle a l'inconvénient que les dimensions de l'objet y sont pour l'ordinaire tellement défigurées qu'il est difficile d'en connaître avec exactitude les proportions d'après la seule représentation en perspective. Notions du dessin en perspective.

Quoiqu'on ne soit pas dans l'usage de se servir de ce genre de dessin dans les projets de construction, néanmoins il est très-utile qu'un ingénieur en ait connaissance pour se former le coup d'œil si nécessaire dans la guerre en général, et particulièrement dans la reconnaissance des places, qui souvent peuvent être vues de quelques éminences ou clochers ; il ne lui servira pas moins pour le lever des plans et des cartes où il est obligé de représenter géométralement

les objets qu'il ne voit qu'en perspective, car il a acquis l'usage de mettre avec facilité un plan géométral en perspective, réciproquement il lui sera facile de ramener la perspective au géométral; mais différents auteurs ayant écrit sur ce genre de dessin, il ne fera point partie de ce traité.

Notions du dessin géométral.

4. Le dessin géométral diffère principalement du dessin en perspective en ce qu'au lieu de supposer que les rayons qui partent de tous les points de l'objet concourent à un même point (qui est l'œil du spectateur) placé à une distance finie, on imagine que tous ces rayons concourent à une distance infinie, et sont par conséquent parallèles entre eux; de sorte que, pour que le spectateur puisse les voir d'une distance finie comme ils sont représentés par un œil infiniment éloigné, il est nécessaire que le spectateur change de lieu à chaque instant, et se place successivement sur les directions de chaque rayon en particulier. On sent bien que ce dernier genre de dessin n'altère point les dimensions des objets qui se trouvent dans une situation parallèle au plan du papier, mais aussi qu'il ne peut en représenter qu'une seule face à la fois, et qu'il ne serait pas possible de prendre une idée complète du tout, si le spectateur était censé considérer toujours la même face. On a donc pris le parti d'imaginer différents plans qui traversent l'objet ou qui lui sont extérieurs, et l'on suppose que sur ces plans se peignent, comme on l'a dit, les parties des objets qui leur sont directement opposées; c'est de cet art, que l'étude de la coupe des pierres et des bois donne l'intelligence la plus exacte et qui ne laisse rien à désirer, si l'on en excepte les ombres et les teintes.

De la projection horizontale ou du plan et de ses usages. Pl. I, *fig.* 1.

5. Sur un plan horizontal mené à travers, au-dessus, ou au-dessous de l'objet, on conçoit que de tous les points de l'objet partent des droites verticales qui forment par leurs extrémités sur un plan une figure qu'on nomme la projection horizontale de l'objet ou simplement son plan. Soit, par exemple, la droite AB inclinée d'une manière quelconque à l'horizon. Si sur le plan horizontal DE on abaisse de tous les points de AB des perpendiculaires NM, OP, BC, la droite AC que ces perpendiculaires formeront par leur rencontre avec le plan horizontal, sera la projection horizontale ou le plan de AB, et par conséquent aussi sa représentation sur le plan horizontal proposé.

Les perpendiculaires NM, OP, BC sont les rayons suivant lesquels l'œil regarde successivement tous les points de AB. Souvent, dans le discours ordinaire, on dit que AC est la grandeur de AB au plan (*).

(*) Lorsqu'il s'agit de la perspective, les auteurs disent : *au géométral*, au lieu de dire : *au plan*.
T. O.

6. De même, si sur un plan vertical FE mené par un point de l'objet ou hors de l'objet, on tire de tous les points de ce même objet des perpendiculaires au plan vertical, leur rencontre avec lui y forme une figure qu'on nomme *profil* lorsque le plan de repésentation coupe l'objet, et *élévation* lorsqu'il lui est externe, et cette figure en est la représentation sur le plan vertical; si, par exemple, de tous les points A, N et O de la droite AB on mène au plan vertical FE des perpendiculaires AC, NQ, OR dont les extrémités forment sur ce plan vertical la droite BC, cette droite BC est le profil ou élévation de AB, et sa représentation sur le plan vertical dont il s'agit. C'est un usage assez ordinaire de dire que BC est la grandeur de AB au profil ou à l'élévation. **De la projection verticale, ou des profils et élévations, et de leurs usages.**

7. Les plans de représentations dont nous avons parlé (art. 4) ne sont limités dans la théorie, ni quant à l'espèce, ni quant au nombre; mais dans la pratique, on n'en emploie que deux espèces, savoir : les plans horizontaux et les plans verticaux; mais, pour faire connaître l'objet, le nombre des uns et des autres n'est pas toujours le même; souvent, sur un même plan, s'élèvent plusieurs profils et élévations. **Du nombre des profils et élévations nécessaires pour connaître l'objet à fond.**

On sent assez qu'il y a de l'art dans le choix et la disposition des plans, profils et élévations qu'on veut employer afin de représenter l'objet le plus parfaitement qu'il est possible, avec des figures les moins nombreuses et les moins chargées; mais cet art ne peut être soumis à des règles générales : de bons modèles et la pratique sont les meilleurs maîtres qu'on puisse consulter. **Choix et dispositions des plans, profils et élévations.**

8. Ces principes établis, il est aisé de concevoir qu'en combinant ensemble les plans, profils et élévations, on connaîtra toutes les dimensions des parties de l'objet au moyen des échelles en toises, pieds et pouces ou autres mesures, car les plans donnant toutes les mesures horizontales, les profils et élévations donnent toutes les mesures verticales, même les mesures inclinées à l'horizon et parallèles au plan vertical du papier; en sorte que la difficulté se réduit tout au plus pour celles non comprises au plan vertical parallèle au papier, à trouver l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on a les deux côtés, l'un au *plan* et l'autre au *profil*. Ainsi, dans l'exemple (Pl. I, *fig.* 1) allégué ci-dessus, il est visible qu'ayant AB au plan et au profil, on a cette ligne elle-même en nature. Il en sera de même dans tous les cas; c'est de cette espèce de dessin qu'on se sert dans les projets des ouvrages proposés à la cour et pour leur construction. **La combinaison des plans, profils et élévations fait connaître les véritables dimensions de l'objet.**

9. Nous avons insinué (art. 2) qu'il y a d'autres genres de dessin que celui en perspective et celui géométral, mais ils sont tous divisés ou composés de l'une ou de l'autre de ces deux espèces primitives; celui d'entre eux dont on fait le plus d'usage s'appelle perspective cavalière (comme qui dirait perspective où les règles de l'art ne sont pas scrupuleusement observées); par exemple, on s'en est **Espèce mixte de dessin en perspective.**

servi pour représenter (*fig.* 1) les solives auxquelles appartiennent le plan horizontal DE et le vertical FE. On l'a aussi employé avec succès pour expliquer les assemblages de charpente, dans le supplément qui en a été fait et donné à l'école du génie pour l'intelligence des coupes pour les bois (*). Dans cette espèce de dessin on peut toujours conserver à une des surfaces planes qui enveloppe un corps et a sa parallèle (lorsqu'elle en a une) leur figure, sans altération, ni dans leurs angles, ni dans la longueur des lignes qui le forment.

A l'égard des autres surfaces qui enveloppent le corps, les ouvertures des angles seront nécessairement altérées, mais les lignes conserveront leurs véritables longueurs, ce qui rend cette sorte de dessin susceptible de dimensions qu'on peut connaître au moyen de l'échelle. Ce dernier genre de dessin est si facile à entendre d'après ce qu'on en voit (*fig.* 1) et ce qu'on en a vu dans le supplément à l'art de la charpenterie, que nous n'entrerons pas à ce sujet dans un plus grand détail.

Nécessité d'ombrer les dessins.

10. Si l'on n'avait qu'à mettre aux simples traits les plans, profils, et élévations des différents objets que l'on veut représenter, on n'aurait besoin que des projections horizontales et verticales expliquées ci-dessus (art. 5 et 6), et ce sont les seules dont on s'est servi dans la coupe des pierres et des bois; mais, pour donner de la grâce au dessin et faire apercevoir du premier coup d'œil les différents reliefs de toutes les parties de l'objet qu'il représente, il est nécessaire d'observer les dégradations des teintes et d'y marquer les ombres portées par le soleil, en suivant à cet égard ce qui se passe dans la nature

Nous parlerons à la suite (*de ce traité*) de la dégradation des teintes; nous allons expliquer la manière de déterminer la figure, l'étendue des ombres relativement aux différentes surfaces qui les reçoivent, lesquelles surfaces sont toujours projetées sur la feuille horizontale et verticale du dessin.

Les rayons du soleil parallèles entre eux.

11. Nous admettrons pour principe fondamental que différents rayons du soleil sont parallèles. Si en mécanique on a supposé les directions de la pesanteur parallèles, à plus forte raison admettra-t-on la même hypothèse pour les rayons du soleil, qui est plus éloigné de nous que le centre de la terre.

Les plans verticaux du soleil aussi parallèles.

12. Si par un rayon du soleil on fait passer un plan vertical, l'intersection de ce plan avec la feuille horizontale du dessin y déterminera (art. 5) la projection de la direction du rayon du soleil au *plan*; cette direction sera ensuite projetée sur les profils et élévations, ainsi qu'il est expliqué (art. 6).

Si l'on fait passer des plans verticaux par plusieurs rayons du soleil, il suit de

---

(*) L'auteur entend parler de l'application du *trait* sur une pièce de charpente. T. O.

l'article précédent, qu'ils seront parallèles entre eux, et on les nomme plans verticaux du soleil.

13. Cela posé, si de tous les points d'un objet on imagine des parallèles (au rayon du soleil) tirées jusqu'à la rencontre d'une surface quelconque, elles y peindront une figure qui sera la projection de l'ombre portée de l'objet sur cette surface; sur quoi on observera que, pour trouver l'ombre d'un corps quelconque, il suffira de projeter les lignes de son contour, qui sont rasées par les rayons du soleil. Ombre projetée.

14. Mais pour déterminer cette projection, il faudra premièrement établir la direction ou l'élévation d'un rayon du soleil. Soit, par exemple, SL la direction d'un rayon du soleil, et l'angle ALS celui de son élévation; soient aussi les lignes DE, EF, DF, qui doivent se projeter sur un plan quelconque horizontal, vertical ou incliné, représenté par AL, CL ou MN. Si pour les points D, E, F on tire parallèlement à SL les lignes D*d*, E*e*, F*f* jusqu'à la rencontre d'un plan sur lequel on veut projeter les lignes DE, EF, DF, on aura la projection de ces lignes déterminées par leurs correspondantes *de*, *ef*, *df*. Projection oblique servant à déterminer l'étendue des ombres. Pl. I, *fig.* 2.

Il est aisé de voir que cette projection ne diffère de celles expliquées (art. 5 et 6) qu'en ce que les lignes qui les produisent sont inclinées à l'horizon; par cette raison on peut l'appeler projection oblique; elle suit d'ailleurs les mêmes lois, c'est-à-dire que toutes les lignes parallèles aux plans sur lesquels elles sont projetées, conserveront sur ces plans leurs longueurs sans altération; ce qui est évident, puisque, dans tous les cas, elles seront les côtés opposés d'un parallélogramme.

Avant d'entrer dans un plus grand détail sur ce sujet, il est bon de faire connaître les différentes dispositions les plus convenables aux plans, profils et élévations (ce qu'on peut appeler un système de dessin) et les différentes hypothèses qu'on peut suivre pour les ombres, et aussi examiner celles qui paraissent mériter la préférence, relativement aux usages auxquels les dessins des ingénieurs sont destinés.

15. Les architectes observent, lorsque leurs dessins peuvent être contenus dans une même feuille, de placer en bas de la feuille le plan des caves et souterrains, celui du rez-de-chaussée au-dessus, puis celui du premier étage, etc.; et d'arranger, dans les places du papier que ces plans laissent vides, les différents profils et élévations, sans avoir égard à leur position relativement aux plans auxquels ils appartiennent; ils ne sont pas dans l'usage ordinaire de faire porter ombre sur les aires des cours, jardins, escaliers et place d'intérieur, par les différents murs qui forment les plans, se contentant de marquer les ombres par des gros traits sur les arrêtes opposées au jour qu'il font venir du coin à Dispositions et arrangements des dessins assez ordinaires aux architectes.

gauche de la feuille qui contient le dessin; il est vraisemblable qu'ils ne sont détournés d'ombrer les plans que parce que les ombres se confondraient avec les teintes d'encre de la Chine qui expriment les maçonneries coupées par leurs plans qu'ils représentent, d'autant qu'ils ne manquent pas d'ombrer les arbres et même les arbustes des jardins qui se trouvent dans leurs dessins, et qu'on ne peut disconvenir que les ombres contribuent beaucoup à faire entendre du premier coup d'œil les différents reliefs dans les plans, lorsque toutes leurs parties ne sont pas assujetties à un même niveau.

Les architectes observent d'ailleurs d'ombrer les profils et élévations qui ont un indispensable besoin de ce secours pour être entendus; ils supposent, comme font ordinairement les peintres, que le jour vient de derrière leur épaule gauche, c'est-à-dire du coin à gauche du haut de la feuille qui contient le dessin; et ils suivent les mêmes lois, lorsque les plans, profils et élévations, se trouvent sur des feuilles séparées. Pour que les ombres, dans les profils, ne se confondent pas avec les teintes à l'encre de la Chine des maçonneries coupées, ils laissent les maçonneries en blanc, ou se contentent de les pointiller, ce qui dans le même dessin fait une contradiction qui n'est pas raisonnable; les maçonneries doivent être traitées de même dans les plans et dans les profils. Mais ce n'est pas la seule contradiction que leurs plans et profils représentent; le jour venant aux uns comme aux autres, du coin à gauche en haut de la feuille du dessin, suppose aux plans et aux profils une situation verticale qui à l'égard des premiers est contre leur nature. Les architectes sont trop éclairés pour admettre cette supposition. On doit croire qu'ils regardent les dessins comme étant copiés d'après un relief éclairé par un même soleil, où les plans, profils et élévations sont appliqués sur la même table verticale, ce qui d'ailleurs s'accorde avec l'usage ordinaire qu'on fait de leurs dessins. Quelqu'un qui fait bâtir une maison orne assez volontiers son cabinet des dessins qui lui ont été fournis.

Dispositions et arrangements qui conviennent aux dessins des ingénieurs.

16. Il n'en est pas de même des dessins des ingénieurs; tout ce qui concerne les places de guerre et qui pourrait donner aux ennemis des éclaircissements doit être caché au public. Destinés à paraître sous les yeux du roi et des ministres, il convient de les disposer de manière qu'ils puissent commodément les examiner; et l'arrangement le plus propre à remplir cet objet est de placer autour des plans, les profils et élévations parallèlement aux lignes sur lesquelles on les suppose relevés. Ces dessins ainsi disposés et arrangés sur une table, les plans se trouvent avoir leur situation horizontale et naturelle, et les parties de la feuille qui représentent les profils et élévations, sont relevés de la main par celui qui les présente pour faire sentir plus aisément leur situation verticale; c'est cette disposition et ces arrangements des profils et élévations autour des plans

qui facilitent l'examen de la relation des mêmes parties sur les plans et profils, les font entendre avec moins de tention d'esprit ; et le premier profil ou élévation étant examiné, on tournera le dessin pour en présenter un autre qui relevé de la main comme le premier se trouve également accompagné du plan, et ainsi de tous les autres. Cet usage fait, ces dessins sont repliés dans les porte-feuilles des bureaux pour y avoir recours au besoin.

17. Les ingénieurs ne doivent pas perdre de vue, dans l'arrangement de leurs dessins, le principal usage auquel ils sont destinés; d'ailleurs, les teintes de maçonneries coupées pour les ouvrages faits étant lavées en rouge, et celles des ouvrages proposés l'étant en jaune, tant aux profils et élévations qu'aux plans, rien n'empêche d'ombrer les uns et les autres pour en faire sentir les reliefs et en faciliter l'intelligence. Il est nécessaire, à cet effet, de marquer sur les plans, les lignes par lesquelles passent les profils et élévations ; ces lignes sont appelées lignes de profil ou d'élévation ; on indiquera aussi par des horizontales, menées à travers les profils et élévations, les hauteurs auxquelles on fait passer les plans ; ces lignes se nommeront les *lignes des plans.*

Les lignes des profils et élévations doivent être marquées sur les plans, et les lignes des plans doivent l'être sur les profils et élévations.

18. On conçoit aisément que l'arrangement et l'usage des plans, profils et élévations dont nous venons de parler (art. 17) nécessitent la disposition d'une même incidence et direction des rayons du soleil qui éclaire tout le système, afin que dans la comparaison des parties d'un profil ou d'une élévation avec celles du plan auxquelles elles répondent, on y remarque par différentes directions et hauteurs du soleil, cet arrangement placé dans l'ombre, des élévations et profils entiers qui ne reçoivent de lumière que par réflexion (comme on le verra dans les exemples suivants que nous apporterons).

Nécessité de faire éclairer par un même soleil tout un système de dessins.

Une même direction et hauteur du soleil sera également nécessaire quand les profils, plans et élévations se trouvent placés sur des feuilles différentes ; cette manière d'ombrer les dessins, qui est l'imitation de la nature, et qui les rend plus faciles à entendre, est également gracieuse, exige plus d'art et de combinaison que pour le faire par la méthode que suivent les architectes, qui ne supposent également qu'un même soleil, mais porté sur un seul et même plan vertical, et d'autant que leur système d'ombre se trouve renfermé dans celui que l'on propose et dont il fait partie, on n'aura point d'instruction particulière à en donner.

19. La nécessité d'éclairer un système par un même soleil étant reconnue, on sera maître de donner au rayon solaire telles directions et telles élévations que l'on jugera les plus convenables pour faire du dessin un tableau gracieux. L'expérience a fait voir qu'en général les direction et élévation d'un rayon solaire à 45° remplissaient mieux ce but que tout autre ; c'est en effet la supposition la plus ordinaire des peintres et dessinateurs ; c'est-à-dire qu'ils imaginent que le plan

Direction et élévation du rayon solaire pour un système de dessin.

vertical du soleil fait avec le plan du tableau ou de la feuille de dessin un angle de 45°, tandis que le rayon solaire venant du derrière de leur épaule gauche est élevé au-dessus de l'horizon de 45°.

On fera bien d'admettre la même supposition, à moins qu'on n'ait des raisons particulières pour s'en écarter.

Nécessité d'ombrer les plans des places de guerre et leur disposition.

20. Ce qui a été dit précédemment sur la nécessité d'ombrer les plans en général, pour en faire connaître les différents reliefs, doit s'appliquer aux plans des places de guerre, à l'égard desquels nous observerons qu'ils doivent toujours être supposés vus de l'intérieur du royaume, ce qui détermine leur position sur la feuille de papier. On ne doit pas omettre d'y marquer les ombres produites par les revêtements des remparts, églises, bâtiments militaires et civils, etc., même par les maisons des bourgeois; et, comme on est dans l'usage de marquer les combles des églises, bâtiments militaires et civils, et de supposer toutes les maisons des bourgeois coupées à 4 ou 6 pieds de haut, il en résulte des cascades d'ombres qui, bien ménagées et entendues, contribuent à donner aux plans l'apparence du relief qu'ont dans la nature les objets qu'ils représentent. Mais, pour faire avec quelque précision, il est nécessaire d'avoir un plan de niveau qui fasse connaître les hauteurs des différents points qui portent ombre au-dessus des surfaces exposées à les recevoir.

Direction et élévation du soleil pour les plans de guerre.

21. Le plus souvent on se bornait à faire porter des ombres aux arbres et haies des jardins, et on n'avait aucun égard à la situation du soleil sur le plan de la place, on en faisait venir le jour du coin à gauche du haut du dessin. Ce soleil, placé au hasard, éclairait souvent des côtés de montagnes, fonds de fossés, etc., qui ne voient jamais le soleil à midi; le paysage d'une place, éclairé avec sa lumière naturelle, en est plus reconnaissable. Ainsi, ce que l'on peut pratiquer de mieux est de faire venir la lumière du soleil de midi, en choisissant son élévation au-dessus du plan horizontal, sous un angle qui convienne à la place que l'on dessine. Si, par des raisons particulières, on trouvait plus d'avantages à faire venir la lumière d'un autre point que du midi, on serait maître de le faire, pourvu que néanmoins l'on choisisse une direction et élévation du soleil qui soit dans la nature et convenable au lieu. Par exemple à Mézières, située à 50 degrés environ de latitude, on a choisi (Pl. II) une direction du soleil faisant avec la ligne du midi un angle de 40 degrés du sud à l'est, qui répond à peu près à celle de 9 heures du matin, heure à laquelle le soleil se trouve élevé de 45 degrés vers le solstice d'été. Si les fossés se trouvaient élevés et étroits, on pourrait choisir une plus grande élévation du soleil, de même une moindre s'ils étaient plus larges et moins profonds, et de manière à ce que d'ailleurs la grande étendue d'ombre ne se trouvât pas occuper l'espace entier des rues.

Sans nous étendre davantage sur cette matière, nous allons passer à l'application des principes établis à différents cas et qui sont les plus ordinaires.

Méthode de projeter sur les feuilles de dessins les ombres produites par les corps sur toutes sortes de surfaces.

LEMME.

22. Projeter sur les profils et élévations quelconques un rayon du soleil dont on a la direction au plan et dont l'élévation est connue. Pl. I, *fig.* 3, 4, 5, 6 et 7.

Soit (*fig.* 3) un plan dont les fig. 4, 5, 6 représentent les profils ou élévations, soit aussi sur le plan la projection de la direction d'un rayon solaire exprimé par SL dont l'angle TLX (*fig.* 9) représente l'élévation au-dessus de l'horizon.

On prendra sur la ligne SL (*fig.* 3) une partie à volonté telle que TL que l'on projettera (art. 6) aux élévations ou profils sur les lignes YZ prolongées s'il est nécessaire, et ayant sur ces profils et élévations tiré par le point T les verticales TX égales chacune à celle TX (*fig.* 6) toutes correspondantes au point T du plan. Par les points X on mènera (*fig.* 5 et 7) les lignes SL qui seront sur les profils ou élévations, la projection du rayon solaire représenté au plan par SL.

1er PROBLÈME (*).

23. *Projeter sur une feuille de dessin les ombres portées sur une surface horizontale par des lignes quelconques droites ou courbes.*

Soit (*fig.* 8) le plan d'un mur d'appui au-dessus d'un mur de terrasse, au devant duquel est une lanterne suspendue et une barrière avec tourniquet.

Que les fig. 9 et 10 en soient les profils et élévations, on mènera (d'après l'art. 24 ci-après) sur les plans, profils et élévations les lignes SL projection d'un rayon solaire.

Par les extrémités A d'une ligne telle que AA qui porte ombre (*fig.* 8) on tirera les lignes A*a* parallèles à SL, l'ombre des points A sera nécessairement dans ces lignes. Pour les points A du profil (*fig.* 9) correspondant à ceux du plan, on tirera pareillement une parallèle à SL jusqu'à ce qu'elle rencontre au point *a* la ligne YZ qui représente le plan horizontal, sur lequel les ombres seront portées.

(*) Les planches II, III, IV, V, X et XI manquent dans le manuscrit. Ces six planches sont perdues. Nous donnons dans l'atlas, et *fidèlement*, les planches I, VI, VII, VIII, IX, XII et XIII qui sont les seules que l'École d'application de Metz possède. T. O.

Le point A y détermine en *a* et *a* l'ombre des extrémités A de la ligne AA et par conséquent si l'on tire *aa* elle sera l'ombre de la ligne AA.

On projettera de la même façon l'ombre de toute autre ligne droite sur un plan horizontal, et c'est par cette méthode qu'on a marqué celle de la barrière et de son tourniquet, et de la lanterne supposée abaissée. S'il est question de trouver l'ombre d'une courbe, telle que le dessus du *bahut* couronnant le mur d'appui, on cherchera l'ombre de plusieurs points appartenant à cette courbe, et par ces points projetés on tracera l'ombre de la courbe.

Comme on ne doit marquer sur les dessins que les lignes nécessaires pour la connaissance des objets qu'ils représentent, on se contentera de marquer légèrement au crayon les lignes SL qu'ici l'on a tirées en rouge pour les rendre plus sensibles, on se dispensera même de mener (*fig.* 9), les parallèles à SL telles que A*a*. Il suffira de prendre, avec le compas, l'intervalle du point A à la ligne SL. Puis sans changer l'ouverture on cherchera par tâtonnement sur l'horizontale YZ un point *a* duquel pour centre on puisse décrire un arc tangent à SL et on projettera ce point *a* au plan par la méthode des tâtonnements ordinaires, pour éviter les lignes inutiles.

24. Remarque. S'il se trouve quelque élévation ou enfoncement tel que le fossé ponctué au plan (*fig.* 8) et à l'élévation (*fig.* 10), les verticales qui ne sont représentées au plan horizontal que par des points donneraient des ombres sans aucuns ressauts, il n'y en aurait qu'à celles des horizontales ou inclinées qu'on s'est contenté de marquer en lignes ponctuées, sans en donner l'explication qui ne pourrait être qu'une répétition de ce qui a été dit ci-devant.

2e PROBLÈME.

25. *Projeter sur une feuille de dessin les ombres portées sur une surface verticale par une ligne quelconque.*

Soit (*fig.* 10) l'élévation d'un mur qui reçoit l'ombre d'une lanterne suspendue au devant d'une potence qui soutient cette lanterne. Nous allons déterminer sur ce mur l'ombre d'une verticale, d'une horizontale et d'une inclinée.

Ce problème peut se résoudre par le moyen du plan (*fig.* 8) ou du profil (*fig.* 9).

1re *Solution, en se servant du plan.* Par les points B et C (*fig.* 8), qui sont les arêtes du poteau vertical représenté (*fig.* 10) par les verticales BB, CC, on tirera jusqu'à la ligne QR, projection de la face du mur, les parallèles B*b*, C*c*, à la ligne solaire SL du plan. Par les points B et C, extrémités supérieures des verticales BB, CC (*fig.* 10), on mènera parallèlement des parallèles au rayon

solaire SL, sur lesquelles on projettera, par le moyen des distances horizontales, les points *b* et *c* du plan, et par leurs correspondantes horizontales *b* et *c* (*fig.* 10), on tirera les verticales *bb*, *cc* du poteau sur ce mur vertical.

Si l'on veut avoir l'ombre du bras horizontal de la potence que les rectangles DE représentent (*fig.* 8 et 10); par les points D et E (*fig.* 8) des arêtes qui portent ombre et par leurs correspondants au plan, on tirera D*d*, E*e*, parallèles à la projection SL du rayon solaire. Les points *d* et *e*, où ces parallèles rencontrent la ligne QR, étant ensuite projetés sur les lignes D*d*, E*d* de la *fig.* 10, on y déterminera les points *d*, *d* et *e*, *e*, entre lesquels sera renfermée la projection ou l'ombre des arêtes représentées par les points D et E; après quoi il sera facile d'achever la projection totale, en tirant par les points *d* et *e* des parallèles aux arêtes horizontales et verticales des bouts de ce bras.

Enfin, s'il est question de trouver l'ombre du lien incliné qui soutient le bras de la potence, on marquera au plan (*fig.* 8), en lignes ponctuées, la projection de la chambrée HH de ce lien sous la face horizontale du bras, et cette chambrée étant représentée (*fig.* 10) en FF, qui définiront en même temps les extrémités des arêtes supérieures du lien, on tirera (*fig.* 8) les lignes H*h* parallèles à SL et (*fig.* 10), les lignes F*f* parallèles à SL, qui s'entrecouperont en *ff* avec les verticales *hf* menées correspondantes du plan (*fig.* 8), à l'élévation (*fig.* 10); on marquera pareillement (*fig.* 10) en lignes ponctuées la chambrée GG de l'extrémité inférieure du lien sur la face verticale du poteau montant; puis des points G et G on mènera parallèlement à SL, les lignes G*g*, dont les intersections en *g* et *g* avec les verticales *gg* correspondantes du plan à l'élévation, donneront les extrémités des deux parallèles *gf*, qui termineront la largeur de l'ombre cherchée que le lien porte sur le mur (*fig.* 10).

2ᵉ *Solution*; *en se servant du profil.* Pour éviter les répétitions, nous nous contenterons d'appliquer cette solution au lien incliné qui soutient le bras de la potence.

On marquera, comme on l'a fait dans la solution précédente, la chambrée du lien sur la face verticale du poteau montant (*fig.* 10), afin d'avoir les points GG extrémités des arêtes qui portent ombre par ces points et par ceux FF extrémités supérieures des mêmes arêtes. On tirera des parallèles à SL; par les points FF, GG (*fig.* 9), on tirera aussi, parallèlement à la projection du rayon solaire, des parallèles F*f*, G*g*, lesquelles jusqu'à la rencontre du plan vertical, sur lequel les ombres doivent se peindre; on prendra ensuite les hauteurs des points *f* et *g* au-dessus de l'horizontale QR, qu'on portera par ordre (*fig.* 10) sur les parallèles F*f*, G*g*; elles y détermineront les points *f*, *f* et *g*, *g* que l'on cherche.

On aurait fixé par les mêmes méthodes l'ombre d'une courbe quelconque en cherchant celle de plusieurs de ses points.

Par les procédés détaillés ci-dessus, on a projeté (*fig.* 10) les ombres de différents objets qui en portent sur le plan vertical. Si l'on avait à projeter l'ombre, d'une seule ligne, portée sur plusieurs plans verticaux, on y réussirait par les mêmes pratiques, en reconnaissant les différents points de cette ligne qui porte ombre sur chaque plan vertical, ou en imaginant quelques-uns de ces plans verticaux prolongés assez pour recevoir l'ombre de la ligne entière, laquelle étant trouvée, on se contentera de marquer sur chaque plan vertical la partie de cette ombre qu'il doit recevoir.

Pl. IV, *fig.* 8, *a*; 9, *a*; 9, *b*, et 10, *a*.

26. 1re REMARQUE. On remarquera que les lignes horizontales du bras de la potence perpendiculaires à l'élévation de la figure 10, et qui y sont représentées par des points donnant des ombres dirigées parallèlement à SL, sans aucuns ressauts, sur la plinthe couronnant le mur de terrasse au-dessous du mur d'appui en briques, au lieu que les arêtes verticales des poteaux forment des ressauts sur lesdites plinthes; il en serait de même de toutes autres lignes non perpendiculaires à l'élévation, ce qui prouve qu'elles n'y seraient pas représentées par des points.

27. 2e REMARQUE (Pl. III, *fig.* 10). On a supposé que le mur sur lequel les ombres vont se peindre était parallèle à la ligne MN du plan sur laquelle l'élévation a été prise. Mais si le mur n'était point parallèle, comme on le voit (*fig.* 8, *a* Pl. IV), après avoir marqué la direction SL du soleil au plan, et l'avoir relevé aux profils (*fig.* 8, *a* et 9, *b*) et à l'élévation (*fig.* 10, *a*), on y marquera les ombres en se servant du plan ou des profils, comme il a été dit (art. 25), et d'autant que les bras de la potence perpendiculaires au mur, ne le sont point à la ligne AB, sur laquelle l'élévation (*fig.* 10, *a*) a été prise, ils n'ont pu y être représentés que par des lignes, des extrémités desquelles il a été nécessaire de mener des parallèles à SL pour en déterminer les ombres. Pour abréger l'opération, on pourrait prolonger au plan les arêtes horizontales des bras des potences, et les ayant relevées à l'élévation, ils y auraient donné des points par lesquels et ceux des extrémités marqués comme il vient d'être dit, on aurait tiré des lignes qui auraient déterminé les ombres. Remarquant que de quelque manière que se fasse l'opération il se fera des ressauts, dans la partie à droite de l'élévation, occasionnés par le renfoncement de la porte masquée; on les déterminera comme il a été dit (art. 24).

Pour éviter les petites opérations nécessaires pour trouver les ombres des horizontales perpendiculaires aux murs sur lesquels elles doivent se peindre, on peut se procurer des directrices auxquelles leurs ombres doivent être parallèles. Pour un point quelconque de la direction SL du soleil au plan, on tirera les lignes 8-7, 8-9 parallèles aux lignes de biais des deux murs, et d'un point quelconque S

de la même direction du soleil au plan, on abaissera sur ces parallèles des perpendiculaires S-10, S-11, et ayant porté ces deux perpendiculaires horizontales à leurs profils correspondants (*fig.* 9, *a* et 9, *b*) en S-14 et S-15. On les représentera de même à l'élévation (*fig.* 10, *a*) de S en 12, et de S en 13, et on tirera des lignes L-12 et L-13, qui seront les directrices auxquelles les ombres de chacune des horizontales perpendiculaires aux deux élévations du mur de la figure (10, *a*) seront parallèles.

Enfin, généralement, quels que soient les points pris sur la direction solaire au plan, ainsi que les lignes menées, de l'un desdits points, parallèles aux faces du mur biaisé à AB et les lignes menées, de l'autre point, perpendiculaires sur les parallèles respectives, ces deux points quelconques, pris sur la direction solaire au plan, trouveront toujours leurs positions aux profils et aux élévations, l'un dans le rayon solaire y faisant l'extrémité d'une ligne horizontale qui déterminera la représentation de l'autre point; et cette horizontale, dans chacun des profils ou élévations, représentera les deux perpendiculaires ci-dessus telles qu'ici S-10 et S-11 (*fig.* 8-*a*), ou toutes les deux ensemble, suivant leurs correspondantes à ces élévations ou profils.

28. 3ᵉ REMARQUE. La partie à droite de l'élévation de la (*fig.* 10-*a*) représente l'ombre d'une horizontale perpendiculaire à un plan vertical: telle est l'arête O-P d'une couverte de porte sur le pied-droit de la porte. On peut la déterminer rigoureusement et directement en prenant au profil (*fig.* 9-*b*) la distance 1-2, et la portant verticalement à l'élévation de 3 en 4, en tirant la ligne P-4, qui déterminera sur le pied-droit de la porte l'ombre de la couverte O-P; mais comme cela pourrait devenir embarrassant dans les élévations dont les pieds-droits des portes et croisées n'auraient pas la même largeur, on trouverait plus commode de se procurer, pour une opération plus en grand, une directrice 5-6, à laquelle ligne, P-4 serait une ligne menée parallèlement.

3ᵉ PROBLÈME.

29. *Déterminer l'ombre d'une ligne droite ou courbe sur une surface inclinée quelconque projetée sur une feuille de dessin supposée horizontale ou verticale.* Pl. V, *fig.* 11, 12, 13, 14 et 15.

Soit (*fig.* 11) la projection horizontale d'un comble composé de deux pans et de deux croupes, dont les figures 12 et 13, 14 et 15 représentent les profils et élévations. Il s'agit de tracer sur toutes ces surfaces les ombres portées par des souches de cheminées, par des lucarnes et boules d'amortissement.

Ayant (art. 22) projeté sur toutes les figures un rayon solaire SL par les

extrémités des lignes dont on veut trouver l'ombre, on lui tirera des parallèles, jusqu'à la rencontre des surfaces qui reçoivent l'ombre, imaginées être prolongées s'il est nécessaire. Les points où ces surfaces seront rencontrées par ces parallèles étant ensuite portés sur les lignes correspondantes au plan et aux élévations, y détermineront les ombres que l'on cherche.

Nous ferons seulement remarquer que les ombres étant une fois marquées au plan, peuvent se projeter aux élévations par le moyen des distances horizontales; mais que si l'on ne veut pas se servir du plan pour cet usage, on peut les projeter directement par le moyen des hauteurs verticales prises au profil et aux élévations sur les parallèles correspondantes à la projection du rayon solaire.

On ne pourrait entrer dans le détail de l'application de ce problème à la projection des lignes droites, sans répéter ce qui a été dit (art. 24). Nous nous contenterons d'expliquer les procédés à tenir, pour déterminer l'ombre d'une sphère sur une surface inclinée vue en plan ou en élévation.

On remarquera facilement (art. 22) que l'ombre d'une sphère n'est autre chose que celle de son grand cercle perpendiculaire au rayon solaire; ainsi il suffira de projeter un cercle au plan, au profil et élévation, afin d'avoir sur ces trois figures les points les plus correspondants, desquels on puisse tirer des parallèles à la projection du rayon solaire.

Pour cet effet, on mènera (*fig.* 11) à travers la sphère deux diamètres AB, DE, l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à SL. Ce dernier sera le diamètre horizontal du grand cercle qui porte ombre; on tirera ensuite un troisième diamètre FG, qui fasse avec AB un angle GCB de 45 degrés, égal au complément de l'angle de l'élévation du soleil, et enfin un quatrième diamètre HJ perpendiculaire à FG. Cela fait, on partagera le quart du cercle HEG en tant de parties que l'on voudra. Par les points de division tels que E, on abaissera sur EG la perpendiculaire E*e*; après quoi, par les points G, *e* etc., on tirera sur AB les perpendiculaires *e*K, etc. qui donneront les points N et K, que l'on portera sur CA de C en M et de C en Q. Par les points K et Q, on mènera de part et d'autre de AB des ordonnées que l'on fera égales à *e*E. On aura les points O, R, P, V, par lesquels, et ceux E, N, D, M, on fera passer une ellipse qui sera au plan la projection que l'on cherche du grand cercle de la sphère.

Cette ellipse sera ensuite projetée au profil (*fig.* 13) et à l'élevation (*fig.* 15), ainsi que les points cotés des mêmes lettres l'indiquent.

Pour le faire, on projettera, comme à l'ordinaire, au profil et à l'élévation (*fig.* 13 et 15), les verticales élevées des points D, P, O, E, V, M et R du plan (*fig.* 11), dans lesquelles doivent se trouver lesdits points; ceux D et E se trouveront aux extrémités du diamètre horizontal D*f*, des figures 13 et 15. A l'égard des autres

points P, N, O, V, M et R, on en reconnaîtra la hauteur par la réflexion suivante. Le rayon solaire étant élevé de 45 degrés au-dessus de l'horizon, et le grand cercle de la sphère qui porte ombre lui étant perpendiculaire, fera aussi avec l'horizon un angle de 45 degrés; et aussi les points P, N, O (*fig.* 13 et 15), qui sont à la circonférence supérieure du grand cercle, seront autant élevés au-dessus du plan horizontal passant par le diamètre DE; et les points V, M, qui sont à la circonférence inférieure du même grand cercle, seront autant abaissés au-dessous dudit plan horizontal, qu'ils sont les uns et les autres distants d'un plan vertical passant par le même diamètre DE. On pourra donc, sans le secours des profils et élévations des fig. 13-*a*, et 15-*a*, prendre au plan (*fig.* 11) les distances perpendiculaires des points P, N et O, ou V, M et R à la ligne DR (en la considérant comme la projection du plan vertical), et les porter de suite par ordre aux profils (*fig.* 13 et 15) sur les verticales correspondantes, tant au-dessus qu'en dessous de la ligne DE, qui représente le plan horizontal.

Ces préparations faites pour les points E, O, N, P, D, R, M, V, on tirera (*fig.* 11, 13 et 15) les parallèles à SL, le rampant du comble (*fig,* 13); étant ensuite projetées comme à l'ordinaire (*fig.* 11 et 15), les parallèles ci-dessus y détermineront les points *e, o, n, p, d, m, v*, par lesquels on fera passer des ellipses qui renfermeront l'ombre cherchée de la sphère.

30. 1re REMARQUE. On remarquera, comme on l'a fait précédemment, que les ombres des verticales représentées par un seul point sur la feuille horizontale (ou plan) y portent des ombres en lignes droites parallèles à la direction du soleil, sans aucun angle ni ressaut, encore qu'elles soient projetées sur différents plans horizontaux ou inclinés; que semblablement, les horizontales marquées par un seul point aux élévations où elles seront par conséquent perpendiculaires, donneront des ombres parallèles à la direction du soleil sur les mêmes élévations.

31. 2e REMARQUE. Les lignes horizontales qui portent ombre sur les pans des couvertures au *plan* sont ordinairement ou parallèles ou perpendiculaires aux lignes d'about ou de couronnement, c'est-à-dire à la section commune du plan horizontal avec un plan incliné, celles qui leur sont parallèles donnent des ombres parallèles aux lignes qui les produisent.

A l'égard des ombres portées au *plan* par des lignes horizontales perpendiculaires aux lignes d'about ou de couronnement, on les trouvera par les méthodes ordinaires, ci-devant indiquées, mais s'il y a une trop grande quantité de ces lignes, il sera mieux de se procurer une directrice à laquelle elles seront parallèles et qu'on trouvera sur chaque pan de la manière qui suit. Par le point X, soit imaginée une horizontale XZ perpendiculairement au couronnement XC, laquelle étant projetée à l'élévation (*fig.* 14) y sera représentée par le point *x*, et

son ombre par la ligne *xy* parallèle à SL; le point *y* étant renvoyé au plan y donnera le point Y, duquel ayant tiré la ligne XY, elle sera sur les deux grands pans du comble, l'ombre; l'horizontale XZ est par conséquent la directrice de toutes les horizontales de moindre étendue qui se trouveront sur ce pan de couverture et également perpendiculaires à la ligne d'about ou de couronnement.

On en fera de même pour les autres pans sur lesquels ces lignes, et les opérations qu'on a faites pour les trouver, sont également ponctuées.

32. 3ᵉ REMARQUE. On pourra aussi se procurer de la manière suivante des directrices pour trouver plus commodément les ombres des verticales sur les élévations (*fig.* 11 et 12) qui se présentent au soleil. Soit (*fig.* 14), élevée verticalement sur l'about du comble la ligne TS dont il s'agit de déterminer l'ombre, la projection de cette ligne TS, au plan (*fig.* 11), sera le point J par lequel ayant mené la ligne J-2 parallèle à SL, elle déterminera sur le plan du pan de la couverture l'ombre de ladite verticale; de manière qu'ayant rapporté le point 2 au point 3 de l'élévation (*fig.* 14), on continuera la ligne T-3 qui sera l'ombre de la verticale TS à ladite élévation. On en fera de même à l'élévation de la croupe (*fig.* 12).

Quant aux élévations (*fig.* 13 et 15) qui suivent le soleil, on imaginera (*fig.* 15), une verticale TS, placée sur le couronnement, qui sera représentée au plan (*fig.* 11) par le point 4, dont l'ombre sera dirigée au plan suivant la ligne 4-5, parallèle à la direction du soleil SL, de manière qu'ayant rapporté le point 5 au point L de l'élévation (*fig.* 15), on tirera la même ligne TL qui sera l'ombre de la verticale TS. On en fera de même à l'élévation de la croupe (*fig.* 13).

Pl. VI, *fig.* 12, 13, 14 et 15-*a*. 33. 4ᵉ REMARQUE. Si les élévations des combles étaient vues de biais, c'est-à-dire si elles n'étaient point prises sur des lignes du plan parallèles à celles de leurs abouts ou couronnement, telles que les figures 13, 14 et 15*a*, autour du plan (*fig.* 9, 11-*a*), on aurait à chaque élévation la représentation d'un pan et d'une croupe sur chacun desquels on relèverait le soleil (art. 22), et l'on chercherait l'ombre d'une verticale comme il a été dit par l'article 32, et comme les opérations ponctuées, marquées des mêmes lettres et chiffres, l'indiquent. Si l'on voulait les déterminer il serait indispensable de faire des profils droits de chaque pan et de chaque croupe.

34. COROLLAIRE. On déduira du problème précédent la méthode de projeter les ombres à l'élévation, les ombres portées sur une surface inclinée vue par-dessous, tel que serait le rempant intérieur du comble, s'il se trouvait avoir assez d'élévation pour être éclairé du soleil; comme par exemple celui dont les figures 16, 17 et 18 représentent le plan, le profil et l'élévation.

Pl. VII, *fig.* 16, 17 et 18. On s'est contenté de marquer l'ombre d'une verticale AB et d'une horizontale BC perpendiculaire à la ligne sur laquelle l'élévation a été prise, laquelle,

par conséquent, sera représentée par un point; il serait inutile d'en donner le détail.

4e PROBLÈME.

35. *Projeter l'ombre d'une ligne quelconque sur la surface d'un cône vu en plan et en élévation.* Pl. VIII, fig. 19, 20, 21 et 22.

Soit (*fig.* 19) le plan d'un cône dont les figures 20, 21 et 22 sont les profils et élévations.

Soient aussi menées sur ces figures (horizontales et verticales) les lignes dont il est question de déterminer les ombres, qu'elles portent sur la surface du cône, pour les projeter ensuite sur le plan et élévations.

On remarquera que l'ombre d'une ligne droite projetée sur une surface courbe y sera toujours représentée par une courbe, à moins que tous les points de la ligne qui la produit ne se trouvent dans la projection d'un même rayon solaire.

Ainsi, pour trouver l'ombre, par exemple, de l'horizontale AB, on y remarquera plusieurs points, tels que D, par lesquels on tirera ainsi que pour le point A, et sur toutes les figures, des parallèles A*a*, D*d* à la projection du rayon solaire; l'ombre des points A, D sera nécessairement dans ces lignes et précisément aux points où elles rencontrent la surface du cône. Il est donc question de déterminer cette rencontre.

Pour cet effet, on regardera les lignes A*a*, D*d* (*fig.* 19), comme la rencontre des plans verticaux du soleil fixés (art. 12), avec la surface du cône; et ces lignes considérées sous ce point de vue sont projetées au profil (*fig.* 20). Elles y produiront des hyperboles qui rencontreront aux points *a* et *d* les lignes A*a* et D*d*. On rapportera ensuite sur ces lignes correspondantes aux plans et aux élévations les points *a* et *d* par les méthodes expliquées ci-devant; ces points seront (*fig.* 19, 21 et 22) l'ombre des points A et D.

On trouvera, par le même procédé, l'ombre de tout autre point de la même horizontale AB; et par tous ces points déterminés, on fera passer une ligne qui sera l'ombre de AB.

On se servira aussi des mêmes moyens pour projeter tant au plan (*fig.* 19) qu'aux élévations (*fig.* 21 et 22), l'ombre d'une verticale AC et de toutes lignes quelconques.

Nous ne dirons rien de la manière de tracer les hyperboles (*fig.* 20), non plus que de celle de trouver les courbes paraboliques ou elliptiques qui pourraient être formées sur la surface d'un cône par la rencontre de différents plans; on suppose qu'on en soit instruit dans le Traité de la Stéréotomie.

REMARQUE. A l'égard des ombres sur les dômes sphériques, elles se détermineront avec autant de facilité; les profils droits donneront des courbes circulaires qui, dans les projections, donneront des ellipses.

Si l'on a bien compris ce qui vient d'être enseigné, on ne se trouvera point embarrassé pour la projection d'aucune ombre.

De la dégradation des ombres et des teintes.

Définitions des clairs et bruns.

36. On distingue dans la nature des clairs et des bruns : par le terme *clair* on entend les parties d'un corps qui étant exposées à la lumière du soleil, ou d'autres objets lumineux, en reçoivent l'impression.

Par le terme *brun*, on entend les parties d'un corps qui étant opposées à la lumière sont dans l'ombre; et le terme *brun* convient d'autant mieux à ce que l'on appelle l'*ombre* que jamais la lumière n'est totalement interceptée.

Différence dans les clairs et les bruns.

37. Les surfaces d'un corps les plus directement exposées à la lumière paraissent les plus éclairées et les plus brillantes; celles qui lui sont moins exposées paraissent plus ou moins foncées et brunes relativement à l'opposition plus ou moins grande avec les parties éclairées environnantes.

Clair-obscur.

38. Indépendamment de la lumière directe, il en est une autre de réflexion qui suit les mêmes lois, à l'exception que les clairs en sont moins brillants et les ombres moins brunes relativement. Ce sont ces clairs occasionnés par la réflexion de la lumière, que les peintres appellent *clairs-obscurs*, et dans lesquels les ombres se perdent et se noient, de manière qu'on ne peut en distinguer la figure et le contour.

Reflet.

39. La réflexion de la lumière agissant sur tous les objets environnants, les corps environnants occasionnent nécessairement sur les parties des corps qui sont ombrées, des clairs et des obscurs, c'est ce que les peintres appellent le *reflet*.

Ce que c'est que le fuyant.

40. On dit que les corps *fuient* l'œil du spectateur, lorsqu'ils en sont plus éloignés que d'autres corps considérés du même point de vue.

Ce qu'on dit ici de différents corps, doit s'entendre aussi des différentes parties du même corps.

Principe général tiré de la nature en différents effets des clairs et des bruns relativement aux différents éloignements d'où ils sont vus.

41. De plusieurs corps, placés à différents éloignements, les parties éclairées de celui qui est le plus près de l'œil du spectateur paraissent plus brillantes, et respectivement les parties ombrées paraissent plus brunes et plus foncées. Car c'est un principe généralement reçu par tous les peintres et dessinateurs, et par eux copiés dans la nature, que les *clairs* fuient en *brun* et les *bruns* en *clair*; on ne doit jamais oublier ce principe, c'est-à-dire que le brun et le clair, ensuite la figure et le contour des parties éclairées et ombrées des corps, et enfin les

corps eux-mêmes, se confondent dans un éloignement hors de la portée de la vue du spectateur, à quoi se joint la partie de l'atmosphère interposée à son œil et aux objets pour achever cette confusion.

42. Il suit de ce qui a été dit ci-devant que les clairs en s'éloignant s'assourdissent, se dégradent et deviennent moins brillants; les ombres s'affaiblissent au point que les clairs et les bruns se confondent dans un certain éloignement et paraissent de la même teinte, et que les objets eux-mêmes disparaissent et semblent s'anéantir à la vue; il règne à cet égard une harmonie et une proportion qu'on doit imiter. Dégradations des clairs et des bruns.

43. Ce qui vient d'être dit (art. précédent) ne peut s'appliquer qu'aux surfaces extérieures des corps qui reçoivent librement la lumière ou à sa réflexion. Il n'en est pas de même des surfaces intérieures et des corps qui paraissent dans l'enfoncement, elles sont plus ou moins brunes suivant qu'elles sont plus ou moins privées de la lumière réfléchie.

44. On a dit (art. 13), que les corps portaient ombre sur les surfaces qui les environnent, mais on doit remarquer que cette ombre projetée se peint plus ou moins brune suivant que la surface qui la reçoit est plus ou moins près de l'objet qui la porte.

45. On peut, pour se fixer l'imagination et se donner des modèles des teintes en clairs et en bruns qui conviennent à chaque partie suivant les différentes circonstances ci-devant énoncées, imaginer un ruban replié dont l'un des bouts soit coloré de quelque teinte ou couleur que ce soit, laquelle se dégrade uniformément et se trouve à l'autre extrémité du ruban, aussi claire ou brillante que possible. Le *brun* est le plus foncé de la même teinte. Ce modèle, au moyen des divisions 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., qu'on y fera, mettra sous les yeux les justes rapports des *clairs* et des *bruns*, qui se font en raison des quarrés des distances, parce que la lumière étant divergente diminue dans cette proportion; si ce ruban est imaginé fait sur sa longueur, il pourra servir d'échelle proportionnelle aux distances, et faire connaître, au moyen des divisions 1, 2, 3, etc., les *clairs* et les *bruns* qui conviendront à chaque partie; c'est-à-dire, par exemple, que (*fig.* 24) l'ombre qui conviendra au *clair* le plus brillant coté 1 se trouvera vis-à-vis la même division, de même l'ombre cotée 2 se trouvera vis-à-vis sa division, etc. Méthode pour fixer les dégradations des clairs et des bruns. Pl. IX, *fig.* 23, 24, 25 et 26.

46. Il ne nous reste plus qu'à donner quelques exemples de dégradations d'ombres et de teintes, on les trouvera sur les planches X et XI qui représentent les plans d'un bâtiment autour duquel on a relevé dix-huit profils ou élévations, le tout éclairé par un même soleil élevé de 45°, et dont la direction fait avec la principale façade du bâtiment un angle aussi de 45°. Pl. X et XI.

On a marqué en lignes ponctuées rouges, sur le plan (*fig.* 4) et les élévations

(*fig.* 7, Pl. X), ainsi que sur le plan de la Pl. XI et les élévations des figures 11 et 12, les directrices des ombres portées par les couvertes des croisées et sur les pieds-droits, par des opérations semblables à celles qui ont été faites (Pl. VI et enseignées art. 28).

Pareillement on a aussi marqué en lignes ponctuées en rouge sur le plan du comble (*fig.* 6, Pl. X) les directrices des ombres portées par des horizontales perpendiculaires aux lignes de couronnement ou d'about et sur les élévations des mêmes combles (*fig.* 9 et 9-*a*) de la même planche et (*fig* 14 et 14-*a*, de la Pl. XI) par des opérations semblables à celles des Pl. V et VI expliquées art. 31, 32 et 33. Il sera facile, par ces mêmes moyens, de tracer de pareilles directrices sur les autres élévations éclairées, du soleil, qui en ont besoin.

Enfin, on a ajouté les deux autres Pl. XII et XIII, contenant les dessins du même bâtiment éclairé par un soleil perpendiculaire ou parallèle à ses façades aussi élevé à 45°; on ne les a mis sous les yeux que pour faire sentir le peu d'agrément que cette direction du soleil donne au dessin, et que l'on doit par conséquent, lorsque rien ne s'y oppose, préférer la direction oblique ainsi que nous en avons prévenu art. 19.

N° 2.

DES OMBRES (*).

On sait que tous les points d'un objet lumineux doivent être regardés chacun comme le centre d'une sphère immense composée d'une infinité de rayons qui s'écartent du centre avec une vitesse qui échappe à nos sens ; que, dans un milieu homogène et uniformément dense, ces rayons se propagent toujours en ligne droite, de manière qu'un rayon de lumière émané d'un point quelconque ne peut arriver à un autre point déterminé, tant qu'il se trouve un obstacle sur la

(*) Ce mémoire est de Gaspard Monge qui l'a écrit en 1785 à l'École du génie de Mézières pour l'instruction des jeunes officiers.

Ce mémoire fait partie de la collection des manuscrits de l'École d'application de Metz. Il est coté n° 1, carton n° 1 ; il provient du fond de la bibliothèque de l'ancienne école de Mézières, et il porte le timbre de cette école.

Ce mémoire n'a pas encore été publié *textuellement*. T. O.

droite menée par ces deux points ; par conséquent lorsqu'un corps Q, impénétrable à la lumière (*fig.* 1) se trouve dans un milieu éclairé par un point lumineux S, il doit interrompre la route des rayons de lumière, soit en les interceptant, soit en les réfléchissant, et par là priver totalement de lumière l'espace OMBR placé de l'autre côté de ce corps par rapport au point S, et terminé par les prolongements des tangentes SOM et SBR. C'est cette partie infinie de l'espace absolu, qu'un corps opaque prive de lumière par son interposition dans un milieu éclairé, que l'on nomme *ombre de ce corps.*

Si l'on place au delà du corps par rapport au point S un plan PL, de manière qu'il se présente en face vers le point lumineux, ses parties Pa, *b*L seront éclairées comme elles le seraient si le corps Q était anéanti ; mais la partie *ba* absolument privée de lumière sera parfaitement obscure, et le passage de cette obscurité à la clarté des parties voisines éclairées, se fera subitement et sans ménagements. Par exemple, Q est une sphère, et supposons que le plan PL soit placé perpendiculairement à une droite menée du point S par le centre Q ; l'espace *ab* sera circulaire, comme on le voit (*fig.* 2), et toutes ses parties seront également obscures. C'est cet espace que l'on appelle projection de l'ombre, et que le vulgaire confond communément avec l'ombre proprement dite.

La projection de l'ombre d'un corps sur une surface quelconque est donc la figure que terminent sur cette surface les prolongements des rayons de lumière tangents à la surface du corps.

Quelque autre part qu'on eût placé le plan PL, cependant toujours au delà du corps Q, par rapport au point S, l'espace obscur *ab* eût été plus ou moins grand, mais son obscurité absolue eût toujours été la même, puisqu'elle eût toujours été une privation totale de lumière. L'intensité réelle de l'ombre est donc une quantité constante qui peut être prise pour terme de comparaison. Il n'en est pas de même de sa quantité relative ou de son intensité apparente, car elle n'est que le contraste qu'elle fait avec les parties éclairées qui l'avoisinent. Or ce contraste étant d'autant plus sensible et plus frappant que la lumière l'est davantage, doit varier comme elle, c'est-à-dire augmenter et s'affaiblir en même raison. Donc, toutes choses égales d'ailleurs, l'intensité apparente de l'ombre d'un corps reçu sur une surface quelconque doit croître et décroître en raison inverse du quarré de la distance de cette surface au point lumineux, car il est démontré en physique que la lumière suit cette loi. Mais comme dans la nature nous ne voyons les objets qu'à travers un milieu dont la densité s'oppose en partie au passage de la lumière et diminue par conséquent son intensité ; cette ombre doit encore nous paraître d'autant plus forte qu'elle est moins éloignée de notre œil, c'est-à dire que nous sommes plus proches de la surface qui la reçoit. On doit avoir égard à ces deux

principes lorsqu'on peint des objets éclairés par un flambeau peu éloigné du champ du tableau. Mais lorsque l'on suppose que la lumière vient du soleil, comme la distance de cet astre est sensiblement la même pour toute la surface de la terre, la première considération n'a pas lieu. Tout ce que nous venons de dire ne suppose aucune dimension au corps lumineux; soit Q (*fig.* 3) un globe opaque et sphérique éclairé par un autre globe sphérique S dont le diamètre ait un rapport sensiblement fini avec la distance des deux centres. Soient menées les quatre lignes ER, EM, FM et FD tangentes aux surfaces des deux globes, et concevons que le système de ces quatre droites fasse une demi-révolution autour de SQ comme axe. Il engendrera quatre surfaces coniques opposées deux à deux par le sommet et qui seront précisément les mêmes que celles qu'on aurait eues en menant ces quatre tangentes dans tous les sens possibles. Cela posé, il est clair : 1° que l'espace OMB (fini si S est plus grand que Q, infini s'il est plus petit) doit être absolument obscur, puisqu'il ne reçoit aucun rayon de lumière ; 2° l'obscurité des espaces RUMV, VMBD doit diminuer en s'éloignant de l'axe SV. Les points de *cb* sont en effet très-obscurs, puisqu'ils ne sont découverts chacun que par un seul point E ou F de la surface lumineuse. Les points *e*, *t* le sont moins parce qu'ils découvrent chacun une grande partie du globe S. Enfin les points *a* et *d* sont très-éclairés, et autant qu'ils le peuvent être, puisqu'ils reçoivent des rayons de toute la surface du corps lumineux. Donc, si on présente en PL un plan perpendiculaire à l'axe SQ, la projection de l'ombre sur ce plan sera composée de deux parties (*fig.* 4) : 1° d'un noyau circulaire *ad* de même obscurité que l'ombre de la figure 2 ; 2° d'une couronne d'ombre *acbd*, dont l'intensité diminue en s'éloignant du centre jusqu'à devenir zéro aux points *a* et *d*.

Les dimensions, ou la grandeur de cette ombre imparfaite qu'on nomme pénombre (du latin *penè umbra*), doit varier suivant que les dimensions des corps S et Q, leur distance et celle du plan PL, deviennent plus ou moins grandes. L'angle *c*B*d* (*fig.* 3), par exemple, restant le même, la droite *cd* sera d'autant plus grande que la distance B*e* du point B au plan PL sera plus considérable. 2° Cette distance restant la même, la droite *cd* pourra être considérée comme composée des deux parties *ce* et *ed*, dont la première sera proportionnelle à la tangente de l'angle *c*B*e*, la deuxième à celle de l'angle *e*B*d*. Donc quels que soient et l'angle B et la distance B*e*, la grandeur *cd* de la pénombre sera proportionnelle à : B*e* (tang *c*B*e* + tang *e*B*d*). Mais si le diamètre du corps lumineux est considérablement plus grand que celui du corps opaque, l'angle en B est égal à l'angle sous lequel le diamètre du corps S est vu d'un point quelconque du corps Q, et les segments *ce* et *ed* sont sensiblement égaux ; d'où il suit que l'angle *c*B*e* égale sensiblement l'angle *e*B*d* et qu'il peut, dès lors, être

comme égal à ($\frac{1}{2}c$Bd). Soit donc p l'angle sous lequel est vu le diamètre du soleil ; q la distance Be de l'objet qui porte ombre à la surface sur laquelle elle est reçue; la grandeur de la pénombre sera : $2q$ tang $\frac{1}{2}p$. Il suit de là sans entrer dans une si grande précision, que les ombres portées sur la surface de notre globe par des corps éclairés par le soleil, ne doivent pas être terminées vivement, comme dans la fig. 2; mais qu'elles doivent se mêler par masses insensibles avec la clarté qui les avoisine. Ajoutez à cela que les rayons de lumière, lorsqu'ils rasent quelque corps dans leur route, se plient et se rapprochent de l'axe, et diminuent par là la grandeur de l'ombre pure. Par conséquent dans les dessins, les teintes des ombres ne doivent pas être uniformes, mais s'adoucir insensiblement, à moins qu'elles ne soient très-proche de l'œil qui doit les voir et de l'objet qui les cause. Dans les opérations suivantes nous ne déterminerons géométriquement que les projections des contours des ombres pures, ce sont les seules qu'il soit nécessaire d'avoir exactement dans les dessins; c'est l'affaire du lavis de dégrader les teintes, et de les placer de manière à faire illusion. Nous allons d'abord supposer les rayons du soleil parallèles, c'est-à-dire émanés d'un foyer infiniment éloigné, ou qui relativement à nos sens puissent être regardés comme tels. Nous verrons ensuite quel changement on apporterait à nos méthodes, si l'objet lumineux se trouvait à une distance sensiblement finie.

PROBLÈME GÉNÉRAL.

La direction des rayons parallèles de lumière étant donnée, trouver l'ombre d'un corps quelconque, le corps et la surface étant donnés de dimensions et de positions.

On construira les projections, du corps opaque qui doit causer l'ombre et de la surface qui doit la recevoir, sur deux plans quelconques, qu'il est cependant plus commode de supposer perpendiculaires l'un à l'autre et tels que l'un soit horizontal et l'autre vertical. Quelquefois ces projections sont déjà construites et c'est sur elles qu'on se propose de déterminer les ombres. Ainsi soit GZD (*fig.* 5), la projection horizontale et *cbdb'* l'élévation du corps qui porte ombre, EFI et *egf*, les projections horizontale et verticale de la surface qui doit la recevoir, enfin YA et *ya*, celles d'un rayon de lumière quelconque. Il n'est pas possible de donner une méthode générale pour la construction de ces projections, et l'on s'en assurera facilement en observant qu'un même corps se projette différemment suivant les différentes manières dont sa nature nous est connue. Par exemple, les projections du rayon de lumière ne peuvent se faire que conséquemment à la manière dont nous supposons que les dessins seront éclairés. Ainsi, si, comme c'est l'ordinaire, nous nous donnons sa direction YA ou sa projection horizontale

et l'angle RAY qu'il forme avec elle, on mènera RY perpendiculaire à YA, et on imaginera le triangle YRA, élevé verticalement sur YA. On projettera les points A et Y en *a* et *y*; et on fera la verticale *ry* égale à RY. Il est clair, pour lors, que *ya* sera la projection verticale du rayon dont AY est la projection horizontale. Toute autre manière dont on fixerait la position du rayon de lumière exigerait peut-être une autre méthode pour en faire les projections. Il est d'usage de nommer YA la *direction* du rayon de lumière, et *ya* son *incidence*. C'est ce que les astronomes appellent l'*azimuth* et l'*almicantarath*.

Cela posé dans l'une des projections (dans l'élévation, par exemple) et par tous les points de l'objet qui doivent spécialement porter ombre, on mènera des droites *hl* parallèles aux rayons du soleil, et on considérera chacune d'elles, comme la projection d'un plan parallèle aux rayons de lumière et perpendiculaire au plan vertical de projection.

Chacun de ses plans contient une infinité de rayons dont une partie est interceptée par l'objet qui porte ombre, et dont deux enfin et un plus grand nombre, après avoir rasé la surface de ce corps déterminent par leurs prolongements deux ou plusieurs points du contour de l'ombre sur la surface qui doit la recevoir. Or ceux des rayons de lumière renfermés dans le plan *hl*, qui sont interrompus par le corps opaque, rencontrent toute sa surface dans la section HL faite par le plan *hl*, et ceux qui s'échappent en rasant la surface sont des tangentes à cette section. Donc, si par les règles de la *Stéréotomie*, on projette cette section en HMLN, et si on lui mène deux tangentes MO et NP parallèle à YA, elles seront les projections horizontales mais indéfinies des rayons rasants, qui doivent par leur prolongement donner des points du contour de l'ombre. Mais puisque ces rayons sont contenus dans le plan *hl*, ils ne peuvent rencontrer la surface EFI que dans l'intersection de cette surface par le plan *hl* représenté dans l'élévation par *ki*. Par conséquent, si l'on projette cette section en QK'L'', les rencontres O et P de cette ligne avec les droites MO et NP seront deux points du contour de l'ombre demandée.

Les verticales élevées par les points O et P détermineront par leurs rencontres avec la droite *hl* les projections verticales des deux mêmes points. En répétant l'opération pour tant de plan *lh* qu'on voudra, on trouvera tous les points qui seront nécessaires à la construction de la ligne du contour de l'ombre dans les deux projections. C. Q. F. D.

Remarque. Les points M et N séparent la partie éclairée MHN de la section, de la partie obscure MLN; par conséquent si on fait passer une ligne par tous les points trouvés de la même manière pour les autres sections, on aura la sépara-

tion de la partie éclairée de la surface de celle qui est dans l'ombre, ce qui est quelquefois très-utile dans le lavis. Les verticales élevées par les points N, M détermineront par leurs rencontres avec les lignes *hl* correspondantes dans l'élévation, les points *m*, *n*, par lesquels doit passer la projection verticale de cette séparation.

Corollaires. 1° L'ombre d'une droite verticale projetée sur un plan horizontal est toujours une droite, ou plus généralement, la projection horizontale de l'ombre d'une verticale, reçue sur quelque surface que ce soit, est toujours une droite; car les rayons qui sont interrompus par la verticale composent un plan vertical, qui par sa rencontre avec les surfaces voisines détermine l'ombre de la droite, et cette intersection ne peut être vue sur le plan horizontal que sous une droite, puisque tout le plan vertical qui la contient est lui-même projeté sous la forme d'une droite qui doit être parallèle à la projection horizontale d'un rayon de lumière.

2° Pour la même raison la projection verticale de l'ombre d'une droite perpendiculaire au plan de projection verticale est toujours une droite parallèle à la projection verticale d'un rayon de lumière.

3° La projection de l'ombre d'une ligne droite ou d'un polygone quelconque reçue sur un plan qui lui est parallèle est toujours une figure qui lui est égale et semblable.

La solution que nous venons de donner du problème général des ombres, peut s'employer quelle que soit la figure du corps qui porte ombre, c'est-à-dire que la surface soit courbe ou composée de parties planes ou courbes. Mais lorsque le corps n'est pas terminé par une surface, mais par un système de plans joints par des arêtes rectilignes, on peut déterminer bien plus aisément la figure de son ombre.

1er Exemple. *Déterminer l'ombre d'un cube donné de position sur un plan horizontal.*

Soient BCDE et IFGH les projections horizontales et verticales du cube (*fig.* 6), YA et *ya* celles du rayon de lumière, et KN la base de l'élévation (*). Cela posé, remarquons que nous aurons l'ombre demandée si nous reconnaissons qu'elles sont les arêtes du cube que rasent les rayons de lumière et si nous déterminons les ombres que portent ces arêtes. Or il est évident que l'arête verticale, représentée par le point B dans la projection horizontale et par IF à l'élévation, est rasée par les rayons de lumière; que de plus son ombre doit être indéfiniment sur une droite BQ parallèle à YA; mais si par les points F et I, on mène des droites parallèles à *ya* les points où elles rencontreront l'horizontale KN, seront

(*) Monge désigne ici par *base de l'élévation* ce qu'il appella plus tard *ligne de terre*. T. O.

les projections verticales des ombres des points F et I. Donc, en abaissant les verticales MQ et KR, leur intersection avec BQ terminera l'ombre de l'arête verticale représentée par le point B. Donc RQ sera une portion du contour de l'ombre demandée. Cela fait, on observe que l'arête horizontale exprimée par BC dans la projection horizontale et par FG dans l'élévation est aussi rasée par les rayons; qu'il en est de même pour l'arête horizontale supérieure projetée en CD par la verticale qui passe par le point G et pour les arêtes horizontales inférieures représentées par DE et EB, que par conséquent les ombres de toutes ces arêtes achèveront le contour de l'ombre du cube. Mais nous avons déjà l'ombre d'une des extrémités de l'arête horizontale BC; il suffit d'avoir celle de l'autre extrémité C; or cette ombre doit se trouver sur la droite CP parallèle au rayon YA. De plus, si par le point G on mène la droite GN parallèle au rayon *ya*, le point N sera son élévation. Donc la verticale NP déterminera par sa rencontre avec CP l'ombre du point C, et par conséquent QP sera l'ombre de l'arête horizontale supérieure représentée par BC. On aurait pu trouver la droite QP, en faisant un autre raisonnement; car l'ombre d'une horizontale reçue sur un plan horizontal est une droite qui lui est égale et parallèle. Donc, en menant par le point Q une droite égale et parallèle à BC on aurait eu l'ombre de cette arête. En faisant un pareil raisonnement pour toutes les autres lignes que nous venons de citer, on parviendra à achever le contour de l'ombre bien plus facilement qu'en employant la méthode du problème.

2° Exemple. *Déterminer l'ombre d'un point sur un plan vertical.*

Soient M et *m* les projections horizontale et verticale du point; TN la projection horizontale du plan vertical sur lequel doit être portée l'ombre demandée; soit MN parallèle à YA (*fig.* 7), et regardons cette droite comme la projection d'un plan vertical qui doit contenir le rayon de lumière interrompu par le point M; cela posé, le rayon interrompu ne peut par son prolongement rencontrer le plan vertical, et par conséquent déterminer l'ombre demandée que dans l'intersection des deux plans verticaux; or cette intersection est indéfiniment la verticale N*o*. De plus, la droite *mo*, parallèle à *ya*, doit encore contenir la projection verticale du même point d'ombre dont son intersection avec la verticale N*o* déterminera le point *o* demandé.

3° Exemple. *Trouver sur un plan incliné l'ombre d'un cylindre vertical terminé par deux bases horizontales.*

Soient *fkh* et ZX (*fig.* 8) les projections du cylindre, BCED et *bced* celles du plan incliné, soient menées les tangentes *f*G et *h*J parallèles à la projection horizontale du rayon de lumière, il est clair que ces deux droites seront les ombres des verticales représentées par les points *f* et *h*, et termineront latéralement la projec-

tion de l'ombre du cylindre; il ne s'agit plus par conséquent que de trouver l'ombre du contour de la base supérieure ; pour cela on fera pour tant de points qu'on voudra l'opération que nous allons faire pour le point K, dont la projection verticale est le point k'. Par le point k' soit mené la parallèle $k'n$ à l'incidence solaire, et soit regardée cette ligne comme la projection verticale d'un plan parallèle aux rayons de lumière, dont l'intersection avec le plan *bcde* doit contenir l'ombre du point K. Soit projetée cette intersection sur le plan horizontal en abaissant par les points *n* et *m* des verticales, qui par leur rencontre avec les droites BD et EC, détermineront deux points N et M. La droite MN contiendra donc la projection de l'ombre du point K, mais la parallèle à YA, menée par le point K, doit encore la contenir ; par conséquent leur point L d'intersection, sera la projection de l'ombre du point K. L'opération, répétée pour tant d'autres points qu'on voudra, achèvera de déterminer l'ombre du cylindre.

Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons supposé que les rayons de lumière fussent émanés d'un point infiniment éloigné; voyons maintenant la manière de déterminer l'ombre d'un corps éclairé par un point lumineux placé à une distance sensiblement finie.

Lorsque le point lumineux ne sera pas infiniment éloigné de l'objet éclairé, les rayons de lumière qui en partiront ne seront pas parallèles, et les projections horizontales et verticales d'un de ces rayons ne suffisant pas pour déterminer la direction de tout autre, il faudra alors projeter le point lumineux lui-même ; imaginer par ce point dans l'espace tant de plans qu'on voudra perpendiculaires à un des plans de projection, et qui feront, dans l'objet éclairé et dans la surface qui doit recevoir l'ombre, autant de sections qu'on en projettera sur l'autre plan ; mener par le point lumineux toutes les tangentes possibles aux sections du premier corps et les prolonger jusqu'à ce qu'elles rencontrent quelque part, si cela est possible, les sections correspondantes faites dans le second corps.

Ce procédé graphique ne diffère de celui du premier problème, qu'en ce que dans ce cas-ci les tangentes aux sections sont menées par un point déterminé, au lieu qu'elles étaient parallèles entre elles dans le premier cas.

La solution du problème des ombres que nous venons de donner étant de la plus grande généralité, il serait inutile d'entrer dans quelques détails sur les particularités de certaines ombres, et de rapporter des méthodes abrégées plus ou moins élégantes qu'on peut employer en certains cas. L'usage et les occasions en fournissent assez, pour peu qu'on y réfléchisse. Cependant, nous ne passerons pas sous silence une difficulté qui peut souvent se présenter et qui a lieu dans l'exposé suivant.

4ᵉ Exemple. *Déterminer, sur la surface concave d'un puits fait en avant d'un retran-*

chement, l'ombre portée par son bord, en supposant qu'il soit éclairé par un point lumineux placé à une distance déterminée.

On sait qu'un puits de retranchement est un cône tronqué renversé, dont les bases parallèles sont horizontales; soient donc (*fig.* 9) EDCJGH et *ecgb*, les projections horizontales et verticales du puits et A, *a* celles du point lumineux. Par le point A soient menées les projections AL de tant de plans verticaux qu'on voudra, et les projections verticales *pnqk* des sections qu'ils forment dans la surface du cône (il est inutile de donner le détail de cette construction); cela posé, il est clair que l'ombre du point M du bord ne peut se trouver sur la surface du puits que dans la section ML, et par conséquent en projection verticale sur la courbe *pnqk*. Donc, si par le point *p* projection verticale du point M, on mène le rayon *ap*, il coupera la courbe quelque part en un point *q* qui sera le point d'ombre; et en abaissant une verticale *q*Q qui coupera ML en un point Q, on aura la projection horizontale du même point. On déterminera de la même manière les ombres de tant de points du bord qu'on voudra, et on aura par conséquent la courbe formée par leur continuité, à l'exception des deux points T et T′ où commence cette courbe, où elle coupe les bords du puits; alors la méthode générale est en défaut, elle n'enseigne pas à les trouver.

Pour les déterminer, remarquons que les points T et T′ demandés n'appartiennent point à la courbe TQT′, considérée comme ombre portée, mais qu'ils sont les limites de l'intérieur du puits qui sépare la partie TQT′ obscure de la partie TET′ éclairée, et qu'en les considérant comme des éléments de la surface conique, leurs prolongements doivent passer par le point lumineux et être tangents à la surface. Ces prolongements, qui sont des plans, doivent donc se couper en une droite menée par le sommet du cône et par le point lumineux, et représentée par AR en projection horizontale et par *a*S en projection verticale. De plus, ces prolongements doivent couper le prolongement de la base supérieure du cône en deux droites tangentes à sa circonférence, et ces droites doivent passer toutes deux par le point où *a*S coupe le même plan. Donc, si du point *r* on abaisse la verticale *r*R, et si du point R on mène deux tangentes à la circonférence EDC, les points de contact seront les points T et T′ demandés.

Cette solution, quoique particulière au cas de l'exemple, se généralisera si l'on fait attention que les points T et T′ appartiennent à la courbe qui sépare la partie éclairée de la surface du corps de la partie obscure, courbe dont nous avons donné la construction dans la figure 5, et dont *m*, *n*, M, N dans cette même figure sont des points. Donc, on aura les extrémités de l'ombre portée par le bord d'un vase d'une figure quelconque sur sa surface concave, en déterminant les intersections de ce bord avec la courbe qui sépare la partie éclairée de la sur-

face extérieure d'avec la partie obscure. On suppose ici l'épaisseur du vase infiniment mince, et si elle ne l'était pas il faudrait regarder la surface intérieure comme extérieure.

N° 3.

(MÉMOIRE INÉDIT.)

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU DESSIN DE LA VIS (*).

Génération du filet par un triangle.

1. Chacune des faces du filet de la vis triangulaire fait partie d'une surface gauche et se termine à deux des hélices que décrivent les points de la génératrice de cette surface. Ces deux hélices, intersection des deux surfaces gauches, forment sur la surface de la vis deux arêtes, l'une saillante et l'autre rentrante.

I. DE LA PROJECTION.

Des hélices.

2. ST (*fig.* 1) est la commune section (**); *o* la projection horizontale de l'axe; A le point où l'hélice saillante perce le plan horizontal; par conséquent le cercle ACBD, dont le centre est *o* et le rayon *o*A, est la projection horizontale de cette hélice, et *o*A est celle d'une position de la génératrice de l'une et l'autre surface

---

(*) Ce mémoire est de M. Persy, ancien professeur de sciences mathématiques à l'École d'application de l'artillerie et du génie à Metz.

M. Persy avait résolu à Metz le problème de l'ombre de la vis en même temps que Hachette le résolvait à Paris. Lorsque la solution publiée par Hachette dans la Correspondance de l'École polytechnique, t. I, n° 1, janv. 1809, fut connue à Metz, M. Persy communiqua sa solution à M. Français, professeur de fortification, et son collègue à l'École d'application; plus tard, M. Français adressa à Hachette une solution simple sur le même sujet, et qui a été publiée dans la Correspondance de l'École polytechnique, t. II, n° 2, janv. 1810. J'ai tout lieu de croire que la solution donnée par M. Français lui fut *inspirée* par celle de M. Persy, dont il avait eu connaissance. T. O.

(**) M. Persy appelle *commune section* la ligne que l'on appelle ordinairement *ligne de terre*. Cette dénomination de *commune section* fut introduite à l'École d'application de Metz par Ferry, qui avait été au commencement de sa carrière adjoint de Monge à l'École du génie de Mézières. T. O.

gauche. Ne considérons que celle qui fait partie de la face supérieure du filet, et soit $A'o'$ la projection verticale de la position dont nous parlons, et que nous regardons comme la position primitive de la génératrice de la surface gauche supérieure. Si l'on conçoit un cône qui ait pour sommet le point (o, o'), et pour trace horizontale le cercle ABCD, toute arête de ce cône sera parallèle à l'une des positions de la génératrice, et réciproquement toute position de la génératrice sera parallèle à l'une des arêtes du cône. Si l'on décrit ensuite une spirale ordinaire PARQ qui passe par A, qui ait pour pôle le point O, et pour rayon de son cercle générateur la hauteur du pas de vis, il est clair que de la position OA à la position quelconque OM, la génératrice se sera élevée de la quantité supérieure; d'où il suit que m étant la projection horizontale d'un point de l'hélice, on aura la projection verticale de ce point en menant mm' perpendiculaire à ST et prenant $p'm'$ égal à la distance pm.

3. Il s'ensuit aussi que la projection verticale de la position OM de la génératrice est la parallèle à $o'p'$ tirée par le point m'.

On l'obtiendrait encore en portant la distance pm en $o'r$, et si la construction est exacte, gp perpendiculaire à ST, coupera om en un point p de la spirale, car il est évident que cette courbe est en même temps la trace de la surface gauche sur le plan horizontal.

4. S'il s'agissait de l'hélice engendrée par le point (f, f'), on mènerait l'horizontale $S'f'T'$ au-dessus de laquelle on porterait les distances pm, alors les perpendiculaires mm' partiraient des points de rencontre des lignes om avec le cercle fhg, projection horizontale de la nouvelle hélice.

Des courbes qui terminent la projection verticale de la surface.

5. Par la génératrice considérée dans une position quelconque om, $o'q$, je mène un plan pqr perpendiculaire au plan vertical de projection. Ce plan touchera la surface gauche quelque part en un point situé sur la génératrice et qu'il s'agit de déterminer.

6. On sait que pour une même hélice la tangente fait un angle constant avec l'horizon. Considérant celle qui est projetée horizontalement dans le cercle ACBD, nous connaissons l'inclinaison de sa tangente. Soit (o, s) le sommet d'un cône qui ait pour trace horizontale ce même cercle et dont les arêtes fassent avec l'horizon le même angle que la tangente de l'hélice, toute arête de ce cône sera parallèle à quelqu'une des tangentes de l'hélice, et réciproquement toute tangente de l'hélice sera parallèle à quelqu'une des arêtes du cône. Concevons ainsi

une suite de cônes ayant chacun pour trace horizontale la projection d'une hélice et pour arêtes des droites qui fassent avec l'horizon le même angle que les tangentes de cette hélice. Je dis que tous ces cônes auront pour sommet commun le point (o, s). Il est aisé de s'en convaincre en vertu de l'équation $x = \frac{r}{c} h$, qui est connue de tous. Actuellement si l'on mène par ce point (o, s) un plan uts parallèle à pqr, ce plan coupera chacun des cônes suivant deux arêtes à chacune desquelles sera parallèle une des tangentes de l'hélice correspondante, et pour chaque hélice cette tangente sera parallèle au plan pqr.

Soient ox, ox', ox'', ox'''..., les projections horizontales des arêtes dont nous parlons. En menant aux cercles axb, $fx'g$, $\mathrm{F}x''\mathrm{G}$, $\mathrm{A}x'''\mathrm{B}$ des tangentes respectivement parallèles à ox, ox', ox'', etc., on aura les projections horizontales des tangentes des hélices qui sont parallèles au plan pqr. Or, il est facile de reconnaître que les points de contact y, y', y'', y''', etc., sont sur une même droite $\alpha\beta$ perpendiculaire à ut et placée à même distance du point o, car pour mener au cercle du rayon ox une tangente parallèle à ox, il faut mener à ox le rayon perpendiculaire oi qui détermine le point de contact. De même pour les cercles ox' et ox''... Donc les triangles xox' et yoy' sont égaux, comme ayant un angle égal en o compris entre des côtés égaux, etc.

Le point de tangence du plan pqr aura donc pour projection horizontale l'intersection des deux droites $\alpha\beta$ et om.

7. On simplifiera la construction qui résulte de là, si faisant attention qu'on n'a besoin que de la direction de la trace qr, on considère le cône dont les arêtes sont parallèles aux différentes positions de la génératrice, et que l'on prenne pour son sommet le point (o, s) lui-même, car la projection horizontale d'une arête du cône sera celle d'une position de la génératrice et la projection verticale de cette arête sera immédiatement la parallèle à la trace qr, que l'on doit mener par le point s. Ayant donc tiré par ce point la parallèle sa' à $o'\mathrm{A}'$, et si dans le cercle $acbd$ décrit du centre o avec le rayon oa', cercle qui sera la trace du cône de même inclinaison que la génératrice, si, dis-je, l'on se donne la projection $o\mathrm{Z}$ d'une arête quelconque du cône, ou ce qui est la même chose, d'une position quelconque de la génératrice, toute la construction se réduira à abaisser du point Z la perpendiculaire $\mathrm{Z}u$ sur $o\mathrm{A}$, à rabattre ou en oz, et à mener à $o\mathrm{A}$ la parallèle zy', qui coupera $o\mathrm{Z}$ au point y' cherché.

8. Mais on peut atteindre à une simplicité plus grande encore : si l'on décrit le cercle $fhgk$, projection de l'hélice qui répond au point de contact du plan pqr, et que l'on tire la droite df, il sera aisé de voir : 1° que cette droite est parallèle à $o\mathrm{Z}$; 2° que la perpendiculaire ol abaissée du point o sur df est égale à oz ou ou ;

3° enfin, que cette perpendiculaire prolongée passe par les points x', y', d'où l'on conclut d'abord les deux méthodes qui suivent.

9. Pour construire le point qui doit être sur une position donnée oZ de la génératrice, il faudra par le point d mener à oZ la parallèle df qui rencontrera oA au point f; le cercle décrit du point o comme centre avec le rayon of, coupera oZ dans le point demandé y' (voyez le n° 19).

10. On obtiendra le point qui se trouve sur une hélice dont la projection horizontale $fhgk$ est donnée en menant à df la parallèle oy'. Cette ligne déterminera sur le cercle $fhgk$ le point y' que l'on cherche (voyez le n° 19).

11. Cette dernière méthode convient surtout dans le cas, ou comme dans celui de la vis on n'a à considérer qu'une zone de la surface comprise entre deux hélices; elle ne fait point tomber dans des opérations inutiles et donne directement les points situés sur les hélices saillante et rentrante du filet.

12. La projection horizontale d'un point de la courbe étant trouvée, on construira sa projection verticale par le moyen de celle de la position correspondante de la génératrice.

13 (*). Les considérations suivantes conduisent directement aux résultats de l'art. 8. Par le point (f, f') de la position primitive de la génératrice et qui décrirait l'hélice donnée par la projection horizontale $fhgk$, je mène un plan tangent à la surface; pour cela je tire l'horizontale $f'e'$ qui sera évidemment la soutangente du point (f, f') de l'hélice, de sorte qu'en portant $f'e'$ en fE, la droite AE sera la trace horizontale du plan tangent. Or, si ce plan suivait le mouvement de la génératrice sans changer d'inclinaison par rapport à l'horizon il ne cesserait pas de toucher la surface, et quand la trace serait devenue perpendiculaire à st, le point de contact, dans la position qu'il aurait prise serait sur la courbe cherchée. Mais puisqu'il suffit de connaître la projection horizontale de la génératrice considérée dans sa nouvelle position, on pourra faire abstraction du mouvement le long de l'axe. Ayant donc abaissé sur AE la perpendiculaire oI qui coupera la circonférence $ACBD$ au point n, on prendra l'arc Am égal à An, et le rayon om rencontrera le cercle $fhgk$ au point y' que l'on cherche. La projection verticale de ce point sera en f'' sur l'horizontale $f'e'$, si l'on fait abstraction du mouvement de la génératrice le long de l'axe, et en Y'' si l'on a égard à ce mouvement. Actuellement, si l'on observe que les triangles $A'f'e$, $d'sO$ et $ee'f'$, esO sont semblables et donnent $\frac{eO}{d'O} = \frac{e'f}{A'e}$ $\left(\text{qui est la même chose que : } \frac{of}{oa} = \frac{Ef}{Af}\right)$ on verra que

(*) On peut commencer la solution n° 33 par celui-ci (13); joindre comme corollaire le parallélisme de df et om; puis placer le n° 14 aussi en corollaire. (Note de P.)

les triangles *dof*, A*f*E sont semblables aussi, et que par conséquent *df* est parallèle à *om*.

14. Le triangle *cof*, qui est égal à *dof*, est semblable à A*f*E. Ainsi *cf* et sa parallèle *o*V sont perpendiculaires sur AE; les points *o*, *x*, V, J, sont donc en ligne droite, et l'on voit de plus que *f* étant la projection horizontale d'un point quelconque de la surface, la trace horizontale du plan tangent en ce point, sera perpendiculaire à la ligne *cf* qui est donnée; on a donc tout de suite la direction de cette trace.

15. On remarquera que le plan mené par le point (*s*, *o*) parallèlement au plan *pqr* coupe le cône qui a pour sommet ce point, et pour trace horizontale le cercle *acbd*, suivant deux arêtes différentes et dont les projections horizontales sont *o*Z, *ox*. Ces lignes *o*Z, *ox*, sont en même temps les projections de deux positions différentes de la génératrice, mais dont les plans projetants et perpendiculaires au plan vertical, sont parallèles entre eux et au plan *pqr*. De plus, les prolongements *oy*, *ov*, de ces lignes sont les projections de deux autres positions de la génératrice opposées aux premières, et dont les plans projetants, parallèles aussi, font avec l'horizon le même angle que les plans projetant les premières positions. Enfin, dans toutes ses positions, la génératrice se prolonge au delà de l'axe de la surface et se trouve sur une seconde nappe qu'elle produit en même temps que la première. Cela posé, si l'on trace les deux lignes $\alpha 6$, $\alpha' 6'$, qui sont en projection horizontale, l'une, la suite des contacts des tangentes parallèles au plan *uts*, l'autre, la suite des contacts des tangentes parallèles au plan *u't' s*, on verra que la droite $\alpha 6$ allant rencontrer *o*Z, le plan mené par la position *o*Z de la génératrice et perpendiculairement au plan vertical, touche la nappe inférieure dans un point *y'*. Que cette même ligne $\alpha 6$ ne rencontrant que le prolongement de *ox*, le plan projetant de la position *ox* de la génératrice touche la nappe supérieure. De même, la droite $\alpha' 6'$ allant rencontrer *o*Y, le plan mené par la position *o*Y de la génératrice perpendiculairement au plan vertical, touche la nappe inférieure dans un point Y, et cette même ligne $\alpha' 6'$ ne rencontrant que le prolongement de *ov*, le plan projetant de la position *ov* ne touche que la nappe supérieure; l'on reconnaît aisément que la suite des points *y'*, Y,..... forme sur la nappe inférieure une courbe dont la projection horizontale passe par le point *o*, et se compose de deux branches qui ont pour asymptote commune la droite AB.

Comme on peut mener à un cercle deux tangentes parallèles à une droite donnée, on aura pour chaque cercle *acbd*, quatre tangentes différentes, deux parallèles à *o*Z et deux autres parallèles à *ox*. Mais il faut remarquer que de ces quatre tangentes deux seulement donnent des tangentes de l'hélice qui soient inclinées

dans le même sens que le plan *pqr* ou *uts*, et qui soient par conséquent parallèles à ce plan. Ces deux tangentes, dont l'une est parallèle à *o*Z et l'autre à *ox*, ont leur point de contact sur la même perpendiculaire $\alpha\beta$ à la trace *ut*. Ainsi, pour un même plan *uts* on ne doit admettre qu'une des lignes de contact $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$; savoir, celle pour laquelle l'inclinaison des tangentes des hélices est dans le même sens que l'inclinaison du plan, ce qu'on peut reconnaître en considérant le plan vertical qui passe par la tangente de l'hélice et qui doit couper le plan *uts* suivant une droite parallèle à cette tangente.

Maintenant les lignes *o*Z, *ox* sont les projections de deux positions différentes de la génératrice, mais dont les plans projetants perpendiculaires au plan vertical sont parallèles entre eux et au plan *uts*. De plus, les prolongements *o*Y, *o*V de ces lignes sont les projections de deux autres positions de la génératrice opposées aux premières, et dont les plans projetants pareillement parallèles entre eux, font avec l'horizon le même angle que le plan *uts*. Enfin, dans toutes ses positions la génératrice prolongée au delà de l'axe de la surface, produit une deuxième nappe qui ne différera de la face inférieure du filet que par sa hauteur au-dessus du plan horizontal, en supposant toutefois que les génératrices des deux faces du filet coupent sous le même angle l'axe de la vis. Dans cette hypothèse, si l'on trace les deux lignes $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, dont l'une est relative au plan *uts*, et l'autre au plan *u't's'*, on verra que la première allant remonter *o*Z, le plan mené par la position *o*Z de la génératrice, perpendiculairement au plan vertical, touche la face supérieure du filet dans un point *y'*; que cette même ligne $\alpha\beta$ ne rencontrant que le prolongement de *ox*, le plan projetant de la position *ox* touche la face inférieure du filet dans un point *v*. De même $\alpha'\beta'$ allant rencontrer *o*Y et ne rencontrant que le prolongement de *ov*, les points Y et V appartiennent respectivement aux faces supérieure et inférieure du filet. La même construction donnera donc à la fois deux points de l'une et de l'autre face du filet, et l'on reconnaîtra aisément que la suite des points *y'*,... Y, appartenant à la face supérieure, forme une courbe qui passe par le point *o* et dont les deux branches ont pour asymptote commune la droite AB. Il en est de même des points V...*v* appartenant à la face inférieure. Dans l'espace la courbe coupe l'axe dans le point où il est rencontré par la position *oc* ou *od* de la génératrice, selon qu'il s'agit de la face supérieure ou inférieure, et en projection verticale les deux branches de chaque courbe ont pour asymptotes les projections des positions *o*A et *o*B de la génératrice de la face sur laquelle cette courbe se trouve.

Puisque dans l'espace la courbe coupe l'axe en son point de rencontre avec la position *oc* ou *od* de la génératrice, et qu'en projection verticale les deux branches ont pour asymptotes les projections des positions dont *o*A et *o*B sont les projec-

tions horizontales, l'on peut tirer, de là, la construction simultanée du point qui est sur la génératrice opposée dans la même nappe.

16. Le n° 6 offre une démonstration géométrique de cette proposition : « Si l'on » mène à la série des hélices décrites par les points de la génératrice droite de » la vis, toutes les tangentes parallèles à un même plan donné, les points de » contact sont sur deux courbes planes dont les plans sont parallèles à l'axe » et perpendiculaires au plan donné. »

De plus, la distance des plans des deux courbes à l'axe est égale au rayon d'une hélice multiplié par le rapport des tangentes des inclinaisons (avec l'horizon) et de l'hélice et du plan donné. Cette propriété n'est point particulière à la surface de la vis, elle appartient à la surface engendrée par une courbe quelconque qui tourne autour d'un axe et qui, en même temps, se meut dans le sens de cet axe d'une quantité proportionnelle à celle de la rotation; elle apoartient exclusivement à cette surface et peut servir à sa définition. La démonstration du n° 6 subsiste pour le cas général.

17. La proposition dont il s'agit mène à cette conséquence :

Si l'on considère une série d'hélices de même *pas* tracées sur des cylindres verticaux à bases circulaires et de même axe, et que les ayant projetées sur un plan parallèle à l'axe commun (ce qui produira une suite de courbes de même genre) on mène à ces courbes des tangentes parallèles à une droite donnée dans ce plan, tous les points de contact, quelle que soit la loi suivant laquelle les courbes se succèdent, n'y eût-il même aucune loi dans leür succession, se projetteront horizontalement sur deux droites parallèles à la trace du plan de projection verticale et également distantes de la projection horizontale de l'axe.

Le problème de mener une tangente à la projection verticale d'une hélice, parallèlement à une droite donnée, revient à celui de mener à la courbe elle-même une tangente parallèle à un plan donné, ce qui se résout aisément par ce qui précède. M. Hachette en a exposé une solution dans son Supplément à la Géométrie descriptive de Monge et dans son Traité des machines, ouvrage qui est une des applications les plus utiles de la géométrie descriptive.

18. Connaissant l'inclinaison, par rapport à l'horizon, de l'une des hélices décrites par les points de la génératrice, et par conséquent le point (s-o), on peut, d'après les considérations du n° 6, trouver aisément celle de toute autre hélice dont la projection horizontale est donnée; par exemple, l'hélice projetée suivant le cercle *fhgk* a pour inclinaison de sa tangente l'angle *seo*; d'où l'on conclut la sous-tangente pour un point quelconque de l'hélice.

19. On déduit encore du n° 8 quelques conséquences utiles : les lignes ox', oZ étant perpendiculaires, lorsque oZ sera donnée, en menant ox' perpendiculaire

à oZ, on aura le point x'; et par conséquent, au moyen du cercle $x'fghk$, le point y'. Si ce cercle est donné, et par suite le point x', on déterminera le point y' en menant oy' perpendiculaire à ox'.

Ces constructions ne sont pas aussi simples que celles des nos 9 et 10, mais leur seront préférables en général, ou du moins les suppléeront au besoin, et dans le cas surtout où le *pas* de la vis n'est pas considérable, ce qui arrive ordinairement quand elle est à filet simple. C'est pour plus de clarté et d'exactitude que *dans l'épure* nous avons supposé la hauteur du pas fort grande.

Des intersections de la vis et des plans qui la terminent.

20. La vis est terminée ordinairement à deux plans perpendiculaires à son axe, et chacune des courbes d'intersection est une spirale qu'il est aisé de construire, soit par la considération de la courbe elle-même, soit par la considération des positions successives de la génératrice de la surface. La spirale oRAQ, employée d'abord subsidiairement, fait donc encore partie de la projection complète de la vis, quand l'angle de la génératrice avec l'axe est égal à un angle demi-droit.

II. DES OMBRES.

De la ligne qui sépare la partie éclairée de la partie obscure.

(Voyez art. 27, 1°).

21. Le problème en question est du même genre que celui du n° 5. Les mêmes méthodes doivent donc, à quelques modifications près, s'appliquer à l'un et à l'autre. Je considère le rayon de lumière qui passe par le point (O-S), fig. 2, sommet commun des cônes de même inclinaison que les hélices et du cône de même inclinaison que la génératrice de la surface. Soient OL, SL' les deux projections du rayon de lumière, il rencontrera le plan horizontal en L. Cela posé :

22. Que OZ soit la projection horizontale d'une arête quelconque du cône de même inclinaison que la génératrice, ou, si l'on veut, la projection d'une position quelconque de cette génératrice elle-même, et qu'il s'agisse d'avoir le point de la ligne de séparation d'ombre et de lumière qui tombe en projection horizontale sur OZ.

On voit d'abord que LZ sera parallèle à la trace du plan lumineux passant par la position OZ de la génératrice. Ainsi, ayant abaissé sur LZ la perpendiculaire Ou, on la posera en uz, et le point de rencontre de zy', parallèle à Ou, avec OZ, sera celui qu'on demande (pourquoi ?). Le cercle décrit sur OL comme diamètre

donnerait immédiatement les points u, c'est évident. Mais il y a plus, tous les points z sont sur le cercle dont le diamètre est la diagonale OM du carré LMNO construit sur OL, et les lignes zy' sont dirigées au point N. La construction se réduit donc à joindre LZ, ce qui donne le point z, et à mener zN qui détermine le point y'.

Plus simplement encore, on mènera à OZ la perpendiculaire Ox', qui coupera LZ en x', et (n° 19) le cercle décrit avec le rayon Ox' et du centre O donnera le point y'. (Il resterait à voir si c'est plus simple et si cela vaut mieux dans le cas d'un *pas* très-petit).

23. Proposons-nous en second lieu de trouver le point qui doit être en projection horizontale sur le cercle donné *fghk*. Ayant décrit une fois pour toutes la circonférence JLN (dont le centre est O et le rayon OL), du point L avec le rayon perpendiculaire à fJ, on tracera l'arc $tx'r$, qui, par son intersection avec le cercle *fghk*, donnera le point x'. Alors : ou l'on mènera L$x'z$, qui rencontrera le cercle LMNO au point z et zN déterminera le point y'; ou bien on élèvera à Ox' la perpendiculaire Oy', qui donnera encore le point cherché y' (approprier ici la méthode du n° 10. — Considérer le cône de même inclinaison que les plans tangents en les points d'une même hélice).

24. Il se présente ici des remarques analogues à celles du n° 5. On distinguera de la même manière les points qui se trouvent sur la nappe inférieure de la surface de ceux qui appartiennent à la nappe supérieure, et l'on trouvera aussi que les uns comme les autres forment une courbe douée d'asymptotes rectilignes. Ces asymptotes sont des positions de la génératrice qu'il sera aisé de reconnaître.

III. DU POINT BRILLANT (*).

25. Si par un point quelconque de l'espace et pour plus de simplicité, par le point (O-S) on fait passer une première droite perpendiculaire au plan vertical de projection, puis une deuxième droite parallèle au rayon de lumière, et qu'ensuite on construise un plan perpendiculaire à la ligne qui divise en deux également l'angle des deux droites, la question sera de mener à la surface un plan tangent parallèle à ce plan-là (*fig.* 2).

Que l'on recherche sur l'horizon le plan projetant (LL', S) de la droite parallèle au rayon de lumière, en faisant tourner ce plan autour de sa trace horizontale

(*) Voyez dans la Correspondance de l'École polytechnique, t. Ier, n° 8, p. 295 à 305 (1807), le mémoire publié par Monge et Hachette sur les points brillants. La solution du problème des points brillants y est donnée d'une manière complète ; il n'y a rien à y ajouter. T. O.

LL', la figure montre d'elle-même que L'*l*L, Q*ll'* et *i*OP seront les deux droites dont on a parlé et celle qui divisait leur angle en deux également ramenés sur l'horizon. *i*O et SL' seront donc les projections de cette sécante considérée dans sa vraie position. Le plan qui lui est perpendiculaire et qui passe par le point (O-S) aura pour trace horizontale FG perpendiculaire à *i*O, et menée par le point *x*, qu'on détermine en tirant SX perpendiculaire à SL' et X*x* perpendiculaire à TT' (*). Actuellement, si l'on décrit du centre O le cercle GHI tangent à FG, et que par le point *a* on lui mène la tangente *a*H, cette tangente sera évidemment parallèle à la trace horizontale du plan qui passerait par la position primitive OA de la génératrice et qui aurait la même inclinaison que le plan dont la trace est FG. Or (n° 14) la perpendiculaire *dn* à *a*H, coupe OA en un point *q*, qui est la projection du point du contact de la surface et du plan passant par la position primitive de la génératrice, donc la projection du point brillant, qui se trouve déjà sur la position qu'aura prise la projection de la génératrice, et qui doit être encore sur le cercle décrit du centre O et avec le rayon O*q*, sera au point d'intersection de ce cercle et de la ligne.

26. L'angle du plan tangent à la surface avec l'horizon décroît, à mesure que le point de contact s'éloigne de l'axe; mais il ne décroît pas indéfiniment, et il a pour limite l'inclinaison de la génératrice. Il suit de là que la direction du rayon de lumière peut être telle que la surface ne présente pas de point brillant. Cela arrivera lorsque le plan auquel doit être parallèle le plan tangent ci-dessus, fera avec l'horizon un angle moindre que celui de la génératrice, et l'on s'en apercevra à ce que la construction conduira à mener une tangente à un cercle par un point pris au dedans de ce cercle.

27. Choix de la direction du rayon lumineux pour qu'il y ait :

1° Séparation d'ombre et de lumière sur la face inférieure du filet ou sur la face supérieure ou bien sur l'une et l'autre;

2° Point brillant sur l'une ou l'autre face.

(*) TT' est la ligne de terre.

N° 4.

PROBLÈME D'OMBRE.

Construction de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface hélicoïdale générale (*).

Nous diviserons ce mémoire en quatre parties :

Dans la première partie, nous exposerons quelques propriétés nouvelles des paraboloïdes hyperboliques, propriétés utiles pour la recherche de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface hélicoïde générale, en la supposant éclairée soit par un *rayon* lumineux, soit par un *point* lumineux.

Dans la deuxième partie, nous construirons graphiquement cette ligne de séparation d'ombre et de lumière, en supposant la surface éclairée par un *rayon* de lumière.

Dans la troisième partie, nous donnerons la construction de divers compas propres à tracer, d'un mouvement continu, la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, dans tous les cas; ainsi : 1° suivant que la génératrice droite de la surface hélicoïde sera horizontale ou non, 2° suivant que cette génératrice droite coupera ou ne coupera pas l'axe, et 3° suivant que le *rayon* de lumière sera incliné au plan horizontal ou parallèle à ce plan.

Enfin, dans la quatrième partie, nous construirons graphiquement la ligne de séparation d'ombre et de lumière, en supposant la surface éclairée par un *point* lumineux.

PREMIÈRE PARTIE.

Nouvelles propriétés des paraboloïdes hyperboliques.

§ I.

On sait que si l'on a, dans un même plan, une suite de droites parallèles entre elles A, B, C, ... les divergentes d'un point *o* sont coupées en parties proportionnelles par ces parallèles, et que l'on a, fig. 1 :

$$oa : oa_1 : oa_2, \text{ etc.}, :: ob : ob_1 : ob_2, \text{ etc.}, :: oc : oc_1 : oc_2, \text{ etc.}, :: \text{etc.} \quad (1)$$

(*) J'ai composé ce mémoire d'après des notes écrites à Metz en 1819. T. O.

Cela posé :

Menons par le point a une droite arbitraire K et du point o comme centre et successivement avec ob, oc,... pour rayon décrit des cercles coupant cette droite K aux points b', c',... la droite ob' fera avec la droite oa un certain angle α, et la droite oc' fera avec la droite oa un certain angle б.

Cela posé :

Du point o comme centre et avec les rayons oa_1, oa_2,... décrivons des cercles coupant la divergente oa, en les points a'_1, a'_2,... et menons par ces points des droites K_1, K_2,... parallèles entre elles et à la droite K.

Cela posé :

Du point o comme centre et avec ob_1, oc_1,... comme rayons, décrivons des cercles venant couper la droite K_1 en les points b''_1, c''_1...

Du même point o comme centre et avec ob_2, oc_2,... comme rayons, décrivons des cercles venant couper la droite K_2 en les points b''_2, c''_2...

Je dis que les points b', b''_1, b''_2,... sont en ligne droite, ainsi que les points c', c''_1, c''_2,... Cela est évident, en vertu des proportions (1) et de la construction.

Par conséquent, si je fais tourner la droite oa, 1° d'un angle δ pour la ramener sur oa_1, et 2° d'un angle γ pour la ramener ensuite sur oa_2, l'on aura la fig. 2.

Et les points b', b'''_1, b'''_2,... seront en ligne droite B_1, et les points c', c'''_1, c'''_2... seront aussi en ligne droite C_1, car il est évident, par la figure, que l'on obtiendrait les mêmes points en supposant que l'on fasse tourner la droite B d'un angle α autour du point o, et que l'on fasse tourner la droite C d'un angle б autour du même point o.

Les droites A, B_1, C_1,... font le même angle λ et respectivement avec les divergentes oa, ob', oc'_1,... et les droites K, K'_1, K'_2,... font le même angle μ avec les divergentes oa, oa_1, oa_2,... en sorte que les droites A, B_1, C_1... sont les *enveloppées* d'une certaine courbe Δ, et les droites K, K_1', K_2', ... sont les *enveloppées* d'une certaine courbe Φ.

Nous verrons plus loin que ces courbes Δ et Φ ne sont qu'une seule et même *parabole*.

Il est évident par la construction, et en vertu des proportions (1), que l'on aura :

$$\frac{ab'}{oa}=\frac{a_1b_1'''}{oa_1}=\frac{a_2b'''_2}{oa_2}=\ldots$$

et

$$\frac{ac'}{oa}=\frac{a_1c'''_1}{oa_1}=\frac{a_2c}{oa_2}=\ldots$$

§ II.

Les figures 1 et 2 peuvent être considérées comme les projections orthogonales de divers *systèmes* de l'espace ; passons donc de ce qui est sur le *plan* à ce qui peut exister dans l'*espace*.

§ III.

Premier système de l'espace.

Considérons la figure 2 comme la projection horizontale d'un certain système de droites situées dans l'espace ; ainsi élevons par le point o une verticale O, menons (*fig.* 3) par les droites parallèles A^h, B^h, C^h,... des plans verticaux P, Q, R... et concevons une série des droites horizontales G, G′, G″,... s'appuyant sur la droite O et sur une droite A tracé dans le plan P. Les plans Q, R,... couperont ces droites G, G′, G″,... en des points qui détermineront respectivement les droites B, C,...

En sorte que l'on aura dans l'espace un paraboloïde hyperbolique rectangulaire Σ, ayant pour premier système de génératrices droites, les droites G, G′, G″,... dont le plan directeur sera le plan horizontal de projection, et ayant pour deuxième système de génératrices droites, les droites A, B, C,... dont le plan directeur sera le plan vertical de projection, puisque dans la fig. 3 nous avons pris la ligne de terre LT parallèle aux lignes A^h, B^h, C^h,...

Cela posé :

Faisons tourner la droite B d'un angle α autour de l'axe O et la droite C d'un angle β autour de même axe O, ces angles α, β,... étant tels que les points a, b_1^h, c_1^h,... soient en ligne droite K^h. Il est évident que les points b_1^v, c_1^v,... seront situés sur la droite G^v ; dès lors si nous menons par le point a'^h une droite K'^h faisant avec $o^h a'^h$ un angle μ égal à celui que font entre elles les deux droites $o^h a^h$ et K^h, les points $b_1'^v$, $c_1'^v$,... seront sur G'^v, et ainsi de suite.

En sorte que l'on voit très-bien : 1° que les droites horizontales G, G′, G″,... se seront transformées en les droites horizontales K, K′, K″,... et 2° que les droites A, B, C,... se seront transformées en les droites A, B_1, C_1,... Les droites A, B, C,... étaient parallèles au plan vertical de projection, mais les droites A, B_1, C_1,... ayant pour projections horizontales des droites A^h, B_1^h, C_1^h,... qui ne sont pas parallèles entre elles, ne seront pas, dès lors, parallèles à un plan vertical.

Mais comme les droites horizontales K, K′, K″,... sont coupées en parties pro-

portionnelles entre elles par les droites A, B_1, C_1,... puisque l'on a évidemment dans la fig. 3 et en vertu de la fig. 2 :

$$a^h b_1^h : a'^h b_1'^h : a''^h b_1''^h : \text{etc.} :: a^h c_1^h : a'^h c_1'^h : a''^h c_1''^h : \text{etc.}$$

Il s'ensuit que la surface Σ_1 doublement réglée et ayant les droites K, K', K'',... pour génératrices du premier système et les droites A, B_1, C_1,... pour génératrices du second système, sera un paraboloïde hyperbolique oblique, ayant le plan horizontal de projection, pour l'un de ses plans directeurs.

Cela posé :

Comme lorsque l'on considère un cylindre tangent à un paraboloïde hyperbolique, la courbe de contact est une parabole Δ, les droites A^h, B_1^h, C_1^h,... et les droites K^h, K'^h, K''^h,... seront tangentes à la parabole Δ^h projection horizontale de la parabole Δ, qui est la courbe de contact de la surface Σ_1 avec un cylindre dont les génératrices droites seraient verticales et seraient dès lors parallèles à l'axe O.

§ IV.

I. D'après ce qui a été démontré dans le § III précédent, on peut énoncer les deux *théorèmes* suivants :

1er THÉORÈME.

Ayant une droite A et un point *o* (situés sur un plan P), si l'on mène du point *o* une série de divergentes *os*, *os'*, *os''*,... coupant la droite A, aux points *s*, *s'*, *s''*,... et si l'on mène par chacun de ces points *s*, *s'*, *s''*,... des droites A', A'', A''',... qui fassent chacune et respectivement avec la divergente qui lui correspond (*fig.* 4) un angle α, les diverses droites A, A', A'', A''',... seront les *enveloppées* d'une parabole δ (ou en d'autres termes seront les *tangentes* d'une parabole δ).

2e THÉORÈME.

Étant donnés une parabole δ, son sommet *s* et sa tangente A en son sommet, si l'on prend sur la tangente A une suite de points *s'*, *s''*, *s'''*, et que par chacun d'eux on mène une tangente à la courbe δ, on obtiendra les droites A', A'', A''',... (*fig.* 5), et menant par chacun des points *s'*, *s''*, *s'''*,... une perpendiculaire à la tangente qui passe par le point considéré, on aura une série de droites qui se couperont toutes en un même point *o* situé sur l'axe infini *s*X de la parabole donnée δ.

II. Nous pouvons encore déduire de ce qui précède diverses propriétés dont jouit la parabole.

Ainsi (*fig.* 5 *bis*), nous savons qu'étant donné un point o et une droite A, si nous menons la divergente op coupant la droite fixe A au point p et si par le point p nous menons une droite θ faisant avec op un angle arbitraire μ, cette droite θ sera tangente à une parabole δ, laquelle sera tangente à la droite A en un point a déterminé par la divergente oa faisant avec la droite fixe A un angle μ.

Et si l'on fait varier l'angle μ de grandeur, on obtiendra toujours une parabole, mais qui sera différente de la parabole δ.

En sorte qu'à chaque valeur attribuée à l'angle μ correspondra une parabole particulière, laquelle aura un point de contact particulier avec la droite A.

Ainsi, le point o et la droite A étant donnés de position, en faisant varier l'angle μ, on aura :

Pour μ_1 une parabole δ_1 tangente en un point a' de la droite A.

Pour μ_2 une parabole δ_2 tangente en un point a'' de la droite A.

Et ainsi de suite.

Nous pouvons donc conclure de ce qui précède, ce qui suit :

Étant donnée une parabole δ et une tangente A à cette courbe, si l'on mène à cette courbe δ, une suite de tangentes θ, θ', θ'',... coupant la droite A aux points p, p', p'',... et si l'on mène par chacun des points p, p', p'',... des droites D, D', D'',... faisant chacune avec la tangente θ... qui lui correspond un angle constant μ, ces droites D, D', D'',... ne concourront en un même point o qu'autant que l'angle μ aura une valeur particulière. (En un mot l'angle μ ne peut être arbitraire.)

III. Si l'on a une parabole δ, construite au moyen du point o et de la droite fixe A, et d'une série de tangente θ... faisant avec les divergentes op, qui leur correspondent, un angle constant μ, nous pouvons considérer le quadrilatère *paom*, dont les sommets sont, l'un le point o donné, l'autre le point p en lequel une tangente θ coupe la droite A, et les deux autres les points a et m contacts respectifs de la parabole δ avec les droites A et θ, et remarquer :

Que $\overline{oa}$ fait un angle μ avec la droite A (*fig.* 5 *bis*).

Que $\overline{op}$ fait le même angle μ avec la droite θ.

Et ces deux angles égaux μ sont dirigés dans le même sens (à droite).

Que $\overline{om}$ fait un angle λ avec la droite θ.

Que $\overline{op}$ fait le même angle λ avec la droite A.

Et ces deux angles égaux λ sont dirigés dans le même sens (à gauche).

Les quatre angles d'un quadrilatère valent en somme quatre angles droits, on aura donc :

$$\widehat{aom} = \widehat{4.\text{droits}} - \widehat{2(\mu + \lambda)}.$$

Mais, si nous examinons les deux triangles *oap* et *opm*, nous voyons qu'ils sont semblables, puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun et que par conséquent le troisième angle est égal de part et d'autre. Nous aurons donc :

$$\widehat{aop} = \widehat{pom}$$

et

$$\frac{\overline{ao}}{\overline{ap}} = \frac{\overline{om}}{\overline{pm}}$$

IV. D'après ce qui précède le point *o* étant un point unique pour chaque parabole, il est de quelque intérêt géométrique de savoir quelle position ce point *o* occupe par rapport à la parabole.

D'après ce qui précède, il est évident que pour déterminer la position du point *o* nous pouvons prendre une tangente quelconque, et ainsi celle qui a pour point de contact le sommet de la parabole. Or (*fig.* 5 *ter*), étant donnés une parabole δ', son sommet *s* et son foyer *f*, nous savons que si l'on abaisse du foyer *f* des perpendiculaires sur les diverses tangentes θ... de cette parabole δ', les pieds *p*... de ces perpendiculaires (ou normales) sont sur la tangente A menée au sommet *s* de cette parabole δ'.

Par conséquent, pour cette position toute particulière de la droite A, l'angle μ est droit.

Nous pouvons donc conclure de ce qui précède que le point *o* en lequel concourrent les droites *op*, *op'*... (*fig.* 5 *bis*), est toujours le foyer de la parabole δ.

V. Ce qui précède nous permet de résoudre divers problèmes.

1er PROBLÈME.

Étant donnés une droite A, *un point* a *sur cette droite* A *et un point* f *hors de cette droite* A (fig. 5. 4°), *construire la parabole* δ, *tangente en* a *à la droite* A *et ayant le point* f *pour foyer*.

Solution. On mènera la droite $\overline{fa}$, laquelle fera avec la droite A un angle connu μ; on prendra un point *p* sur la droite A et l'on mènera la droite *fp*; ensuite l'on mènera par le point *p* une droite θ, faisant avec $\overline{fp}$ un angle égal à l'angle μ ci-dessus : cette droite θ sera tangente à la parabole demandée.

On pourra donc construire les diverses tangentes θ... *enveloppées* de la parabole demandée δ.

Pour déterminer le point de contact *m* de la tangente θ avec la parabole de-

mandée δ, il faudra mener par le point f une droite fm, faisant avec fp un angle $\widehat{pfm}$ égal à l'angle connu $\widehat{pfa}$, et la droite fm coupera la droite θ en un point m, qui appartiendra à la parabole demandée δ; on pourra ainsi construire les divers points m... de la parabole demandée δ.

2e PROBLÈME.

Étant donnés un point f *et deux droites* A *et* θ (fig. 5, 5°), *construire une parabole ayant le point* f *pour foyer et les droites* A *et* θ *pour tangentes.*

Solution. Les deux droites A et θ se coupent au point p. J'unis les points f et p, et je désigne par μ l'angle $\widehat{fpm}$ et par λ l'angle $\widehat{fpa}$.

Je mène par le point f une droite fa, faisant avec la droite A l'angle μ; je mène par le point f une droite fm, faisant avec la droite θ l'angle λ; si l'angle $\widehat{afm}$ est divisé en deux parties égales par la droite fp, il existera une parabole ayant le point f pour foyer et étant respectivement tangente en a et en m aux droites données A et θ.

3e PROBLÈME.

Etant donnés deux droites A *et* θ *et un point* a *sur la droite* A, *construire une parabole ayant la droite* θ *pour tangente et étant tangente en* a *à la droite* A (fig. 5, 5°).

Solution. Il est évident que le problème sera résolu, si l'on construit le foyer de la parabole demandée.

Par le point p, en lequel se coupent les droites données A et θ, je mène une droite arbitraire pf faisant un angle arbitraire μ avec θ et un angle λ (qui est dès lors connu) avec A.

Par le point a je mène une droite af faisant le même angle μ avec la droite A, et j'obtiens, par l'intersection des droites af et pf, le foyer f de la parabole demandée.

Je puis ensuite mener par le foyer f une droite fm faisant avec pf un angle égal à l'angle $\widehat{afp}$, et j'obtiendrai le point m, contact de la parabole demandée avec la droite donnée θ.

Il est évident que le problème a une infinité de solutions. On peut donc se proposer le problème suivant.

4e PROBLÈME.

On demande le lieu des divers foyers f *des diverses paraboles ayant les droites* A *et* θ *pour tangentes communes et qui seront tangentes entre elles au point* a.

Solution. Je mène par le point p, en lequel se coupent les droites données A et θ (*fig.* 5, 6°), une droite arbitraire pf, laquelle divise l'angle γ que font entre elles les droites A et θ en deux angles inégaux et arbitraires μ et λ. Par le point a je mène une droite af faisant avec la droite A un angle égal à μ; cette droite af coupe la droite pf en un point f, qui est le foyer de l'une des paraboles.

Or, dans le triangle paf, l'angle $\widehat{afp}$ sera constant, puisque l'on aura toujours $\widehat{fap} + \widehat{fpa} = \hat{\gamma}$.

Le point f sera donc sur une circonférence de cercle décrite sur ap comme corde, puisqu'il suffira pour trouver le *lieu* des foyers f de construire sur ap un segment capable de l'angle $(180° - \gamma)$.

5° PROBLÈME.

Étant donnés 3 *points* a, b, *et* p (*non en ligne droite*), *on demande de placer le sommet* s *et de déterminer l'amplitude de l'angle dont les côtés passeront respectivement par les points* a *et* b *et dont la bissectrice passera par le point* p.

Solution. En joignant le point p aux points a et b on aura (*fig.* 5, 6°) un angle $\widehat{apb}$ que je désigne par μ; l'angle cherché étant désigné par 2α, on aura : $\hat{\alpha} = \widehat{180° - \mu}$.

Sur $\overline{ap}$ je construirai un *segment* capable de l'angle α;

Sur $\overline{bp}$ je construirai un *segment* capable du même angle α;

Ces deux *segments* se couperont en un point s qui sera le point demandé.

Nota. D'après ce qui a été dit ci-dessus on voit de suite que l'on pourra construire une parabole δ, qui ayant le point s pour foyer, sera tangente en a et b aux droites $\overline{ap}$ et $\overline{bp}$.

REMARQUE. Il est évident que les quatre points a, b, p et s ne pourront dans aucun cas être situés sur une même circonférence de cercle.

§ V.

Deuxième système de l'espace.

Étant donné en projection horizontale le système de droites représenté en la figure 2, nous pourrons concevoir par le point o une verticale O, et élever des plans verticaux par les diverses droites, A, B, C,... A_1, B_1, C_1,... K, K_1', K_1',...

Cela posé :

Concevons dans l'espace un plan oblique P, coupant (*fig.*6) l'axe O en un point

s, ce plan P sera coupé par les plans verticaux menés par les droites A^h, B^h, C^h,... suivant des parallèles A, B, C,... qui se projetteront verticalement suivant des droites parallèles A^v, B^v, C^v,... et si par l'axe O et par chacune des divergentes G^h, G'^h, G''^h,... on fait passer des plans, ils couperont le plan P, suivant des droites G, G′, G″,... qui divergeront du point s et qui se projetteront verticalement en G^v, G'^v, G''^v,... lesquelles droites divergeront du point s^v.

Cela posé :

Dans la fig. 2, pour passer (sur le plan) de la droite B à la droite B_1 on fait tourner la droite B d'un angle α autour du point o, pour passer de la droite C à la droite C_1 on fait tourner la droite C d'un angle β autour du point o, et ainsi de suite; donc pour passer de B^h à B_1^h, de C^h à C_1^h,... on fera tourner (*fig.* 6) la droite B (situé dans l'espace) d'un angle α autour de l'axe O, la droite C *de l'espace* d'un angle β autour de l'axe O, et ainsi de suite.

Les droites A, B_1, C_1,... *de l'espace* formeront donc une surface *réglée*, une surface gauche; mais les points b, c,... sont sur une droite G qui fait avec l'axe O un certain angle γ.

Quand la droite B tournera de l'angle α autour de l'axe O, le point b décrira un arc horizontal i mesurant l'angle α.

Quand la droite C tournera de l'angle β autour de l'axe O, le point c décrira un arc horizontal l mesurant l'angle β.

Et ainsi de suite.

Or ces points b, c,... étant sur la droite G, il s'en suit que les arcs i, l,... sont les sections droites du cône droit Δ décrit par la droite G autour de l'axe O.

Par conséquent le plan vertical mené par la droite K^h coupera le cône Δ suivant une hyperbole dont les asymptotes feront entre elles un angle qui sera double de l'angle γ que la droite G fait avec l'axe O.

Ainsi le système de droites parallèles A, B, C,... situées dans le plan P, se trouvera déformé et amené au système des droites A, B_1, C_1,... génératrices d'une surface gauche qui est coupée par chacun des plans verticaux menés par les droites K^h,... suivant une hyperbole K. On obtiendra ainsi par les hyperboles K, K′,... le second mode de génération de la surface gauche en laquelle le plan P se trouve transformé.

§ VI.

D'après ce qui précède on peut énoncer le *théorème* suivant :

THÉORÈME.

Ayant un point s dans l'espace et une droite A, si l'on prend sur la droite A

une suite de points $a, a', a'', a''',...$ et qu'on les joigne respectivement au point s, par des droites G, G′, G″, G‴,... si l'on mène par le point s une droite O de direction arbitraire, si l'on mène par les points $a, a', a'', a''',...$ des plans M, M′, M″, M‴,... parallèles à la droite O et faisant un même angle γ et respectivement avec les plans (O, G), (O, G′), (O, G″),... ces plans M, M′, M″,... couperont, suivant des hyperboles K, K′, K″,... et respectivement, les cônes Δ, Δ′, Δ″,... engendrés par la rotation, autour de l'axe O, des droites G, G′, G″,...

Ces diverses hyperboles K, K′, K″,... détermineront une surface *réglée*. Ainsi, la droite A, en se mouvant sur trois de ces hyperboles, s'appuiera sur toutes les hyperboles construites ainsi qu'il vient d'être dit.

§ VII.

Troisième système de l'espace.

Étant données une parabole δ et ses diverses tangentes $\theta, \theta', \theta'', \theta''',...$ les points de contact étant respectivement $m, m', m'', m''',...$, on sait que l'on peut considérer la droite θ comme la projection d'une droite T de l'espace passant par le poit m, et considérer les droites $\theta', \theta'', \theta''',...$ comme les projections d'une suite de droites T′, T″, T‴,... s'appuyant sur la droite T et sur la parabole δ.

La série des droites T, T′, T″, T‴,... forme un paraboloïde hyperbolique Σ; en faisant varier l'angle que la droite T fait avec sa projection θ, on fera varier dans l'espace la position des droites T′, T″, T‴,... et l'on obtiendra un nouveau paraboloïde Σ′.

Les deux paraboloïdes Σ et Σ′ auront en commun la *parabole* δ et se toucheront suivant cette courbe.

On peut donc construire une infinité de paraboloïdes hyperboliques Σ, Σ′, Σ″, Σ‴,... en contact par la parabole δ, et dont les génératrices droites des deux systèmes se projetteront sur le plan de la courbe δ, suivant un même système de droites, savoir : les tangentes à la courbe δ.

Au lieu de faire varier la droite T de position dans l'espace, on peut varier le plan de la courbe δ.

Ainsi, concevons un cylindre Δ ayant la parabole δ pour section droite, et menons par les points $m, m', m'', m''',...$ les génératrices droites M, M′, M″, M‴,... du cylindre Δ.

Menons par le point m une droite T arbitraire, mais ayant la droite θ pour projection orthogonale sur le plan de la courbe δ (plan que nous prenons pour plan horizontal de projection).

Cela posé :

Faisons passer par le point m une suite de plans Q', Q'', Q''',... coupant le cylindre Δ, suivant des paraboles δ', δ'', δ''',... lesquelles courbes se projettent orthogonalement suivant la même parabole δ.

Le plan Q' coupera les génératrices M, M', M'',... en des points m, m_1', m_1'',...

Le plan Q'' coupera les mêmes génératrices en des points m, m_2', m_2''...

Et ainsi de suite.

On pourra donc concevoir une surface engendrée par une droite, s'appuyant sur la droite T et sur la parabole δ', et se projetant pendant son mouvement, suivant les tangentes de la courbe δ; on aura ainsi un paraboloïde hyperbolique Σ_1.

Si l'on suppose que la droite mobile, tout en s'appuyant sur la même droite T, s'appuie sur la parabole δ'', les projections de ses diverses positions étant toujours les diverses tangentes de la parabole δ, on aura un second paraboloïde hyperbolique Σ_1'.

Les deux paraboloïdes Σ_1 et Σ_1' se couperont suivant la droite T, on pourra donc construire une infinité de paraboloïdes Σ_1,... se coupant suivant la droite T, et dont les génératrices droites des deux systèmes se projetteront orthogonalement suivant les tangentes de la parabole δ.

§ VIII.

Nous savons (*fig.* 2) que les droites A, B_1, C_1, sont coupées en parties proportionnelles par les droites K, K_1', K_2', et *réciproquement* que les droites K, K_1', K_2' sont coupées en parties proportionnelles par les droites A, B_1, C_1; de plus nous savons que les droites K, K_1', K_2' font le même angle μ avec les divergentes oa, oa_1, oa_2.

Si donc (*fig.* 7) nous construisons les trois droites K^h, K'^h K''^h, faisant le même angle μ avec les divergentes oa^h, oa'^h, oa''^h, et si nous construisons les droites A, B^h, C^h, telles qu'elles coupent en parties proportionnelles les trois droites K^h, K'^h, K''^h, nous aurons sur le plan horizontal la projection des génératrices droites des deux systèmes d'une infinité de paraboloïdes hyperboliques Σ, Σ_1, Σ_2,... Proposons-nous de construire la projection verticale des deux systèmes de génératrices droites de l'un de ces paraboloïdes.

Pour cela, il suffira de construire trois droites A^v, B^v, C^v et trois droites K^v, K'^v, K''^v, se coupant respectivement en parties proportionnelles; la construction suivante satisfait à cette condition.

Menons A^v arbitrairement.

Projetons verticalement les points a, a', a'', en a^v, a'^v, a''^v sur A^v.

Menons une droite B^v parallèle à A^v, et à une distance arbitraire de A^v.

Projetons verticalement les points b, b', b'' en b^v, b'^v, b''^v sur B^v.

Joignons a^v et b^v, nous aurons K^v.

Joignons a'^v et b'^v, nous aurons K'^v.

Joignons a''^v et b''^v, nous aurons K''^v.

Cela fait :

Projetons verticalement les points c et c' en, c^v sur K^v et c'^v sur K'^v; joignons c^v et c'^v, nous aurons la droite C^v, qui évidemment sera parallèle aux droites A^v et B^v.

Et si nous projetons verticalement le point c'', évidemment c''^v sera à l'intersection des droites K''^v et C^v.

Il est évident que la construction que nous venons d'effectuer nous conduit à trois droites *divergentes* K^v, K'^v, K''^v, et à trois droites *parallèles* A^v, B^v, C^v, qui se coupent respectivement en parties proportionnelles.

Les trois droites A^v, B^v, C^v étant parallèles, les trois droites K^v, K'^v, K''^v concourent en un point o', qui sera situé à distance *finie* ou *infinie*, suivant les données graphiques.

Ainsi les droites K, K′, K″ et A, B, C seront les génératrices droites, savoir : les premières du premier système, les secondes du deuxième système d'un paraboloïde hyperbolique Σ.

De ce paraboloïde Σ nous pourrions passer à un autre paraboloïde Σ_1, dont les génératrices droites auraient les mêmes projections horizontales que celles du paraboloïde Σ.

Et en effet :

Il suffit d'exécuter la construction suivante :

Les droites B^v et C^v coupent les lignes de projection menées des points a^h, a'^h, a''^h en les points p, p', p'' et q, q', q''.

Si l'on mène donc par le point p une droite J arbitraire, et par le point q une parallèle J′ à cette droite J, en projetant verticalement les points b en b_1^v sur J et c en c_1^v sur J′, les trois points a^v, b_1^v, c_1^v seront évidemment en ligne droite K_1^v.

Si l'on mène par le point p' une droite arbitraire I, et par le point q' une parallèle I′ à I, en projetant verticalement les points b' en $b_1'^v$ sur I et c' en $c_1'^v$ sur I′, les trois points a'^v, $b_1'^v$, $c_1'^v$ seront évidemment en ligne droite $K_1'^v$.

Cela fait :

Unissons les points b_1^v et $b_1'^v$, nous aurons la droite B_1^v;

Unissons les points c_1^v et $c_1'^v$, nous aurons la droite C_1^v;

Et si nous projetons verticalement les points, b'' en $b_1''^v$ sur B'^v et c'' en $c_1''^v$ sur

C_1^v, il est encore évident que les trois points a''^v, b''^v_1, c''^v_1 seront en ligne droite K''^v_1.

Nous aurons donc en K_1^v, K'^v_1, K''^v_1 et en A^v, B_1^v, C_1^v les projections verticales de six génératrices droites (trois du premier système et trois du deuxième système) appartenant à un nouveau paraboloïde Σ_1, ayant même projection horizontale que le paraboloïde Σ.

Nous pourrons donc construire la projection verticale d'une infinité de paraboloïdes Σ, Σ_1, Σ_2,... ayant tous même projection horizontale.

§ IX.

Concevons dans l'espace (*fig.* 8) un paraboloïde hyperbolique Σ, les droites A, B, C étant les génératrices droites du premier système, les droites K, K′, K″ étant les génératrices droites du second système de cette surface.

Menons par la génératrice A un plan P, et traçons dans ce plan, par les points a, a', a'' de la droite A, les droites parallèles entre elles Q, Q′, Q″.

Traçons enfin dans le plan P une droite Z parallèle à la droite A et coupant les droites Q, Q′, Q″ aux points p, p', p''.

Joignons les points p et b, nous aurons la droite J.

Joignons les points p' et b', nous aurons la droite I.

Joignons les points p'' et b'', nous aurons la droite U.

Menons par les points c, c', c'' de la génératrice C des droites J′ parallèle à J, I′ parallèle à I, U′ parallèle à U, ces droites couperont les droites Q, Q′, Q″ en les points q, q', q'', qui seront sur une droite Z′ située dans le plan P et parallèle aux droites A et Z.

Cela fait :

Menons par les points b, b', b'' de la génératrice droite B des parallèles aux droites Q, Q′, Q″, elles couperont les droites J′, I′, U′ en les points b_1, b_1', b_1'', lesquels seront en ligne droite B_1 parallèle à B.

Cela posé :

Les droites Z′, B_1, C seront les génératrices du second système d'un paraboloïde Φ dont les génératrices du premier système seront les droites J′, I′, U′; et cela est évident par la figure, car il est évident que ces six droites se coupent en parties proportionnelles.

Cela dit :

On sait que si l'on projette sur un plan P les génératrices droites J′, I′, U′ d'un même système d'un paraboloïde Φ, si deux des projections sont parallèles entre elles, toutes les autres le seront :

En sorte que si J'^v et I'^v sont parallèles U'^v sera parallèle à J'^v et à I'^v.

Par conséquent, si dans la fig. (7) les droites $\overline{pb_1^v}$ et $\overline{p'b_1'^v}$ étaient parallèles entre elles, la droite $\overline{p''b''^v}$ leur aurait été parallèle.

Et comme l'on peut donner à la droite $\overline{pb_1^v}$ toute direction, on aurait pu la prendre perpendiculaire à la ligne projetante $a^v a^h$, ou en d'autres termes, on aurait pu la prendre horizontale.

§ X.

En résumant tout ce qui précède, on voit que l'on aura un paraboloïde hyperbolique Σ, fig. 9. (Ayant, par l'une de ses génératrices droites A du deuxième système, mené un plan vertical P) :

Si 1° l'on projette les génératrices droites K, K', K'' du premier système sur le plan horizontal, et que les projections K^h, K'^h, K''^h fassent un angle constant μ avec des divergentes émanant d'un certain point o^h, et aboutissant respectivement aux points a^h, a'^h, a''^h, projections horizontales des points a, a', a'', en lesquels la droite A est coupée respectivement par les droites K, K', K'';

Si 2° l'on prend sur K^h la longueur $\overline{a^h b^h}$ proportionnelle au rayon $\overline{o^h a^h}$, sur K'^h la longueur $\overline{a'^h b'^h}$ proportionnelle au rayon $\overline{o^h a'^h}$, sur K''^h la longueur $\overline{a''^h b''^h}$ proportionnelle au rayon $\overline{o^h a''^h}$, les trois points b^h, b'^h, b''^h seront en ligne droite B^h, laquelle droite sera la projection d'une génératrice B du deuxième système du paraboloïde Σ;

Si 3° Ayant construit la projection B^v de la droite B, ou même des horizontales par les points b^v, b'^v, b''^v, elles coupent les lignes projetantes $a^v a^h$, $a'^v a'^h$, $a''^v a''^h$ en des points p^v, p'^v, p''^v qui seront sur une droite Z^v parallèle à A^v;

Dès lors, les droites de l'espace bp, $b'p'$, $b''p''$ seront les sous-tangentes des droites K, K', K'' pour une même hauteur z, mesurant verticalement la distance des deux droites A et Z, lesquelles sont parallèles entre elles et situées dans le plan P.

Et *réciproquement*,

Si l'on a une surface Φ formée par une suite de droites K, K', K'', s'appuyant sur une droite A, et dont les projections horizontales K^h, K'^h, K''^h font, avec les divergentes $\overline{o^h a^h}$, $\overline{o^h a'^h}$, $\overline{o^h a''^h}$, un angle constant μ, et si pour une même hauteur z les sous-tangentes $\overline{pb}$, $\overline{p'b'}$, $\overline{p''b''}$ sont proportionnelles aux rayons $\overline{o^h a^h}$, $\overline{o^h a'^h}$, $\overline{o^h a''^h}$, les extrémités b, b', b'' de ces sous-tangentes seront en ligne droite B, et la surface Φ ne sera autre qu'un paraboloïde hyperbolique.

§ XI.

En vertu de ce qui précède, il nous sera facile de démontrer que si l'on a une droite A tournant autour d'un axe O, de manière que chacun de ses points décrive une hélice cylindrique circulaire ayant la droite O pour axe, *les tangentes menées aux diverses hélices en les points où elles coupent la droite* A, *forment un paraboloïde hyperbolique.*

En effet :

Par son mouvement, la droite A engendre une surface hélicoïde générale. Dans son mouvement, la droite A reste tangente à un cylindre Δ, ayant pour section droite un cercle ayant pour rayon la plus courte distance R existant entre les droites O et A, et ce cylindre Δ a la droite O pour axe de révolution.

Le pied m de la plus courte distance R sur la droite A décrit une hélice H sur le cylindre Δ, et tous les les points m', m'', m''',... de la droite A décrivent des hélices H', H'', H'''... concentriques à H et ayant même *pas* h que cette hélice.

Cela posé :

Faisons une projection horizontale de tout le système, et désignons par H l'hélice décrite par le point m de la droite A, par R son *rayon*, par θ sa tangente au point m et par h son *pas*, fig. 10.

Nous aurons de même l'hélice H'; son *rayon* sera R', sa tangente sera θ', et elle aura même *pas* h.

Et ainsi de suite.

Pour une hauteur h, la sous-tangente sera $2\pi R$ pour l'hélice H, $2\pi R'$ pour l'hélice H', $2\pi R''$ pour l'hélice H'' et ainsi de suite.

Cela posé:

La figure 10 nous montre que les droites θ, θ', θ''... qui forment une certaine surface réglée Φ, se projettent en des droites θ^h, θ'^h, θ''^h, ... qui font le même angle μ (angle qui est ici droit) avec les divergentes ou *rayons* R, R', R''...

Ensuite le calcul relatif aux sous-tangentes nous démontre que pour une même hauteur h (et h est ici ce que nous avions précédemment désigné par z) ces sous-tangentes sont proportionnelles aux *rayons* R, R', R''...

En sorte que si l'on prend $\overline{m^hb^h} = 2\pi R$, $\overline{m'^hb'^h} = 2\pi R'$, $\overline{m''^hb''^h} = 2\pi R''$, ... les points b^h, b'^h, b''^h,... seront en ligne droite B^h; ce qui, en vertu de ce qui a été dit (§ X), nous démontre que les extrémités b, b', b'', ... des sous-tangentes seront en ligne droite B, cette droite s'appuyant sur toutes les droites θ, θ', θ'', ...

Et comme nous pouvons prendre une autre hauteur $\frac{h}{2}$, auquel cas les sous-

tangentes seront $\frac{2\pi}{\alpha}$ R, $\frac{2\pi}{\alpha}$ R′, $\frac{2\pi}{\alpha}$ R″, ... et dès lors seront encore proportionnelles aux rayons R, R′, R″, ... on voit que les points c^h, c'^h, c''^h, ... que l'on construira en employant ces nouvelles sous-tangentes, détermineront une droite C^h qui sera la projection d'une droite C s'appuyant sur toutes les droites θ, θ', θ'' ...

Ainsi se trouve démontré que la surface Φ, lieu des tangentes θ, θ', θ'', ... aux diverses hélices H, H′, H″ ... est un paraboloïde hyperbolique.

§ XII.

Ainsi, le théorème que nous connaissions déjà, savoir : que les tangentes aux diverses hélices de la surface hélicoïde gauche Σ, filet de vis carrée ou filet de vis triangulaire, en les points où elles coupent une même génératrice droite G (de cette surface gauche) déterminent un paraboloïde hyperbolique tangent à la surface hélicoïde Σ tout le long de la génératrice droite G ; ainsi, dis-je, ce théorème est général et appartient à toutes les surfaces hélicoïdes gauches.

Et en vertu de ce qui a été dit (§III), on voit que si l'on projette sur un plan Y perpendiculaire à l'axe O du cylindre Δ, auquel la droite A reste tangente pendant son mouvement hélicoïdal, les tangentes aux diverses hélices de même *pas*, décrites par les divers points de la droite A, on voit, dis-je, que les projections de ces tangentes seront les *enveloppées* d'une parabole ayant pour *foyer* le point en lequel l'axe O est coupé par le plan Y, et ayant pour tangente en son sommet la projection de la droite A.

§ XIII.

Dans tout ce précède, nous avons supposé (*fig.* 2), que le point *o* était situé hors de la droite A ; mais s'il était placé (*fig.* 11) sur la droite A, alors les droites K, K_1, K_2 seraient parallèles et feraient avec la droite A un angle constant μ, qui pourrait être aigu ou droit.

Dans ce cas, les droites B_1, C_1, ... qui devraient partager en parties proportionnelles les droites K, K_1, K_2, ... iraient concourir en un point *unique*, qui ne serait autre que le point *o*.

Si au contraire (*fig.* 12) on suppose que le point *o* est situé à l'infini sur la droite A, alors les droites A_1, C_1, ... seront parallèles entre elles et à la droite A.

§ XIV.

Si l'on passe des figures planes 11 et 12 aux systèmes de l'espace dont ces

figures peuvent être la projection horizontale, on voit de suite que la fig. 11 pourrait être considérée comme étant, ou 1° la projection d'une figure tracée dans un plan P oblique au plan horizontal, mais parallèle aux droites K, K_1, K_2... ou 2° la projection des génératrices droites des deux systèmes d'un paraboloïde hyperbolique Σ ayant le plan horizontal pour l'un de ses plans directeurs, l'autre plan directeur étant vertical et parallèle aux droites K, K_1, K_2, ...

On voit encore de suite que la fig. 12 pourra être considérée comme étant, ou 1° la projection d'une figure située dans un P parallèle au plan horizontal, ou 2° la projection des génératrices droites des deux systèmes d'un paraboloïde hyperbolique Σ, dont les deux plans directeurs sont verticaux, l'un étant parallèle aux droites K, K_1, K_2, ... l'autre étant parallèle aux droites A, B_1, C_2.

DEUXIÈME PARTIE.

Détermination de la courbe de séparation d'ombre et de lumière sur une surface hélicoïde générale.

§ I.

Soient donnés (*fig.* a) un axe vertical O et une droite A parallèle au plan vertical de projection, cette droite A faisant avec le plan horizontal un angle arbitraire 6.

Construisons la plus courte distance entre les droites O et A; $o^h m^h$ perpendiculaire à A^h sera la projection de cette plus courte distance; le point *m* sera le pied de cette plus courte distance sur la droite A; et cette plus courte distance étant horizontale, nous sera donnée en véritable grandeur en $o^h m^h$, *grandeur* que je désigne par R.

Cela posé :

Concevons un cylindre de révolution vertical Δ et ayant la droite O pour *axe*, et ayant pour *section droite* le cercle C du rayon R.

Cela posé :

Faisons décrire au point *m* une hélice H sur le cylindre Δ, et telle que ses tangentes fassent avec le plan horizontal un angle arbitraire α.

La droite A, en tournant autour de l'axe O (son point *m* décrivant une hélice H, et cette droite restant toujours tangente au cylindre Δ et faisant toujours avec l'axe O un angle constant complémentaire de l'angle 6) engendrera la surface hélicoïde gauche Σ, sur laquelle on se propose de déterminer la ligne de séparation d'ombre et de lumière, en supposant que cette surface est éclairée par un rayon

de lumière L, que nous ferons (pour plus de simplicité pour les constructions subséquentes) passer par le point m.

§ II.

Si l'on prend une suite de points m^h, m'^h,... sur la droite A^h, nous savons que les droites $m^h q$, $m'^h q'^h$,... respectivement perpendiculaires aux divergentes $o^h m^h$, $o^h m'^h$,... seront les projections horizontales des génératrices θ, θ',... du paraboloïde hyperbolique Φ, formé par les tangentes θ, θ',... aux diverses hélices H, H',... décrites par les points m, m'... de la droite A; et nous savons que ce paraboloïde Φ est tangent à la surface hélicoïde Σ tout le long de la droite A. Nous savons encore que si l'on mène dans le plan vertical passant par la droite A une droite Z parallèle à A et distante d'elle (verticalement) d'une hauteur $z = R \tan\alpha$ (h étant le pas commun des hélices H,H',...) les sous-tangentes seront respectivement égales aux rayons R, R',...

§ III.

D'après ce qui précède, nous pouvons exécuter les constructions suivantes :

1° Portons le rayon R de m^h en q.

2° Projetons le point q en q^v sur LT (ligne de terre).

3° Menons par le point q^v une droite θ^v, faisant avec LT l'angle donné α que les diverses tangentes θ, θ'... font avec le plan horizontal.

La droite θ^v coupera la projection O^v de l'axe O en un point m^v.

4° Menons par le point m^v une droite A^v faisant avec la ligne de terre LT l'angle donné 6.

5° Menons par m^v la droite L^v, et par le point m^h la droite L^h, nous aurons les projections de la direction de la *lumière*.

Et ainsi nous aurons établis les projections du *système* de la manière la plus simple pour la solution du *problème* proposé.

§ IV.

En vertu des données particulières de l'*épure*, et établies précédemment, le point q situé sur le plan horizontal est un point de la droite B, génératrice du second système du paraboloïde Φ, et cette génératrice B est le lieu des extrémités des sous-tangentes des droites θ, θ', θ'',... lesquelles sous-tangentes sont égales respectivement aux rayons R, R', R''.

Pour déterminer B^h et B^v il suffit donc de déterminer les projections d'un seul point de la droite B.

Or, si nous prolongeons R de $m^h q'^h = m^h o^h$, le point q'^h sera la projection d'un point q' de la droite B.

Et, en effet, si l'on construit sur $o^h q'^h$, comme diamètre, un cercle, il coupera A^h en m'^h, et l'on aura évidemment la sous-tangente $m'^h q'^h = o^h m'^h$, ou égale au rayon R'.

B^h étant déterminé, construisons B^v.

Pour cela, remarquons que si par le point p (situé au-dessous du point m de la quantité $z = R$ tangα, ce qui établit ce point p sur le plan horizontal), on mène une droite Z parallèle à la droite A; le point p', extrémité de la sous-tangente projetée en $q'^h m'^h$, sera situé sur cette droite Z.

Si donc l'on mène par le point p'^v une parallèle à la ligne de terre, on aura la projection verticale de la sous-tangente. Cette droite coupe la droite O^v précisément au point q'^v; dès lors, en unissant q'^v et m'^v on aura la droite θ'^v, et en unissant les points q^v et q'^v on aura la droite B^v. Mais comme la figure $(q^v q'^v p^v p'^v)$ est un parallélogramme, il s'ensuit que les droites θ^v et θ'^v sont parallèles, et que les droites B^v et A^v sont aussi parallèles.

Et comme les droites θ, θ'... sont les génératrices du premier système, et que les droites A, B... sont les génératrices du deuxième système du paraboloïde Φ, il s'ensuit que toutes les génératrices de ce paraboloïde Φ se projetteront sur le plan vertical suivant des droites parallèles.

Le plan vertical de projection est donc perpendiculaire à la droite intersection des deux plans U et V *directeurs* du paraboloïde Φ; ces plans U et V sont donc perpendiculaires au plan vertical de projection, l'un U étant parallèle à la droite θ^v, et l'autre V étant parallèle à la droite A^v.

§ V.

En vertu de ce qui précède, le paraboloïde Φ étant construit, il faudra mener par la droite A un plan P parallèle au rayon de lumière L, et chercher en quel point x de la droite A ce plan P est tangent à la surface Φ; ce point x sera un des points de la ligne *de séparation d'ombre et de lumière* de la surface hélicoïde Σ. On détermine facilement la trace H^p du plan P, puisqu'elle passe par les traces horizontales r et a des droites A et L.

Cela fait,

Il faudra déterminer le point d en lequel la droite B perce le plan P.

Pour déterminer ce point d, nous mènerons par la droite B un plan X pa-

rallèle à la droite A; par un point q de la droite B, nous mènerons donc une droite A′, parallèle à la droite A, et les deux droites B et A′ détermineront le plan X.

Mais comme les droites A^v et B^v sont parallèles, il s'ensuit, que le plan X est perpendiculaire au plan vertical de projection; il suffit donc (sans aucune construction préalable) de mener par le point q une droite H^x, perpendiculaire à A^h pour avoir la trace horizontale du plan X.

Les deux plans P et X se couperont suivant une droite A″, parallèle à la droite A (car le plan P passe par la droite A et le plan X passe par une droite A″ parallèle à A), il suffit donc de construire un point de cette droite A″ pour qu'elle soit connue de position. Or, les traces H^p et H^x se coupent au point b; en menant par ce point b une droite A''^h parallèle à A^h, on aura la projection horizontale de la droite A″; cette projection coupera la droite B^h en un point d^h qui sera la projection du point d demandé.

Cela fait,

Il faudra du point d mener une génératrice du premier système du paraboloïde Φ. Or, si sur $o^h d^h$ comme diamètre, on décrit un demi-cercle, il coupera A''^h en un point x^h, qui sera la projection horizontale du point x, *contact* du plan P et du paraboloïde Φ, et par suite *contact* de ce même plan P et de la surface hélicoïde Σ.

§ VI.

Nous avons supposé dans ce qui précède que la droite A faisait avec le plan horizontal un angle arbitraire 6. Quel que soit cet angle 6, les constructions seront toujours les mêmes, cependant lorsque cet angle 6 est nul, elles se trouvent simplifiées, et en effet:

La droite A (*fig. b*) étant supposée horizontale et parallèle au plan vertical de projection, l'on voit de suite que la droite B est située dans le plan horizontal, puisque B^v, étant parallèle à A^v, doit se confondre avec la ligne de terre LT.

Dès lors, le point q' est sur le plan horizontal, et la trace H^p est parallèle à A^v, ou à la ligne de terre LT.

Il est facile de lire sur la *fig. b* toutes les constructions à exécuter pour trouver le point x, point de *contact* du plan P avec la surface hélicoïde Σ.

§ VII.

Ayant déterminé le point x de la ligne de séparation d'ombre et de lumière,

qui est situé sur la droite A, il faut construire les points x_1, x_2,... situés sur les diverses génératrices droites A_1, A_2,... de la surface hélicoïde Σ.

Étant donc donné (*fig. c*), la projection A_1^h de la génératrice A_1 et la projection L_1^h du rayon de lumière, qui parallèle à L passe par le point m_1 de l'hélice H (décrite sur le cylindre Δ par le point *m*) ce point m_1 étant celui en lequel la génératrice A_1 touche le cylindre Δ, nous pourrions prendre un plan vertical L'T' parallèle à la droite A_1 et effectuer les contructions précédemment expliquées et nous trouverions le point x_1 de la même manière que nous avons trouvé le point *x*; mais ces divers changements de plan vertical de projection, rendraient l'épure très-confuse, il vaut mieux *opérer* au moyen d'un mouvement de rotation.

Comme la droite A_1 fait avec le plan horizontal le même angle 6 que la droite A, en faisant tourner cette droite A_1 autour de l'axe O de l'angle γ et en supposant que le point m_1 parcoure l'hélice H, ce point m_1 viendra se superposer sur le point *m*, et la droite A_1 viendra se superposer sur la droite A.

En même temps le rayon L_1 viendra prendre la position L' en laquelle L'^h fera avec L^h un angle ∂ égal à l'angle ∂ que les projections A_1^h et A^h faisaient entre elles.

Et comme les rayons de lumière L et L_1 sont parallèles et font dès lors un même angle avec le plan horizontal, il s'en suit que les droites L et L' font avec la verticale passant par le point *m* des angles égaux et qu'ainsi ces droites L et L' sont situées sur un cône de révolution vertical, et ayant le point *m* pour sommet.

Cela posé,

Le problème à résoudre sera donc le même que précédemment; seulement, au lieu de supposer que le rayon de lumière a la direction L, on doit supposer qu'il a la direction L'.

Pour déterminer la trace horizontale *a'* du rayon L', il suffira de décrire du point m^h comme centre et avec $m^h a$ pour rayon un cercle D qui coupera L'^h au point *a'* demandé.

Ce point *a'* étant construit toutes les autres constructions s'effectueront comme dans la fig. *a*.

On déterminera donc le point x'^h et on le ramènera par un arc de cercle ayant le point O^h pour centre en x_1^h sur A_1^h, et par suite on trouvera x_1^v sur A_1^v.

§ VIII.

Dans le cas où la génératrice droite A de l'hélicoïde Σ serait horizontale, on opérerait de la même manière indiquée § VII, pour déterminer les divers points x, x_1, x_2,... de la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

§ IX.

Au lieu de se donner la surface hélicoïde générale Σ par la génératrice droite A faisant avec le plan horizontal un angle constant 6 et par l'hélice H décrite par le pied m de la plus courte distance R existant entre l'axe O et la droite A, on aurait pu se donner la surface Σ par la même génératrice A et une hélice H' décrité par un point quelconque m' de cette droite A, en assujettissant toujours la droite A à être tangente au cylindre Δ ayant la plus courte distance R pour rayon de sa section droité.

Dès lors, connaissant : 1° la distance R' du point m' de la droite génératrice A à l'axe fixe O, et 2° l'inclinaison α' de l'hélice H' sur le plan horizontal (inclinaison α', que l'on peut facilement calculer ou construire graphiquement, le *pas h* commun aux diverses hélices H, H', H",... décrites par les divers points m, m', m''... de la droite A étant connu), on pourra opérer comme précédemment, et la construction des divers points de la courbe de *séparation d'ombre et de lumière* se construiront très-facilement.

Et, en effet,

Concevons (*fig. d*) l'hélice H' décrite par le point m' (les données étant les mêmes que dans la fig. a), nous prendrons $R' = O^h m'^h$ et nous le porterons de m'^h en q'^h sur θ'^h (tangente en m'^h au cercle H'^h), et ce point q'^h sera la projection du point q' de la droite B, génératrice du second système du paraboloïde Φ.

Si nous ramenons la droite θ' à être parallèle au plan vertical de projection, le point m'^v viendra en m'^v_1 sur O^v, et le point m'^h viendra en m'^h_1 sur le prolongement de $O^h m^h$; en sorte que θ'^h_1 sera parallèle à la ligne de terre LT.

Si donc je mène une droite L'T' parallèle à la ligne de terre LT et à une distance du point m'^v_1 égale à : $z = R' \tan g\alpha'$, j'aurai en q'^v_1 (sur L'T') la projection verticale du point q'_1, et la droite θ'^v_1, qui unit les points m'^v_1 et q'^v_1, fera *nécessairement* avec la droite L'T' un angle égal à l'angle α que la tangente θ' au point m' de l'hélice H' faisait avec le plan horizontal.

Cela posé,

Le point q' de la tangente θ' se projettera en q'^v sur la droite L'T'; et menant par ce point q'^v une droite Z^v parallèle à A^v, on obtiendra la même droite Z^v que dans la fig. a; et la projection horizontale de la droite Z ne sera autre que la droite A^h.

La droite Z^v ne sera autre que la projection B^v de la droite B, lieu des extrémités des sous-tangentes, égales en longueur et respectivement, aux rayons R, R'... Pour avoir B^h, que nous savons déjà devoir passer par le point q'^h, nous porte-

rons sur A^h de m^h en q^h une longueur égale à : $R = O^h m^h$ (égale à la plus courte distance qui existe entre les droites O et A), la droite B^h passera par le point q^h, le point q de la droite B aura sa projection verticale en q^v sur la droite Z^v; et menant par le point q^v une droite L″T″ parallèle à LT, en prenant le plan L″T″ pour nouveau plan horizontal de projection, on achèvera les constructions par rapport à ce plan L″T″, comme on l'a fait (fig. *a* et *c*) pour le plan LT.

Cela dit, on voit que l'on pourra très-facilement achever l'*épure*.

§ X.

Ce que nous venons de dire ci-dessus § IX nous permet de généraliser la solution donnée fig. *a*, et de l'appliquer au cas où la plus courte distance R existant entre l'axe O et la génératrice A serait nulle. Dans ce cas particulier, le cylindre A se réduit à l'axe O, et la surface hélicoïde Σ devient 1° la surface du *filet de vis triangulaire*, si la droite A est inclinée sur l'axe O, et 2° la surface du *filet de vis carré*, si la droite A coupe rectangulairement l'axe O.

§ XI.

Détermination de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface de la vis triangulaire.

Prenons l'axe O vertical; la génératrice A qui engendre le filet de vis, sera supposée parallèle au plan vertical de projection. Les divers points m, m', m''.... de la droite A, engendreront des hélices H, H′, H″,... qui auront toutes même *pas h*.

Le point m, situé sur l'axe O, engendrera une hélice H qui ne sera évidemment autre que cet axe O.

Cela posé :

Prenons un point m' (*fig. e*) sur la droite A, et dont la distance à l'axe O soit égale à $m'^h O^h$ que je désigne par R′.

La tangente θ′ à l'hélice H′, décrite par le point m', fera avec le plan horizontal un angle α′ dont la tangente sera connue, car l'on a :

$$\text{tang}\,\alpha' = \frac{h}{2\pi R'}$$

Nous pourrons donc construire *graphiquement* l'angle α′.

Cet angle α′ étant connu, nous mènerons par le point m'^v une droite $m'^v g$, fai-

sant avec la ligne de terre LT l'angle α'. Cette droite $m^v g$ coupera θ'^v en un point g, et menant gp^v, parallèle à la ligne de terre LT, elle coupera O^v en un point p^v; nous aurons donc en $\overline{m^v p^v}$ la hauteur $z = R'. \text{tang}. \alpha'$.

Par conséquent, en menant par le point p^v la droite Z^v, parallèle à A^v, on aura en même temps en cette droite Z^v la projection B^v de la génératrice B du second système appartenant au paraboloïde hyperbolique Φ, formé par les tangentes θ, θ', θ'',... et cette droite B sera le lieu des extrémités des sous-tangentes des droites θ, θ',... lesquelles sous-tangentes sont respectivement égales aux distances R', R'',... des points m', m'',... de la droite A à l'axe O.

En prolongeant la droite Z^v jusqu'en q'^v sur la droite θ'^v, nous pourrons mener par ce point q'^v une droite L'T' parallèle à LT, et considérer le plan horizontal L'T' comme étant le plan horizontal LT de la fig. *a*.

Les constructions pour déterminer le point x seront identiquement les mêmes que dans la fig. *a*, ainsi qu'on peut s'en assurer en jetant les yeux sur la fig. *e*.

§ XII.

Détermination de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface du filet de vis carré.

La droite A sera dans ce cas supposée parallèle à la ligne de terre. La fig. *f* nous démontre que les constructions sont les mêmes que celles de la fig. *e* pour déterminer le point q'^v; et qu'après la détermination de ce point, les constructions subséquentes pour la détermination du point x sont indentiques à celles exécutés fig. *b*.

§ XIII.

Dans le *Cours de géométrie descriptive* (chapitre des surfaces gauches), nous avons résolu le même problème, mais par une méthode différente; et dans tous les *cas* que nous avons eu à étudier, nous avons choisi parmi tous les paraboloïdes de raccordement, celui qui avait pour l'une de ses génératrices droites, la génératrice du cylindre Δ auquel la droite A était tangente.

Dans le mémoire actuel, nous avons employé le paraboloïde *direct*, celui qui est formé par les tangentes aux hélices décrites par les divers points de la droite A.

§ XIV.

Si l'on examine la fig. *a*, on voit que la plus courte distance éxistant entre

l'axe O et la génératrice droite A de la surface hélicoïde Σ étant égale à R, et le plan horizontal étant mené au-dessous du point m et à une distance $z = R$ tang. α, (α étant l'angle que la tangente θ, à l'hélice H décrite par le point m, fait avec le plan horizontal, en sorte que l'on a : tang. $\alpha = \frac{h}{2\pi . R}$, h étant le *pas* de tous les hélices H, H',...) on voit, dis-je, que les points q, r et a resteront les mêmes si, en faisant varier z, on incline les droites A, θ et L d'une manière convenable.

Et en effet désignant par β, α et δ les angles que les droites A, θ et L font avec le plan horizontal, on aura :

$$\text{tang } \beta = \frac{z}{\overline{m^h r}}, \quad \text{tang } \alpha = \frac{z}{R}, \quad \text{tang } \delta = \frac{z}{\overline{m^h a}}$$

$\overline{m^h r}$, R, et $\overline{m^h a}$ restant constants, il est évident que si l'on fait varier z, il faudra nécessairement faire varier les angles β, α, δ de manière à ce que les trois équations ci-dessus soient satisfaites; et dès lors la courbe *lieu* des points x^h restera la même.

Or l'on peut supposer $z = 0$ et alors $h = 0$, et alors toutes les hélices se confondent en un seul cercle situé sur le plan horizontal, et les trois droites A, θ et L se confondent avec leurs projections A^h, θ^h et L^h.

Dans ce cas la surface hélicoïde Σ se *transforme* en un plan qui est le plan horizontal de projection.

Et les points o^h, m^h, r, q et a ne variant pas de position entre eux, la courbe *lieu* des points x^h peut être considérée, non plus comme la projection horizontale d'une courbe de l'espace, mais comme une courbe plane et *géométrique* dont les divers points x^h sont déterminés par une construction géométrique, particulière, opérée dans le plan même de la courbe et sans aucune considération de *l'espace*.

Même chose a été signalée dans le *Cours de géométrie descriptive*, et ainsi par exemple, lorsque l'on a construit la courbe d'intersection de deux surfaces coniques ou cylindriques.

On voit donc que l'on peut se proposer de trouver *directement* quelle est la courbe *lieu* des points x^h, construits ainsi qu'il a été dit fig. c où la construction plane est *seule* représentée.

§ XV.

Si la tangente θ à l'hélice H décrite par le point m de la droite A (*fig. g*) fait avec le plan horizontal un angle β égal à celui que la droite A génératrice de la surface hélicoïde Σ fait avec ce même plan horizontal, alors l'on sait que la surface Σ est

développable et que les diverses tangentes θ, θ', θ'',... aux points m, m', m'',... des hélices H, H', H'',... (ces points m, m', m'',... étant sur la droite A) sont dans un même plan X qui remplace la surface paraboloïde Φ. Or, dans ce cas particulier, la construction étant exécutée fig. *g* comme en la fig. *a*, on voit que la propriété des sous-tangentes subsiste, et que la droite B lieu des extrémités des sous-tangentes respectivement égales aux rayons R, R',... est avec la droite A dans un même plan X perpendiculaire au plan vertical de projection. Ce que nous savions devoir être, puisque ce plan X devait être tangent à la surface Σ tout le long de la génératrice droite A.

§ XVI.

L'hyperboloïde à une nappe et de révolution, peut être rigoureusement considéré comme une surface hélicoïde gauche dans laquelle les divers points m, m',... de la génératrice droite A décriraient des hélices H, H',... dont le *pas* serait nul, auquel cas ces hélices ne seraient autres que des cercles, et ainsi les divers *parallèles* d'une surface de révolution.

La fig. *h* nous montre que pour l'hyperboloïde la propriété des sous-tangentes subsiste; car si l'on considère les tangentes θ, θ'... aux divers cercles H, H'... décrits par les points m, m'... de la droite A autour de l'axe O, ces tangentes horizontales formeront un paraboloïde Φ tangent à la surface hyperboloïde et tout le long de la droite A.

Et la construction de la droite B, lieu des extrémités des sous-tangentes respectivement égales aux rayons R, R',... s'effectuera comme dans la fig. *a*.

On sera conduit, fig. *h*, à une construction des points x^h... de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur l'hyperboloïde supposé éclairé par un rayon lumineux L, qui sera identique à celle donnée fig. *a*.

On sait que, dans ce cas, la ligne de séparation d'ombre et de lumière est 1° une ellipse, ou 2° une hyperbole, ou 3° deux droites parallèles, suivant que le rayon de lumière mené par le centre de la surface se trouve, ou 1° situé dans l'intérieur du cône asymptote, ou 2° situé sur ce cône, ou 3° situé hors de ce cône.

§ XVII.

La surface hélicoïde, filet de vis triangulaire, peut se déformer en un cône de révolution; il suffit pour cela de supposer que les divers points m, m', m''... de la droite génératrice A (laquelle coupe l'axe O au point m) décrivent des hélices H, H', H''... d'un *pas* nul. Ces hélices seront alors des *cercles* dont les plans seront perpendiculaires à l'axe O.

Si en chacun des points (*fig. i*) m, m', m'',... de ces cercles horizontaux H, H', H'',... on mène des tangentes θ, θ', θ''... à ces cercles, ces diverses tangentes formeront un *plan* qui remplacera pour le cône le paraboloïde Φ tangent à la surface hélicoïde (filet de vis triangulaire) tout le long de la droite A.

La propriété des sous-tangentes existera encore pour le cône, et, en effet, en prenant sur les tangentes θ, θ', θ'',... et à partir des points m, m', m'', des distances égales aux distances de ces points m, m', m''... à l'axe O, on aura les points m, q', q'',... qui seront en ligne droite B; et le plan X des deux droites A et B sera encore perpendiculaire au plan vertical de projection.

TROISIÈME PARTIE.

Tracé mécanique de la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, de la surface hélicoïde générale supposée éclairée par un rayon lumineux.

§ I.

Lorsque nous avons cherché les divers points x^h, x_1^h,... de la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, nous avons, pour faciliter les constructions graphiques et les abréger, supposé que la droite A étant passée en une position A', on ramenait la droite A' sur la droite A, au moyen de deux mouvements, l'un de rotation autour de l'axe O et l'autre de translation et parallèlement à cet axe O.

Pour les recherches subséquentes, il est préférable de construire le point x_1, situé sur la droite A', en opérant un changement de plan vertical de projection, ainsi : quand on considérait la droite A, on prenait un plan vertical de projection, passant par l'axe O et parallèle à cette droite A, lorsque nous considérerons une nouvelle position A' de la droite A, nous prendrons un nouveau plan vertical de projection, passant toujours par l'axe O, mais alors parallèle à la droite A'.

Le plan horizontal de projection était situé au-dessous du point m (contact de la droite A et du cylindre Δ ayant pour axe la droite O), d'une quantité égale à : $z = R$ tang. α; lorsque nous considérerons la nouvelle position A' de la droite A, nous emploierons un nouveau plan horizontal de projection, toujours perpendiculaire à l'axe O, mais situé au-dessous du point m' (contact de la droite A' et du cylindre Δ) d'une quantité qui sera encore égale à : $z = R$ tang. α.

Cela posé, effectuons les constructions graphiques qui doivent nous conduire à la détermination des divers points x^h, x_1^h,... de la projection horizontale de la *ligne de séparation d'ombre et de lumière*.

Reprenons la fig. c, et sur la fig. I construisons le point x^h, situé sur A^h. Cela fait, concevons la droite A en la position A'; pour trouver le point x_1^h, il faudra :

1° prendre $m'^h q' = m^h q$, et l'on aura le point q', *homologue* du point q; 2° prendre $m'^h r' = m^h r$, et l'on aura le point r', *homologue* du point r; 3° mener par m'^h une droite parallèle à la projection horizontale du rayon de lumière, et prendre $m'^h a' = m^h a$ et l'on aura le point a', *homologue* du point a; 4° mener par q' la droite $H^{x\prime}$, perpendiculaire à A'^h, et l'on aura la droite *homologue* de la droite H^x; 5° mener par le point q' la droite B'^h, perpendiculaire à la divergente $o^h q'$, et l'on aura l'*homologue* de la droite B^h; 6° unir les points r' et a', et l'on aura la droite $H^{r\prime}$, *homologue* de la droite H^r; 7° les droites $H^{r\prime}$ et $H^{x\prime}$ se couperont en un point b' qui sera l'*homologue* du point b; 8° mener par le point b' une droite $A_1'^h$ parallèle à la droite A'^h, et l'on aura l'*homologue* de la droite A''^h; 9° les droites $A_1'^h$ et B'^h se couperont en un point d'^h qui sera l'*homologue* du point d^h; 10° enfin, en construisant sur $o^h d'^h$, comme hypoténuse, un triangle rectangle dont le sommet soit situé sur la droite A'^h, on aura en ce sommet x_1^h le point demandé.

§ II.

Avant d'aller plus loin, rappelons-nous bien les diverses relations de position qui existent entre les lignes qui servent à construire le point x^h (*fig.* 1).

1° Le triangle $o^h m^h q$ est rectangle en m^h; il est isocèle; ainsi l'on a $\overline{o^h m^h} = \overline{m^h q}$ et l'angle $\widehat{o^h q m^h} = 45°$;

2° La droite B^h est perpendiculaire sur $o^h q$, parce qu'elle est la projection de l'une des génératrices du second système du paraboloïde tangent, lequel est formé par les tangentes aux hélices de même *pas* décrites par les divers points de la droite A; parce qu'elle est la projection de la tangente à l'hélice décrite par le point q de la droite A; parce qu'elle est tangente à la parabole enveloppe des projections des tangentes aux hélices, parabole qui a le point o^h pour *foyer*;

3° Le triangle qbd^h est rectangle en b et il est isocèle; on a :

$$\overline{bq} = \overline{bd^h} \quad \text{et l'angle} \quad \widehat{bqd^h} = 45°,$$

4° Le triangle $o^h d^h x^h$ est rectangle en x^h et il est isocèle; on a donc :

$$\overline{d^h x^h} = \overline{o^h x^h} \quad \text{et l'angle} \quad \widehat{d^h o^h x^h} = 45°.$$

De ce qui précède, on en conclut que :

$$\overline{o^h q} = \overline{o^h m^h} . \sqrt{2} = \overline{qm^h} . \sqrt{2}$$
$$\overline{qd^h} = \overline{bq} . \sqrt{2} = \overline{bd^h} . \sqrt{2}$$
$$\overline{o^h d^h} = \overline{o^h x^h} . \sqrt{2} = \overline{d^h x^h} . \sqrt{2}$$

§ III.

D'après ce qui vient d'être rappelé, on peut en conclure que si l'on avait (*fig.* I) ramené les points d^h, d'^h ... en les points d_1^h, $d_1'^h$ ... en faisant faire un mouvement de rotation de 45° autour du point o^h à la courbe lieu des points d^h ...; ces divers points d_1^h ... seraient venus se placer respectivement sur les rayons vecteurs $o^h x^h$,... de la courbe lieu des points x^h,... et que les deux courbes, l'une lieu des points x^h,... et l'autre lieu des points d_1^h,... seraient deux courbes polaires semblables et semblablement placées et ayant le point o^h pour *pôle* commun.

Si donc on calcule l'équation polaire de la courbe lieu des points d^h, on aura une équation de la forme $f(\rho, \omega) = 0$, et en remplaçant dans cette équation ω par $(\omega + 45°)$ et ρ par $\frac{1}{\rho\sqrt{2}}$, on aura en : $f\left[(\omega + 45°), \frac{1}{\rho.\sqrt{2}}\right] = 0$, l'équation de la courbe, projection horizontale de la *ligne de séparation d'ombre et de lumière.*

§ IV.

Ce qui précède nous montre donc que si l'on connaît la courbe lieu des points d^h ... on connaîtra de suite la courbe lieu des points x^h ... Voyons donc si l'on ne pourrait pas parvenir, par une construction plus simple que celle que nous avons employée jusqu'ici, à la détermination des points d^h,.....

Les trois points r, b et a sont en ligne droite. Si donc nous faisons tourner autour du point q la droite H^r qui les contient, et cela d'un angle égal à un demi-droit, le point r viendra en r_1 sur la droite $o^h q$, le point b viendra en b_1 sur la droite B^h, et cela parce que la droite $o^h q$ fait un angle demi-droit avec la droite A^h, et que la droite B^h fait un angle demi-droit avec la droite H^x (*fig.* II).

Enfin le point m^h viendra en m_1 sur la droite $o^h q$.

Cela posé, si l'on unit les deux points r_1 et b_1, on aura la position que la droite H^r doit prendre après le mouvement de rotation ; et si par le point m_1 on mène une droite $m_1 a_1$ faisant avec la droite $o^h q$ le même angle que la projection horizontale $m^h a$ du rayon de lumière fait avec la droite A^h, cette droite $m_1 a_1$ viendra couper en a_1 la droite $r_1 b_1$, et ce point a_1 sera la position que le point a viendra prendre après le mouvement de rotation d'un demi-cadran autour du point q ; et comme les droites $o^h q$ et A^h font entre elles un angle égal à un demi-droit, il est évident

que les droites m^ha et m_1a_1 font aussi entre elles un angle égal à un demi-droit.

Cela posé :

Comme $\overline{qb_1} = \overline{qb}$, et que $\overline{qd^h} = \overline{qb}.\sqrt{2}$, il s'ensuit que si par le point d^h on mène une droite parallèle à la droite $r_1b_1a_1$, cette nouvelle droite viendra couper la droite o^hq en un point r_2, et l'on aura $\overline{r^2q} = \overline{r_1q}.\sqrt{2}$; il suffira donc d'élever par le point r une perpendiculaire à la droite A^h, et de la prolonger jusqu'en r_2 sur la droite o^hq pour avoir un point de la parallèle menée par le point d^h.

Cela posé,

Si l'on joint les points q et a_1 par une droite, elle ira couper la droite r_2d^h en un point a_2; unissons les points o^h et a_2; je dis que cette droite o^ha_2 est parallèle à la droite m_1a_1.

Et en effet :

Dans les deux triangles qm_1a_1 et qo^ha_2, on a : $\overline{o^hq} = \overline{qm_1}.\sqrt{2}$ et $\overline{qa_2} = \overline{qa_1}.\sqrt{2}$; ces deux triangles sont donc semblables; donc, les deux droites m_1a_1 et o^ha_2 sont parallèles, et de plus on a : $\overline{o^ha_2} = \overline{m_1a_1}.\sqrt{2}$.

La construction que nous venons d'effectuer sera la même que nous considérions la droite A^h ou la droite A''^h (*fig.* I). Par conséquent le point a_2 est un point fixe, puisqu'il est l'extrémité d'une droite, d'une longueur constante, menée par un point fixe et dans une direction invariable, attendu que cette droite o^ha_2 fait un angle égal à un demi-droit avec la projection horizontale du rayon lumineux.

Or, si l'on se rappelle qu'en faisant tourner le point d^h d'un angle demi-droit on l'amène en d_1^h sur le rayon vecteur de la courbe lieu des points x^h, alors le point a_2 viendra en a_3 (*fig.* III), et dès lors la droite o^ha_3 sera perpendiculaire à la projection horizontale du rayon de lumière.

Ce point a_3 étant un point fixe, on aura à exécuter la construction suivante pour construire le point d_1^h, en lequel vient se placer le point d^h après la révolution d'un demi-cadran autour du point o^h.

1° Du point o^h, comme centre et avec $\overline{o^hq}$ pour rayon (*fig.* III), on décrira un cercle Q;

2° Du point o^h comme centre et avec $\overline{o^hr_2}$ pour rayon, on décrira un cercle R;

3° Par le point o^h on mènera une droite o^ha_3 perpendiculaire à la direction m^ha de la projection horizontale du rayon lumineux; et le point a étant la trace horizontale du rayon de lumière passant par le point m, le plan horizontal de projection étant mené au-dessous du point m d'une quantité $z = R \tang \alpha$ (α étant l'angle que la droite A fait avec le plan horizontal et R le rayon du cercle M, projection de l'hélice décrite par le point m), on prendra $\overline{o^ha_3} = \overline{m^ha}.\sqrt{2}$, et l'on aura le point fixe a_3;

4° On mènera par le point o^h une droite quelconque coupant le cercle Q en un point q et le cercle R en un point $r_{,}$, on unira le point *variable* $r_{,}$ avec le point *fixe* $a_{,}$;

5° Au point q on mènera une tangente au cercle Q;

6° La tangente au cercle Q coupera la droite $a_{,}r_{,}$ en un point $d_{,}^h$ qui sera le point demandé; et en prenant sur le rayon vecteur $\overline{o^h d_{,}^h}$ une longueur $\overline{o^h x^h}$ telle que $\overline{o^h x^h} = \overline{o^h d_{,}^h} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, on aura en x^h un point de la projection horizontale de la *ligne de séparation d'ombre et de lumière.*

§ V.

Voyons s'il ne serait pas possible de déterminer le point x^h sans avoir besoin de passer par le point $d_{,}^h$.

Il est d'abord évident qu'en menant au point s (*fig.* III), en lequel le cercle M est coupé par la droite $o^h q$, une tangente à ce cercle M, elle viendra couper la droite $o^h d_{,}^h$ en le point x^h demandé; car l'on a : $\overline{o^h q} = \overline{o^h s} \cdot \sqrt{2}$; ensuite, si nous menons par le point x^h une parallèle à la droite $r_{,}a_{,}$, elle coupera la droite $o^h a_{,}$ en un point p, et l'on aura évidemment $\overline{o^h a_{,}} = \overline{o^h p} \cdot \sqrt{2}$, par conséquent le point p sera un point fixe, et de plus $o^h p$ se trouve précisément égal à $m^h a$ (*fig.* III).

De plus, la droite px^h coupera la droite $o^h q$ en un point v, et l'on aura :

$$\overline{o^h r_{,}} = \overline{o^h v} \cdot \sqrt{2}.$$

Par conséquent $\overline{o^h v} = \overline{m^h r}$.

D'après ce qui précède pour construire directement les divers points x^h de la projection horizontale de la *ligne de séparation d'ombre et de lumière*, on devra exécuter la construction suivante (*fig.* IV) :

1° Du point o^h comme centre on décrira un cercle M ayant pour rayon la plus courte distance R existant entre l'axe O et la génératrice droite A de la surface hélicoïde générale;

2° On mènera par le centre o^h une droite perpendiculaire à la projection horizontale du rayon lumineux, et l'on prendra une ouverture de compas $\overline{o^h p}$ égale à la sous-tangente de l'inclinaison du rayon de lumière passant par un point m de l'hélice H (décrite par le pied de la plus courte distance qui existe entre les droites A et O) sur un plan horizontal λ situé au-dessous de ce point m de la quantité connue, $z = R \tang \alpha$.

3° On décrira un cercle D du point o^h comme centre et avec un rayon égal

à $\overline{m^h r}$, qui est la sous-tangente de l'inclinaison de la génératrice A, par rapport au même plan horizontal λ;

4° On mènera du point fixe p une série de divergentes pl', ... coupant le cercle P, en les points l',...

5° On unira le centre o^h avec les divers points l',... par des divergentes qui couperont le cercle M en des points s...

6° On mènera en les divers point s, ... des tangentes au cercle M, lesquelles couperont respectivement les divergentes pl', ... en des points x^h, ..., qui détermineront la projection horizontale de la *ligne de séparation d'ombre et de lumière* sur la surface hélicoïde générale.

§ VI.

D'après ce qui précède l'on voit que l'on peut construire la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, en la considérant comme une courbe géométrique plane et sans s'inquiéter de la courbe à double courbure de l'espace dont elle est la projection; sans s'inquiéter dès lors du problème d'ombre qui conduit à cette courbe plane.

Examinons maintenant en détail cette courbe et voyons quelle forme elle doit affecter.

Si l'on joint le point fixe p (*fig.* V) avec le centre o^h des cercles M et D, on voit de suite que la courbe doit être symétrique par rapport à cette droite po^h.

La droite po^h coupe le cercle M en deux points z et $z_{,}$ qui appartiendront à la courbe; et comme tous les points de la courbe sont situés hors du cercle M excepté ces deux points z et $z_{,}$, on voit de suite que la courbe sera tangente au cercle M en chacun de ces points z et $z_{,}$.

Pour construire un point *courant* de la courbe, nous menons d'abord la divergente pl, coupant le cercle D en les deux points l et $l_{,}$ et nous aurons deux rayons $\overline{o^h l}$ et $\overline{o^h l_{,}}$ coupant le cercle M respectivement en les points s et $s_{,}$; nous mènerons ensuite en s et $s_{,}$ des tangentes au cercle M lesquelles couperont la divergente pl en les points x et $x_{,}$; nous obtenons donc deux points de la courbe cherchée pour chaque divergente telle que pl.

Cela doit déjà nous faire penser que la courbe est composée de deux branches. Voyons si la courbe passe par le point fixe p; et pour reconnaître, si cela a lieu, menons par le point p une tangente au cercle M, nous aurons le point de contact s_{2}; menons $\overline{o^h s_{2}}$ coupant le cercle D au point l_{2}; joignons les points l_{2} et p, nous aurons la divergente pl_{2} qui coupera le cercle D en un second point l_{2}' et si pour ce point l_{2}' nous faisons la construction nécessaire, nous aurons le point x_{2}', en sorte que

les points p et x_s' appartiennent à la courbe et sont conjugués entre eux, comme l'étaient les points x et x_1.

La courbe sera donc composée de deux branches, l'une δ tangente en z au cercle M et venant passer par le point p; l'autre δ_1 tangente en z_1 au cercle M et venant passer par le point x_s'.

Si au lieu de mener une divergente coupant le cercle D, on mène une tangente pl_s à ce cercle, le point de la branche δ, qui est situé à l'infini, sera sur cette tangente, et même chose aura lieu pour le point de la branche δ_1. Car ce point sera donné par l'intersection de la droite pl_s tangente en l_s au cercle D et de la tangente en s_s au cercle M; or il est évident par la construction que ces deux tangentes sont parallèles.

La droite pl_s sera donc une asymptote commune aux deux branches δ et δ_1.

Par suite l'on voit que la courbe sera composée de deux branches δ et δ_1 ayant la forme indiquée par la fig. V; ces branches ont pour asymptotes les deux tangentes menées du point p au cercle D; la branche δ_1 n'offre aucun point remarquable; la branche δ offre un nœud au point fixe p et de plus chacun de ses arcs infinis offre un point d'inflexion, car tournant sa concavité après le point p par rapport à l'asymptote, il faut de toute nécessité, que cet arc vienne à tourner, en cheminant, sa convexité vers son asymptote.

On voit aussi que ce seront les divers points de l'arc $l_s l_s$ du cercle D qui donneront les points de l'arc infini de la branche δ (et cela à partir du point p) et que ce sont les points de l'arc $l_s l_s'$ du même cercle D qui donneront les points de l'arc infini de la branche δ_1 (et cela à partir du point x_s').

§ VII.

Construction d'un compas propre à tracer les branches δ et δ_1.

Concevons une règle A portant à l'une de ses extrémités une pointe que l'on fixera au point o^k centre des cercles M et D, et portant à son autre extrémité un axe, dont le centre sera en un point l du cercle D, et sur lequel sera montée une règle E à rainure. Fixons perpendiculairement sur la règle A, une seconde règle à rainure B, tangente au cercle M en le point s, fig. VI.

Plaçons au point fixe p un pivot isolé, dans lequel s'engagera la rainure de la règle E et enfin plaçons un crayon ou une pointe à tracer en le point x, c'est-à-dire entre les rainures des règles B et E. En faisant mouvoir la règle A autour du point o^k, le point l décrivant le cercle D, la règle E glissera le long du pivot p et le crayon x décrira la branche δ de la courbe tracée dans la fig. V.

On conçoit sans peine que l'on peut disposer la règle A de telle manière qu'elle puisse s'allonger ou se raccourcir, et qu'ainsi, l'on puisse placer le point l à telle distance que l'on voudra du point o^h; l'on voit aussi que comme le pivot p est une pointe isolée, on pourra la piquer dans le papier à telle distance que l'on voudra du point o^h. On conçoit sans peine aussi que l'on peut monter la règle B sur la règle A, de telle manière que tout en lui restant perpendiculaire, elle puisse glisser sur elle, de manière à ce que le point s s'approche ou s'éloigne du centre o^h.

Ainsi, ce compas satisfera aux divers tracés de la branche de courbe δ, suivant les variations de grandeur, des rayons des cercles M et D et de la distance existant entre le centre o^h et le point fixe p.

Avec ce compas on pourra tracer d'un mouvement continu, tout le nœud pax de la branche δ.

Le même compas peut servir à tracer la branche δ_1, mais il faut lui faire subir une légère modification.

Le point l, au lieu d'être placé, comme fig. VI, au delà des points p et x, devra être placé, comme fig. VII, entre ces points p et x.

§ VIII.

Nous devons faire remarquer que lorsque l'on construit la projection de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, comme étant une courbe géométrique plane, on est conduit aux deux branches δ et δ_1 (*fig.* V), et que cependant il n'y a que la branche δ qui soit réellement la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface hélicoïde.

C'est qu'ici il se présente une chose analogue à celle qui se présente dans plusieurs problèmes de l'espace.

Ainsi, par exemple, lorsque l'on suppose une sphère éclairée par un point lumineux, le cône de lumière tangent à la sphère peut être coupé par le plan horizontal suivant une hyperbole, et il n'y a cependant qu'une des branches de cette courbe qui détermine l'ombre portée.

De même, lorsque l'on cherche l'intersection de deux surfaces, la courbe d'intersection peut être une courbe à double courbure fermée, et se projetant horizontalement suivant un arc seulement de courbe plane fermée ou infinie, comme lorsque l'on considère deux surfaces de révolution du second ordre dont les axes se coupent, et que l'on projette la courbe à double courbure sur un plan parallèle à celui des deux axes de rotation.

Dès lors, si l'on peut considérer la projection comme une courbe plane, ce qui

est permis, si l'on est conduit par la solution du problème de l'espace à l'emploi d'une certaine méthode graphique qui permette de construire les divers points de cette courbe, en la considérant comme courbe géométrique plane et non comme projection d'une courbe à double courbure située dans l'espace, on voit bien que l'on doit nécessairement pouvoir, par cette méthode graphique, construire la courbe plane complète, et non pas seulement une de ses branches, ou seulement les points d'un arc de cette courbe.

§ IX.

Si nous considérons une surface hélicoïde générale dont la génératrice droite A soit oblique au plan horizontal, les cercles D et M existeront toujours, mais le point fixe p pourra varier de position par rapport aux cercles D et M, suivant l'inclinaison du rayon de lumière, et ainsi le point p pourra être :

1° Situé hors du cercle D comme dans la fig. V, et nous avons examiné ce cas dans tous ses détails;

2° Situé sur le cercle D;

3° Situé dans l'intérieur du cercle D, mais hors du cercle M;

4° Situé sur le cercle M;

5° Situé dans l'intérieur du cercle M, et dans ce cas on aura;

6° Comme cas particulier, celui où le rayon de lumière étant vertical, le point p sera précisément le centre o^h commun aux cercles concentriques M et D;

Enfin 7° le point p pourra être situé à l'infini, auquel cas le rayon de lumière serait horizontal.

Nous allons examiner successivement la forme que doit affecter, dans chacun de ces cas particuliers, la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière; mais nous ne devons pas oublier que la ligne o^hp est toujours, dans nos constructions graphiques, perpendiculaire à la projection horizontale du rayon de lumière, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison sur le plan horizontal de ce rayon de lumière.

§ X.

Des diverses formes que peut affecter, suivant l'inclinaison du rayon de lumière, la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière d'une surface hélicoïde générale dont la génératrice droite est inclinée à l'horizon.

La surface hélicoïde peut être considérée comme composée de deux nappes. Car si l'on examine la génératrice droite A, son point m pied de la plus courte

distance R avec l'axe O, décrit une hélice H ayant le cercle M pour projection horizontale, et cette droite A est divisée en deux parties, l'une supérieure, l'autre inférieure par l'hélice H en ce point *m*.

La nappe supérieure de la surface hélicoïde sera formée par les parties supérieures de toutes les génératrices droites A, A′, A″,... et la nappe inférieure de cette surface sera formée par les parties inférieures de toutes les mêmes génératrices droites A, A′, A″....

Les deux nappes sont réunies l'une à l'autre par l'hélice H qui est une *ligne de gorge* sur la surface hélicoïde; cette hélice ne donnant une *arête de rebroussement* que dans le cas où la surface hélicoïde serait une surface *développable*.

Cela dit, examinons les diverses formes que peut présenter la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, suivant l'inclinaison du rayon lumineux.

PREMIER CAS. *Le point fixe* p *étant situé hors du cercle* D.

La forme que l'on obtient dans ce cas, est celle représentée fig. V, mais en la seule branche δ (ainsi qu'il a été remarqué au § 8).

Si la surface hélicoïde rampe de gauche à droite, comme cela a lieu dans l'épure, alors c'est l'arc *zxp* de la courbe δ qui appartient à la ligne de séparation d'ombre et de lumière située sur la nappe supérieure de la surface hélicoïde.

L'autre arc, situé à gauche de la droite po^h, appartient à la ligne de séparation d'ombre et de lumière située sur la nappe inférieure de la surface hélicoïde.

Ce serait l'inverse si la surface hélicoïde rampait de droite à gauche.

DEUXIÈME CAS. *Le point fixe* p *étant situé sur le cercle* D.

La forme de la courbe est celle indiquée fig. VIII. Elle offre un nœud au point fixe *p*; elle est infinie, mais ses deux arcs infinis n'ont pas pour asymptote commune la tangente au cercle D en le point *p*; l'asymptote est parallèle à cette tangente (*).

Cette courbe est unique; aucune autre branche, *parasite*, quant au problème d'ombre, n'existe dans ce cas.

TROISIÈME CAS. *Le point fixe* p *étant situé dans l'intérieur du cercle* D *et en dehors du cercle* M.

La forme de la courbe offre un nœud (*fig.* IX) au point fixe *p*; elle est fermée et ses deux boucles sont tangentes respectivement aux points z et z_1, en lesquels le cercle M est coupée par la droite po^h.

(*) C'est ce dont il est facile de s'assurer en employant la méthode de ROBERVAL. Voyez le mémoire n° 6, ci-après.

Quatrième cas. *Le point fixe* p *étant situé sur le cercle* M.

La courbe est fermée (*fig.* X), et elle offre un point de rebroussement au point fixe *p*.

Cinquième cas. *Le point fixe* p *étant situé dans l'intérieur du cercle* M.

La courbe offre la forme indiquée fig. XI; elle est composée d'une seule branche fermée, laquelle est tangente en les points z et z_1, suivant lesquels le cercle M est coupé par la droite po^h.

Sixième cas. *Le point fixe* p *étant situé au centre du cercle* M.

Dans ce cas, la ligne de séparation d'ombre de lumière n'est autre que l'hélice H, et la projection horizontale est dès lors (*fig.* XII) le cercle M lui-même.

Remarque. Dans le *premier cas*, le rayon de lumière est moins incliné à l'horizon que la génératrice droite de l'hélicoïde; ainsi, désignant par α l'angle d'inclinaison de la génératrice sur le plan horizontal, et par 6 l'angle d'inclinaison du rayon lumineux sur le même plan horizontal, on a: $6 < \alpha$.

Dans les 2e, 3e, 4e, 5e *cas*, le rayon de lumière est plus incliné que la génératrice, et l'on a : $6 > \alpha$.

Dans le *sixième cas*, le rayon de lumière est vertical; il est perpendiculaire au plan horizontal de projection.

Septième cas. *Le point fixe* p *étant situé à l'infini.*

Dans ce cas, le rayon de lumière est horizontal, et le point fixe p est situé à l'infini sur la droite menée par le centre o^h perpendiculairement à la projection horizontale du rayon lumineux.

Les diverses divergentes émanant du point p seront donc, dans ce cas, parallèles entre elles et perpendiculaires à la projection horizontale du rayon lumineux.

La fig. XIII donne la forme de la courbe, mais dans ce septième cas, comme dans le premier cas, la courbe est composée de deux branches infinies δ et δ_1, symétriques par rapport à la droite o^hp, et identiques ou superposables.

Toutefois, ces deux branches n'existent ensemble qu'autant que l'on considère la courbe comme courbe géométrique plane; la branche δ existe seule comme projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur l'hélicoïde; si cette surface rampe : 1° de gauche à droite, ou 2° en sens contraire et ainsi de droite à gauche, ce sera toujours la branche δ qui sera la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière; mais il faut bien observer que l'arc zx de la branche δ sera la projection de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, située sur la nappe supérieure de l'hélicoïde dans le premier cas, et située sur la nappe inférieure de l'hélicoïde dans le deuxième cas.

Il est évident, par la construction même des deux branches δ et δ_1, qu'elles ont pour asymptotes communes deux tangentes au cercle D, qui sont celles perpendiculaires à la projection horizontale du rayon de lumière.

§ XI.

Construction d'un compas propre à tracer la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière dans le cas où le rayon lumineux est horizontal.

La droite o^h1 étant perpendiculaire à la projection du rayon lumineux, il faudra (*fig.* XIV) que la branche E du compas reste parallèle à cette droite o^h1, pour cela on formera un parallélogramme articulé sur la branche A et sur la direction o^h1 et qui soit fixé à la branche E.

Les deux axes o^h et 1 seront fixes, et pendant que les points s et t décriront, l'un le cercle M et l'autre le cercle D, la règle E se mouvra parallèlement à la règle fixe K.

§ XII.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que la génératrice droite A de l'hélicoïde était inclinée à l'horizon et dans le même sens que l'hélice H décrite par le point m.

Mais il est nécessaire d'examiner le cas où la génératrice A serait inclinée en sens inverse.

Supposons que l'hélice rampe de gauche à droite comme l'indique la fig. XV, la droite génératrice de l'hélicoïde pourra avoir la position A ou la position A_1.

Dans le premier cas, la génératrice droite A est inclinée dans le même sens que l'hélice H ;

Dans le deuxième cas, la génératrice droite A_1 est inclinée en sens inverse par rapport à l'hélice H.

Dans le deuxième cas, la ligne de séparation d'ombre et de lumière aura pour projection horizontale, dans le premier et le septième cas examinés ci-dessus, § X, les branches δ_1 des fig. V et XIII. Ainsi, la courbe en projection horizontale doit être complète, car rien n'indique lorsqu'on la construit sur son plan (sans s'inquiéter du problème d'ombre), si la génératrice droite de l'hélicoïde est dirigée dans le sens du rampant de l'hélice H ou en sens contraire ; la construction graphique sur le plan doit donc satisfaire à toutes les relations de position de l'espace que le problème d'ombre peut offrir.

Et c'est ce qui a lieu en effet.

En résumé :

L'hélice H, ligne de gorge de la surface hélicoïde, peut ramper de gauche à droite ou de droite à gauche sur la partie antérieure du cylindre Δ sur lequel cette hélice H est tracée, et dans l'un et l'autre cas, la génératrice droite A de cette surface hélicoïde peut être inclinée à l'horizon, dans le même sens ou en sens contraire, par rapport à cette hélice H.

Si l'inclinaison de la génératrice droite A est dans le même sens que le rampant de l'hélice H, que cette hélice rampe de droite à gauche ou de gauche à droite, la branche δ (*fig.* V et XIII) sera la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

Si, au contraire, l'inclinaison de la génératrice droite A est en sens contraire au rampant de l'hélice H, que cette hélice rampe de droite à gauche ou de gauche à droite, la branche δ_1 (*fig.* V et XIII) sera la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

§ XIII.

Des diverses formes que peut affecter la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière d'une surface hélicoïde générale, dont la génératrice droite est horizontale, suivant l'inclinaison du rayon lumineux.

Lorsque la génératrice droite A de la surface hélicoïde est horizontale, le cercle D n'existe pas, ou mieux son rayon est infini.

Dès lors, le point fixe p est toujours dans l'intérieur du cercle D ; par conséquent, tant que ce point fixe p sera situé à une distance finie du centre o^h, c'est-à-dire tant que le rayon de lumière ne sera pas horizontal, la projection de la séparation d'ombre et de lumière sera une courbe fermée.

Premier cas. *Le point fixe* p *étant situé hors du cercle* M.

La courbe offrira un nœud au point p, ainsi que l'indique la fig. XVI.

Deuxième cas. *Le point fixe* p *étant situé sur le cercle* M.

La courbe offrira un point de rebroussement au point p, ainsi que l'indique la fig. XVII.

Troisième cas. *Le point fixe* p *étant situé dans l'intérieur du cercle* M.

La courbe ne passera pas par le point p ; elle sera tangente en les points x et x_1 au cercle M, et elle offrira la forme indiquée par la fig. XVIII.

Quatrième cas. *Le point fixe* p *étant situé au centre du cercle* M.

La courbe ne sera autre que le cercle M lui-même.

Remarque. Dans les 1ers, 2e et 3e *cas*, le rayon lumineux est plus ou moins incliné

à l'horizon, il fait un angle plus ou moins aigu avec le plan horizontal ; mais dans le quatrième cas, le rayon lumineux est vertical, il fait un angle droit avec le plan horizontal.

CINQUIÈME CAS. *Le point fixe* p *étant situé à l'infini.*

Dans ce cas, la divergente *pl* est toujours perpendiculaire à la projection du rayon lumineux; le point *l* est situé à l'infini ; dès lors, le rayon $o^h l$ est parallèle à *pl;* la ligne de séparation d'ombre et de lumière est donc tout entière située à l'infini.

§ XIV.

Construction d'un compas propre à tracer d'un mouvement continu la courbe δ, *suivant les formes qu'elle affecte dans les* fig. XVI, XVII et XVIII.

Pendant que la branche A, dont une des extrémités peut tourner librement autour du centre fixe o^h, fig. XIX, se meut autour du centre, il faut que la branche E, dont la rainure glisse sur le pivot fixé d'une manière invariable en *p*, reste toujours parallèle à A.

On obtiendra ce résultat en fixant la branche à rainure E à la règle A, au moyen d'un parallélogramme ayant trois de ses articulations en o^h, en *p* et en *s* (point situé sur le cercle M); la règle B portant une rainure sera fixée en *s* et perpendiculairement à la règle A.

Le crayon *x*, en glissant entre les rainures des branches E et B, décrira la courbe δ.

§ XV.

Dans le cas où l'on considère une surface hélicoïde dont la génératrice droite est horizontale, on remarque que la projection de la ligne de séparation d'ombre et de lumière affecte des formes analogues à celles que l'on obtient pour la surface hélicoïde dont la génératrice droite est inclinée à l'horizon. Il suffit pour s'en convaincre de jeter les yeux sur les fig. IX et XVI, X et XVII, XI et XVIII.

Mais il est bien évident que ces courbes, analogues de forme, n'ont pas la même équation, puisque la construction de leurs divers points est différente pour les unes et pour les autres.

Dans le cas où la génératrice droite A est horizontale, la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière est une épicycloïde.

Ainsi, on a :

1° Une épicycloïde *parfaite* (*fig.* XVII), lorsque le point fixe *p* est sur le cercle M;

2° Une épicycloïde *rallongée* (*fig.* XVI), lorsque le point fixe p est hors du cercle M ;

Et 3° enfin une épicycloïde *raccourcie* (*fig.* XVIII), lorsque le point fixe p est dans l'intérieur du cercle M.

Il est facile de reconnaître que cela a lieu en effet :

1° Rappelons-nous que pour construire un point x de la courbe δ_1, lorsque le point p est situé sur le cercle M, on exécute la construction suivante (*fig.* XX).

On mène par le point p une divergente; par le centre o^h, on mène un rayon parallèle à cette divergente et coupant le cercle M au point s; par le point s, on mène une perpendiculaire au rayon $o^h s$, laquelle coupe la divergente en un point x, qui appartient à la courbe δ.

Pour obtenir le point x, on peut exécuter une autre construction.

En effet :

Sur $\overline{o^h p}$ comme diamètre décrivons un cercle C; menons par le point i, milieu de $\overline{o^h p}$ et centre du cercle C, une droite parallèle aux droites parallèles entre elles $\overline{o^h s}$ et $\overline{px}$, cette droite coupera le cercle C au point n; prenons $\overline{ni'}=\overline{ni}$, et du point i' comme centre décrivons le cercle C'; les deux cercles C et C' seront tangents en n, puisque leurs centres i et i' et le point n sont en ligne droite; de plus ces deux cercles auront même rayon, puisque l'on a pris $\overline{ni'}=\overline{ni}$.

Cela posé :

Je dis que le cercle C passe par le point x. Cela est évident sur la figure.

Maintenant les arcs de cercle $nk'x$ et nkp sont égaux; par conséquent si je fais rouler le cercle C' sur le cercle C, le point x engendrera la courbe δ. Donc la courbe δ est une épicycloïde *parfaite* à une seule involution.

2° Lorsque le point p est hors du cercle M, on construira sur $\overline{o^h p}$ comme diamètre un cercle C; le point i, milieu de $\overline{o^h p}$, sera le centre de ce cercle (*fig.* XXI).

En menant par le point i une parallèle ii' aux droites parallèles entre elles $\overline{px}$ et $\overline{o^h s}$, elle sera équidistante de ces deux droites.

Menons par le point s une parallèle à $\overline{o^h p}$, elle coupera la droite $\overline{ii'}$ en un point i'; et si de ce point i', comme centre et avec un rayon égal à $\overline{o^h i}$, on décrit un cercle C', ce cercle passera par le point x, et de plus les deux cercles C et C' auront par construction des rayons égaux.

Cela fait :

Partageons la distance $\overline{ii'}$ en deux parties égales par le point q, et décrivons des points i et i' comme centres et avec un rayon égal à la moitié de $\overline{ii'}$, deux

cercles C_1 et C_1', ces deux cercles seront tangents en q, et le point x sera extérieur au cercle C_1'.

Or il est évident, par la figure elle-même, que si le cercle C_1' roule sur le cercle C_1, le point x engendrera la courbe δ.

La courbe δ est donc dans ce cas une épicycloïde *rallongée* et à une seule involution.

3° Lorsque le point p est dans l'intérieur du cercle M, on peut faire les mêmes constructions (*fig.* XXII) et les mêmes raisonnements que ci-dessus, et on voit que la courbe δ est dans ce cas une épicycloïde *raccourcie* et à une seule involution (*).

§ XVI.

Ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface du filet de vis.

Il est évident que pour passer de la surface hélicoïde générale à la surface de la *vis*, soit qu'elle soit à filet triangulaire, soit qu'elle soit à filet carré, il suffit de supposer, dans ce qui précède, que le rayon du cercle M se réduise à zéro, et de supposer ainsi, dans toutes les constructions graphiques précédentes, que les points s, s',... se confondent en un seul point, en se superposant sur le centre o^h.

§ XVII.

Vis triangulaire.

Dès lors, lorsqu'il s'agira du filet triangulaire, le cercle D existera, et le point fixe p pourra avoir 5 positions remarquables.

Premier cas. *Le point* p *étant hors du cercle* D (rayon lumineux incliné).

La projection δ de la ligne de séparation d'ombre et de lumière aura la forme indiquée fig. XXIII.

Deuxième cas. *Le point* p *étant sur le cercle* D (rayon lumineux incliné).

La courbe δ aura la forme indiquée fig. XXIV.

Troisième cas. *Le point* p *étant dans l'intérieur du cercle* D (rayon lumineux incliné).

La courbe δ aura la forme indiquée fig. XXV.

Quatrième cas. *Le point* p *étant le centre* o^h (rayon lumineux vertical).

La courbe δ se réduit au centre o^h.

(*) Voyez, dans les *Compléments de géométrie descriptive*, ce qui a été dit au sujet des épicycloïdes.

Cinquième cas. *Le point* p *étant à l'infini* (rayon lumineux horizontal).

La courbe δ aura la forme indiquée fig. XXVI.

Remarque. Nous pouvons faire sur ces courbes les mêmes observations que pour l'hélicoïde générale, car on voit que dans les 1ers et 5e cas, la courbe est composée de deux branches infinies δ et δ_1.

§ XVIII.

Vis carrée.

Pour la surface du filet de vis carrée, la génératrice droite A est horizontale; le cercle D a donc un rayon infini, et le cercle M a un rayon nul.

Le point p ne pourra donc avoir que trois positions remarquables.

Premier cas. *Le point* p *étant à distance finie du centre* o^h (rayon lumineux incliné).

La construction du point x de la courbe δ (*fig.* XXVII) nous montre de suite que cette courbe est un cercle tracé sur $\overline{o^h p}$ comme diamètre :

La ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface du filet de vis carrée sera donc une hélice (*).

Deuxième cas. *Le point* p *étant le centre* o^h (rayon lumineux vertical).

La courbe δ se réduit dans ce cas au centre o^h.

Troisième cas. *Le point* p *étant situé à l'infini* (rayon lumineux horizontal).

La ligne de séparation d'ombre et de lumière est située tout entière à l'infini.

§ XIX.

Mais au lieu de déduire le tracé et la forme de la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière de la vis triangulaire, de ce que nous avons dit par rapport à l'hélicoïde générale, et cela en supposant que le rayon du cercle M se réduise à zéro, nous pouvons chercher directement la solution de la question posée d'une manière spéciale pour la vis triangulaire.

Reprenant donc la fig. *e*, où nous avons construit le point x^h, qui appartient à la courbe, nous devons voir s'il ne serait pas possible de prouver que cette courbe jouit aussi de la propriété d'avoir un point fixe.

(*) Voyez dans les *développements de géométrie descriptive* ce que j'ai dit au sujet de la propriété dont jouit la surface du filet de vis carrée, savoir : d'être coupée suivant une hélice par tout cylindre de révolution passant par l'axe de la vis ; ou, *en d'autres termes*, ayant l'axe de la vis pour une de ses génératrices droites.

Et dès lors reprenant la fig. *e* (2ᵉ partie) pour en composer la fig. A, nous voyons qu'en faisant tourner la droite H' autour du centre o^h et d'un angle droit, le point *a* viendra en *a'*, le point *r* en *r'*, et le point *d* en x^h ; et cela parce que l'on a : $\overline{o^h b} = \overline{bd^h}$, puisque la droite B^h fait un angle demi-droit avec la ligne A^h.

Le point *a'* sera donc un point *fixe*.

Dès lors on en conclut que la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière de la vis triangulaire doit bien être construite ainsi que nous l'avons dit ci-dessus, § 16.

§ XX.

Lorsque le point fixe *a'* est supposé à l'infini, alors le rayon de lumière est horizontal ; dans ce cas, la ligne de séparation d'ombre et de lumière peut être considérée comme le contour apparent de la vis triangulaire, en supposant l'œil du spectateur situé à l'infini sur le rayon lumineux ; la projection horizontale de ce contour apparent se construit facilement, ainsi que nous l'avons dit, § 16.

Mais cette construction peut être simplifiée et de la manière suivante :

La fig. XXVI nous donne la fig. B; le point *x* est un point de la courbe ; l'angle $\widehat{lox}$ est droit.

Si nous menons par le centre *o* du cercle D une droite G perpendiculaire à la droite *oa'*, qui contient à l'infini le point *fixe a'*, cette droite G coupera le cercle D en *q*; et si nous menons en *q* une tangente K au cercle D, cette tangente K coupera le rayon *ox* au point *y*.

Or, je dis que l'on a toujours : $\overline{ox} = \overline{qy}$.

Et en effet :

Les deux triangles rectangles *yqo* et *xla* sont semblables, puisque les angles $\widehat{lxo}$ et $\widehat{qyo}$ sont égaux comme angles correspondants.

On a donc :

$$\overline{ol} : \overline{oq} :: \overline{ox} : \overline{qy}$$

Or $\overline{ol} = \overline{oq}$ comme rayons d'un même cercle, donc on a : $\overline{ox} = \overline{qy}$, ce qu'il fallait démontrer.

§ XXI.

Construction des compas propres à tracer la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière d'une vis à filet triangulaire.

Ces compas seront identiquement les mêmes que ceux qui nous ont servi pour tracer la projection de la ligne de séparation d'ombre et de lumière pour l'héli-

coïde générale. Il suffira de faire glisser la branche B, de manière à ce que le point s se superpose sur le centre o^h.

Les fig. XXVIII, XXIX et XXX donnent une idée suffisamment exacte de la forme et de la position des branches E, B et A, les unes par rapport aux autres.

QUATRIÈME PARTIE.

Construction de la ligne de séparation d'ombre et de lumière d'une surface hélicoïde générale, en supposant cette surface éclairée par un point lumineux.

Tout ce qui a été dit dans la première partie, au sujet des paraboloïdes, trouve encore son application, dans le cas où la surface hélicoïde est éclairée par un point lumineux.

Les constructions auxquelles nous serons conduit, pour déterminer les divers points de la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, sont déduites des mêmes principes qui nous ont servi lorsque nous supposions la surface éclairée par un rayon lumineux.

§ I.

Supposons que le point lumineux l soit projeté en l^h. (*fig.* C) et que nous voulions déterminer la projection x^h d'un point x de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, ce point x étant situé sur une génératrice droite A de la surface hélicoïde. Il est évident que toutes les considérations géométriques qui ont conduit à la fig. c (deuxième partie), alors que l'on supposait un *rayon* lumineux, apparaissent de nouveau ici dans le cas d'un *point* lumineux. Seulement la trace HP du plan P assujettie à passer par la génératrice droite A, ne sera plus déterminée par la trace horizontale du *rayon* lumineux passant par le point m, mais devra être déterminée par la condition de passer par le *point* lumineux l.

On mènera donc (*fig.* C) par le point l une droite parallèle à la génératrice A, laquelle coupera le plan horizontal mené au-dessous du point m à la distance connue: z=R tang α, en un point y; et en joignant les points y et z l'on aura la trace HP. Et le reste de la construction sera identiquement la même que celle de la fig. c (deuxième partie).

§ II.

Dans le cas où la surface était éclairée par un rayon de lumière, nous avons pu simplifier les constructions graphiques et arriver à l'invention de divers compas propres à tracer d'un mouvement continu la projection horizontale de la

ligne de séparation d'ombre et de lumière; pourrons-nous obtenir des résultats analogues dans le cas où la surface hélicoïde est éclairée par un point lumineux? c'est ce que nous allons examiner.

Si nous concevons diverses génératrices droites A, A', A'',..... de la surface hélicoïde, nous aurons une suite de plans P, P', P'',..... passant respectivement par ces génératrices droites de la surface hélicoïde et lesquels seront parallèles à une droite fixe L dans le cas d'un *rayon lumineux*, ou une suite de plans P_1, P'_1, P''_1,... passant respectivement par les mêmes génératrices droites de la surface hélicoïde et par un point fixe *l*, dans le cas d'un *point lumineux*.

Or, dans le premier cas, par le point *m* nous pourrons mener dans le plan P une droite K parallèle à la droite L; par le point *m'* nous pourrons mener dans le plan P' une droite K' parallèle à la droite L, ainsi de suite (les divers points *m*, *m'*,... étant situés sur l'hélice H décrite par le pied de la plus courte distance existant entre l'axe O de la surface hélicoïde et sa génératrice droite A).

Mais dans le deuxième cas, si par le point *m* on mène dans le plan P_1 une droite K_1 faisant avec le plan horizontal un angle θ; si par le point *m'* on mène dans le plan P'_1 une droite K'_1 faisant avec le plan horizontal le même angle θ, et ainsi de suite, on voit sans peine que toutes les droites K, K',.... seront parallèles entre elles, et que toutes les droites K_1, K'_1,.... ne seront pas parallèles entre elles.

Or c'est précisément parce que les droites K, K',.... étaient parallèles entre elles, que nous avons pu (§ X. 3e partie) simplifier la construction graphique donnée par la solution directe du problème, puisque nous avons été conduit à trouver que le point *p* était fixe; et comme il est évident par tout ce qui a été dit dans la troisième partie que ce point *p* ne peut être fixe que lorsque les diverses droites K, K',..... sont parallèles, on voit de suite que lorsque l'on aura des droites K_1, K'_1,.... non parallèles entre elles, le point *p* se mouvra sur un cercle C ayant le point o^h pour centre.

Et comme la position du point *p* sur le cercle C dépendra de la position que prendra chacun des plans P_1, P'_1,..... il s'en suit que, tout bien considéré, la construction à effectuer serait aussi longue que la construction directe que nous avons exposée ci-dessus (*fig.* C).

Nous n'irons pas plus avant sur ce sujet; peut-être un jour pourra-t-on, par queques considérations nouvelles, construire *mécaniquement* la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière d'une surface hélicoïde éclairée par un *point lumineux*, ainsi que nous avons pu le faire dans le cas où cette surface est éclairée par un *rayon lumineux*.

N° 5.

PROBLÈME.

Étant données deux droites A *et* B, *sur la première un point* a *et sur la seconde un point* b, *construire un cylindre de révolution tangent aux droites* A *et* B, *et respectivement en les points* a *et* b.

Nous plaçons ce problème après le mémoire n° 4, l'une de ses solutions nous ramenant à la propriété de la parabole dont il a été question dans la première partie du mémoire n° 4 précédent; et quoique ce problème n'ait aucun rapport à la théorie des ombres, nous avons cru pouvoir le placer ici, parce qu'il n'est pas sans intérêt *en géométrie descriptive.*

§ I.

Soient données deux droites A et B; menons par la droite A un plan P parallèle à la droite B, et par la droite B un plan Q parallèle à la droite A.

Cela fait, prenons la plus courte distance D existant entre les droites A et B et coupant la droite A au point p et la droite B au point q.

Nous pouvons sur la droite $\overline{pq}$, comme diamètre, construire une sphère S, qui sera évidemment tangente en p et q aux plans P et Q.

Tous les cylindres tangents à la sphère S seront de révolution et seront tangents aux droites A et B en les points p et q.

Les axes de révolution de ces divers cylindres sont tous situés sur un plan R perpendiculaire à la plus courte distance D, et passant par son milieu d.

Ainsi, lorsque les points a et b ne sont autres que les pieds p et q de la plus courte distance existant entre les droites données A et B, le problème a une infinité de solutions.

§ II.

Prenons sur chacune des droites A et B, savoir: un point a sur A et un point b sur B; ces points a et b n'étant plus les pieds de la plus courte distance D existant entre les droites A et B.

Par le point o milieu de ab nous pourrons mener un plan R parallèle aux plans P et Q déterminés ainsi qu'il a été dit ci-dessus § I.

Par le point o nous mènerons une droite K perpendiculaire au plan R et coupant le plan P en un point a' et le plan Q en un point b'.

Les droites aa' et bb' seront parallèles.

Nous pourrons mener par la droite K un plan perpendiculaire aux droites aa' et bb' et tracer dans ce plan un cercle C ayant $a'b'$ pour diamètre et le point o pour centre.

Le cercle C sera évidemment tangent en a' au plan P et en b' au plan Q.

Dès lors il est évident que le cylindre Σ, qui aura le cercle C pour courbe directrice et ses génératrices droites parallèles aux droites parallèles aa' et bb', sera de révolution et aura son axe de rotation situé dans le plan R ; cet axe passera par le point o et sera parallèle aux génératrices droites diamétrales aa' et bb' de ce cylindre Σ. Et à mesure que l'on fera varier la position des points a et b sur les droites données A et B, le cylindre Σ changera de position et de rayon ; mais son axe de rotation restera toujours dans le plan R. Et pour chaque position particulière des points a et b il n'y aura qu'un cylindre, et ainsi le problème n'aura qu'une solution.

§ III.

Étant donnés un point a sur la droite A et un point b sur la droite B, menons par le point o milieu de $\overline{ab}$ un plan Z perpendiculaire à cette droite $\overline{ab}$.

Ce plan Z coupera la droite A au point x et la droite B au point y.

En joignant les points x et y nous aurons une droite L, et de telle sorte que les droites L et A détermineront un plan P_1 et que les droites L et B détermineront un plan Q_1 ; ces deux plans P_1 et Q_1 se coupant suivant la droite L.

Cela posé,

Il est évident que chacun des points du plan Z est également distant des points a et b. Par conséquent, si l'on prend sur la droite L un point l, les droites la et lb seront égales ; dès lors, aussi, si du point a on abaisse une perpendiculaire am sur la droite L, et si du point b on abaisse une perpendiculaire bn sur la même droite L (les points m et n étant sur la droite L les pieds des perpendiculaires abaissées), on aura :

$$\overline{am} = \overline{bn}.$$

Et si du point o, milieu de $\overline{ab}$, on abaisse une perpendiculaire sur la droite L, son pied i et les points m et n se confondront en un seul et même point.

Cela posé,

Menons par les points a et b deux droites A' et B' parallèles à la droite L, les

droites A et A' seront dans le plan P_1 et les droites B et B' seront dans le plan Q_1.

Si par le point o nous menons un plan Y perpendiculaire à la droite L, il coupera le plan P_1 suivant une droite T et le plan Q_1 suivant une droite Θ.

Ce plan Y coupera la droite L précisément au point i, et la droite A' au point a, et la droite B' au point b.

Et il est évident que les droites T et Θ ne seront autre que les droites $\overline{ia}$ et $\overline{ib}$; et nous savons que l'on a : $\overline{ia} = \overline{ib}$.

Nous pourrons donc tracer dans le plan Y un cercle C' tangent en a et b aux droites T et Θ, et le regarder comme la section droite d'un cylindre de révolution Δ ayant son axe de rotation parallèle à la droite L.

Ce cylindre Δ sera évidemment tangent en a et b aux droites données A et B.

Et l'on voit de suite que, pour le cylindre Σ déterminé § 2, le plan $aa'bb'$ est un plan *diamétral*, tandis que pour le cylindre Δ, que nous venons de déterminer § 3, le plan $aA'bB'$ est un plan *corde*.

Ou, en d'autres termes, pour le *cylindre* Σ la droite $\overline{a'ob'}$ est un *diamètre* de la section droite et circulaire C, et pour le cylindre Δ, la droite $\overline{aob}$ est une *corde* de la section droite et circulaire C'.

§ IV.

Étant donné un point fixe a sur la droite A, on peut se demander de chercher le *lieu* des axes des cylindres de révolution qui seraient tous tangents en a à la droite A, et respectivement tangents à la droite B en ses divers points b, b_1, b_2,... Pour résoudre cette question, faisons passer par le point a et la droite B un plan que nous prendrons pour plan horizontal de projection.

La droite A se projettera sur ce plan suivant A^h (*fig.* M).

Cela posé :

Les axes des cylindres de révolution Δ, Δ_1, Δ_2... cherchés, seront respectivement situés dans les plans Z, Z_1, Z_2,... menés perpendiculairement aux droites ab, ab_1, ab_2,... et respectivement par les milieux o, o_1, o_2... de ces droites.

Or ces plans Z, Z_1, Z_2,... sont tous verticaux, tous perpendiculaires au plan horizontal de projection.

En sorte que si, par les milieux o, o_1, o_2,... des divergentes ab, ab_1, ab_2,... nous menons des perpendiculaires H^z, H^{z_1}, H^{z_2},... à ces droites, nous aurons les traces horizontales des divers plans Z, Z_1, Z_2.... Mais les points o, o_1, o_2... sont sur une droite I parallèle à la droite B ; et dès lors, en vertu de ce qui a été dit dans le mémoire n° 4, les droites H^z, H^{z_1}, H^{z_2}... sont les tangentes d'une parabole δ ayant le point a pour *foyer* et la droite B pour *directrice*. Les axes des cylindres

de révolution sont donc distribués sur les divers plans Z, Z_r, Z_t ... tangents à un cylindre vertical ayant la parabole ∂ pour section droite.

§ V.

Il sera facile de construire les projections de l'axe U_t de l'un de ces cylindres de révolution ; et, en effet :

Prenons pour plan vertical de projection un plan parallèle à la droite A. Dès lors la ligne de terre (*fig.* M) sera parallèle à A^h; et projetant le point a en a^v sur la ligne de terre LT, et traçant la droite A^v faisant avec LT l'angle que la droite A fait avec le plan horizontal (angle qui est connu, qui est donné, puisqu'il est égal à l'angle que font entre elles les droites données A et B), on aura la projection verticale de la droite A.

Cela fait :

Par le milieu o_t de la droite ab_t menant la droite H^{z_t} perpendiculaire à $\overline{ab_t}$, cette droite H^{z_t} sera tangente à la parabole ∂ et coupera la droite B au point y et la droite A^h au point x^h (x^v sera sur A^v).

La droite L_t qui unit les points x et y sera parallèle à l'axe U_t cherché.

Donc U_t^h sera parallèle à H^{z_t}, qui n'est autre que L_t^h et U_t^v sera parallèle à L_t^v (cette droite L_t^v est facile à construire, puisque l'on connaît les points x et y qui la déterminent).

Le centre p_t de la section droite et circulaire du cylindre Δ_t (cylindre ayant U_t pour axe) sera sur le plan Z_t; donc le point p_t^h sera sur la droite H^{z_t}; et comme le cylindre Δ_t doit être tangent en a au plan (L_t, A), ce point p_t s'obtiendra par l'intersection du plan Z_t et de la normale R_t menée au point a au plan (L_t, A).

Désignant ce plan (L_t, A) par P_t, la droite ay ne sera autre que H^{z_t}, et dès lors la droite R_t^h, menée par le point a perpendiculairement à la trace H^{P_t} sera la projection horizontale du rayon d'un cercle qui sera la section droite du cylindre Δ_t.

Cette droite R_t^h coupera la droite H^{z_t} en un point p_t^h qui sera la projection horizontale du centre du cercle-section droite du cylindre Δ_t.

Il sera facile de déterminer p_t^v ; et les droites U_t^h et U_t^v menées par les points p_t^h et p_t^v respectivement parallèles aux droites L_t^h et L_t^v seront les projections de l'axe U_t du cylindre de révolution Δ_t tangent, en a à la droite A et en b_t à la droite B.

§ VI.

Mais, en vertu de la construction effectuée pour trouver, sur le plan horizontal de projection, le point p_t^h, on reconnaît que ce point est situé sur la parabole ∂, et qu'il n'est autre que le contact de cette parabole ∂ et de sa tangente H^{z_t}.

Par conséquent, le lieu des divers centres p_1, p_2, p_3... des sections circulaires des divers cylindres Δ_1, Δ_2, Δ_3... sera une courbe $\mathcal{E}$ qui se projettera horizontalement suivant la parabole δ.

Mais comme, quel que soit le point b_1, b_2, b_3... que l'on considère sur la droite B, on aura toujours les traces V^{P_1}, V^{P_2}, V^{P_3}... parallèles à A^v, il s'ensuit que les points p_1^v, p_2^v, p_3^v... seront tous situés sur la droite R_1^v menée par le point a^v perpendiculairement à la projection verticale A^v de la droite A.

Dès lors on doit en conclure que la courbe $\mathcal{E}$ est une courbe plane, et qu'elle est la parabole section faite dans le cylindre vertical et parabolique ayant la courbe δ pour trace horizontale, par un plan mené par le point a perpendiculairement à la droite A.

N° 6.

(MÉMOIRE INÉDIT.)

CONSTRUCTION DE LA TANGENTE EN UN POINT 1° DU CONTOUR APPARENT DE LA SURFACE DE LA VIS TRIANGULAIRE ; 2° DE LA PROJECTION HORIZONTALE DE LA COURBE DE SÉPARATION D'OMBRE ET DE LUMIÈRE DE LA SURFACE DE LA VIS TRIANGULAIRE (1).

§ I.

De la tangente en un point du contour apparent de la surface de la vis par la méthode de ROBERVAL.

Il s'agit de construire :

1° La tangente à la projection horizontale de la courbe en question ; 2° la tangente à la projection verticale de la même courbe. (Cette seconde tangente se déduit de la première au moyen du plan tangent.)

---

(1) Les recherches géométriques consignées dans ce mémoire sont de M. PONCELET ; la rédaction est de M. BARDIN, répétiteur des travaux graphiques à l'École polytechnique.

En 1827, M. PONCELET, qui était alors professeur de mécanique à l'École d'application de Metz, communiqua à M. BARDIN, qui était à cette époque professeur à l'École régimentaire d'artillerie de la même ville, les notes que je publie ici sous le n° 6, et qui étaient déjà anciennes, puisqu'elles dataient de l'École polytechnique.

MM. PONCELET et GUILLEBON étaient élèves à l'École polytechnique en 1809, et ce fut cette année qu'ils trouvèrent une construction très-simple de la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et

Rappelons d'abord la construction graphique de la projection horizontale de la courbe.

AP et AB (*fig.* 1) sont deux droites perpendiculaires entre elles;

P est un point fixe ou *pôle* (c'est le pied de l'axe de la vis sur le plan horizontal);

PB rayon vecteur tournant autour du point P, en s'appuyant sur la droite AB.

Cela posé:

Si l'on prend PX = AB, le point X appartient à la courbe.

Le point générateur X peut être censé animé de deux mouvements : l'un angulaire autour du pôle P, mouvement qui peut se mesurer sur la perpendiculaire en X au rayon vecteur; l'autre de translation vers le point B, en suivant le rayon vecteur.

Or, d'après le principe de ROBERVAL, la résultante de ces deux mouvements a pour direction la tangente à la courbe au point X.

La solution du problème se réduit donc à la détermination des vitesses composantes.

En comparant le mouvement du point X à celui du point B le long de la droite AB, on voit :

1° Que la vitesse de translation du premier point (qui est le point X), le long du rayon vecteur PX, est la même que celle du point B le long de la droite AB, car leurs accroissements sont sans cesse égaux.

Or ce que l'on appelle, ici, vitesses ou *fluxions* n'est pas autre chose que le rapport des accroissements infiniment petits de deux quantités variables; c'est-à-dire le rapport de leurs différentielles.

Soit donc B*b* (*fig.* 2) la vitesse du point B, celle du point X sera X*x*, égale à B*b*.

---

de lumière, et du contour apparent de la vis triangulaire. Leur solution était très-différente de celle donnée par HACHETTE. A cette époque, la solution de M. PERSY n'était point connue à l'École polytechnique, ni celle de M. FRANÇAIS, puisque cette dernière ne fut publiée dans la Correspondance de l'École polytechnique qu'en 1810.

La construction graphique de la projection horizontale des deux courbes, que rappelle M. PONCELET dans les notes que je publie ici, est précisément celle sur laquelle je suis retombé en 1819, en passant de l'hélicoïde générale à une surface plus simple, celle de la vis triangulaire. Il est évident que MM. PONCELET et GUILLEBON avaient, en 1809, trouvé, pour la vis triangulaire, précisément la méthode à laquelle je fus conduit, sans connaître leur travail sur la vis à filet triangulaire, et que j'ai appliqué à l'hélicoïde générale; car on doit le faire remarquer, cette méthode est la seule, entre toutes celles exposées jusqu'à présent, qui conduise à la découverte du point *fixe* qui sert à simplifier d'une manière si élégante la construction, par *points*, de la courbe cherchée.

La *priorité* de cette méthode appartient donc à MM. PONCELET et GUILLEBON. Il est à regretter que les recherches de MM. PONCELET et GUILLEBON n'aient point été immédiatement publiées dans la Correspondance de l'École polytechnique. M. GUILLEBON était, à l'époque de sa mort arrivée en décembre 1841, ingénieur en chef et professeur à l'École des ponts et chaussées. T. O.

2° Que les points X et B, situés sur le même rayon vecteur, ont la même vitesse angulaire; et les arcs circulaires infiniment petits parcourus par chacun d'eux, sont proportionnels à leurs distances PX et PB du centre P.

Donc, la vitesse de rotation de l'un conduira à celle de l'autre.

Or, si l'on décompose la vitesse de translation du point B sur la droite AB, en deux, l'une suivant PB et l'autre suivant Bb' perpendiculaire à PB, la dernière sera évidemment la vitesse de rotation du point B autour du point P. En vertu du parallélogramme Bb_1bb', Bb' sera la vitesse élémentaire du point B sur Bb'. En effet, soit Bb infiniment petit, la ligne bb' est sensiblement la direction du rayon vecteur correspondant, et Bb' est un arc circulaire infiniment petit, décrit du point P comme centre. Or, Bb étant bien l'accroissement de AB, bb' est l'accroissement du rayon vecteur correspondant, et Bb' (arc circulaire infiniment petit décrit par le point B) est l'accroissement élémentaire de l'arc total BC.

Cela dit, reportons-nous au point X; l'arc qu'il décrit, dans le même mouvement, devant être proportionnel à l'arc Bb', sera obtenu en traçant la droite Pb, qui coupe la droite Xx' (menée perpendiculairement à la droite PB) au point x'. L'arc Xx' sera la vitesse de rotation du point X.

Connaissant la vitesse de translation Xx_1 du point X et sa vitesse de rotation Xx', on aura celle de son mouvement réel à l'aide de la diagonale Xx du parallélogramme $Xx'xx_1$.

Or Xx est l'élément prolongé de la courbe que décrit le point X, cette droite Xx est donc la tangente à la courbe décrite par le point X et en ce point X. On peut objecter que les vitesses ou accroissements qu'on considère sont censés infiniment petits, et que cependant on opère dans le tracé sur des longueurs finies.

Mais il faut remarquer qu'on n'a considéré que les rapports des accroissements des quantités variables, en sorte que la longueur Bb, qui représente l'accroissement de AB est tout à fait arbitraire; car la direction de la droite Xx, qui ne dépend que du rapport existant entre Xx' et Xx_1, restera toujours la même; en sorte que si l'accroissement Xx de la courbe change, néanmoins son rapport avec l'accroissement Bb n'aura pas changé.

Au surplus, la considération des deux mouvements du point X et des vitesses qui en résultent n'est pas indispensable pour trouver la direction de la tangente en ce point X de la courbe.

Le parallélogramme des vitesses ne sert, dans la construction précédente, qu'à faire trouver l'accroissement de l'arc de la courbe, au moyen des accroissements des coordonnées (du point X) qui lui correspondent. Aussi peut-on simplifier la construction précédente en remplaçant les auxiliaires Bb, Bb', Bb_1,... etc., par les données de la figure elle-même.

Première simplification. Au lieu de prendre B*b* (*fig.* 2) arbitraire et à droite du point B, on peut prendre AB (*fig.* 3) lui-même et former le parallélogramme AB,BB'. Dès lors, PX égal à AB représentera la vitesse du point X le long du rayon vecteur PB.

La vitesse de rotation XX' du point X autour du point P s'obtiendra en tirant la droite PB' et en élevant XX' perpendiculaire à PB. La diagonale X*x* du parallélogramme PXX'*x* sera la direction de la tangente au point X de la courbe.

Remarquons que le côté *x*X' du parallélogramme XX'P*x* rencontre la droite PA en un point K, et la droite XK est parallèle à la droite AB, car les triangles AB'B et KX'X sont semblables et ont leurs côtés parallèles.

Deuxième simplification. La remarque précédente conduit à une construction plus simple de la tangente X*x*, et en effet (*fig.* 4) on peut obtenir immédiatement le point K en menant par le point X une parallèle à AB. Cela fait, menons par le point K une droite K*x* parallèle au rayon vecteur PX, et par le point P une droite P*x* perpendiculaire à ce rayon vecteur PX; les droites K*x* et P*x* se couperont en un point *x* qui appartiendra à la tangente X*x* à mener à la courbe et au point X.

Troisième simplification. La construction précédente conduit à une construction plus simple encore.

Sur AP comme diamètre (*fig.* 5), tracez la demi-circonférence AQP; menez la corde AQ parallèle au rayon vecteur PX; tracez la droite BQ, elle sera une parallèle à la tangente demandée.

Et en effet : d'après la construction, les figures PQAB et P*x*KX sont semblables et semblablement placées; les diagonales BQ et X*x* sont donc parallèles.

Les dernières constructions montrent de suite 1° que la droite AB est une asymptote de la courbe lieu des points X..., et 2° que cette courbe touche la droite AP au point P.

§ II.

De la tangente à la projection horizontale de la courbe de séparation d'ombre et de lumière sur la surface de la vis, par la méthode de ROBERVAL.

Rappelons d'abord la génération de la courbe.

On donne 1° le cercle BDE (*fig.* 6); 2° l'angle droit BCD dont le sommet reste toujours au centre C; 3° le point P, point *fixe* ou pôle.

Pour construire les divers points de la courbe, on exécute les opérations graphiques suivantes.

Soit l'angle droit BCD (*fig.* 6) dans une position quelconque ; le côté CB coupe le cercle donné au point B ; tracez la droite PB, le point X en lequel le rayon vecteur PB coupe le second côté CD prolongé, est un point de la courbe demandée.

Cela posé :

Le point générateur X a deux mouvements de rotation relatifs : l'un autour du centre C, l'autre autour du pôle P. Il ne reste donc qu'à trouver les vitesses qui en résultent.

La vitesse de rotation du point X autour du pôle P et celle du point B autour du même *pôle*, sont proportionnelles aux rayons vecteurs PX et PB. Mais le point B est animé d'une vitesse dirigée suivant la tangente Bb au cercle BDE, laquelle peut se décomposer en deux, l'une de translation suivant Bb_1 (sur le rayon vecteur PB), et l'autre de rotation autour du pôle P suivant la perpendiculaire Bb' à PB.

Prenant donc à volonté la résultante Bb, on aura le parallélogramme B$b'bb_1$, qui donnera en Bb' la vitesse de rotation Bb' du point B.

Passons du point B au point X, lequel est situé sur le rayon vecteur PB.

Tirons la droite Pb', et marquons sa rencontre x' avec la perpendiculaire Xx' à PB, nous aurons en Xx' la vitesse de rotation du point X autour du pôle P.

Reste à trouver la vitesse de rotation du point X autour du centre C.

On la déduit de la vitesse de rotation du point D autour du centre C, en employant la même méthode que précédemment.

Ainsi : la vitesse de rotation du point D autour du centre C étant évidemment la même que celle du point B autour du même centre, l'on prendra sur la tangente en D au cercle BDE, une longueur Dd = Bb, et l'on aura en Dd la vitesse de rotation du point D, et l'on en déduira la vitesse de rotation Xx_1 du point X autour du centre C.

Mais il faut remarquer que les vitesses de rotation Xx' et Xx_1, que l'on vient de trouver ne sont pas réellement les vitesses composantes de la vitesse absolue du point générateur X (*).

(*) Le principe posé par Roberval n'a jamais été ambigu pour les géomètres qui en ont bien compris l'esprit.

Ainsi un point générateur d'une courbe plane ne peut se mouvoir sur un plan que de trois manières différentes :

Ou 1° il est sollicité en ligne droite, à chaque instant de son mouvement, par deux forces de direction constante, dites forces de translation, et alors la tangente est la résultante des vitesses imprimées séparément par chacune des deux forces, suivant la direction de chacune d'elles. Alors la tangente est la diagonale du parallélogramme construit, les droites représentant les vitesses.

Ou 2° il est sollicité, à chaque instant de son mouvement, par deux forces de rotation, chacune d'elles agissant autour d'un centre particulier ; et alors un point de la tangente se détermine par l'intersection des

En effet : en combinant la vitesse de rotation Xx' du point X autour du pôle P, avec la vitesse de translation Xy' de ce même point X sur le rayon vecteur PX,

---

deux rayons vecteurs transportés, parallèlement à eux-mêmes, à une distance finie du point considéré sur la courbe, les deux distances finies étant entre elles dans le même rapport que les arcs infiniment petits décrits dans le même temps par le point de la courbe, et respectivement autour de chacun des centres fixes. La tangente est alors la diagonale d'un quadrilatère bi-rectangle.

Ou 3° il est sollicité, à chaque instant de son mouvement, en ligne droite d'abord, par une force de translation dirigée dans le sens du rayon vecteur, et ensuite circulairement autour d'un centre fixe par une force de rotation, et la tangente s'obtient alors en combinant les deux principes ci-dessus. La tangente est alors la diagonale d'un rectangle.

La solution donnée par M. Poncelet est conforme (et cela devait être) à ces préceptes, qui n'étaient et ne sont ignorés d'aucun des géomètres qui ont eu et qui ont l'occasion d'appliquer le principe remarquable de Roberval.

Tout le monde savait, et depuis longtemps, qu'un illustre savant avait commis une erreur en construisant la tangente à l'ellipse par la méthode de Roberval (la direction de la tangente était exacte, quoiqu'il eût mal appliqué la méthode); mais on n'avait pas cru, par respect, devoir relever cette erreur, parce qu'on la regardait, et je crois avec raison, comme une *inadvertance* qui ne pouvait tirer à conséquence.

Il ne faut pas cependant croire que le principe de *Roberval* puisse toujours être appliqué immédiatement en géométrie descriptive (en d'autres termes lorsque l'on se sert de la langue graphique); et, en effet, pour pouvoir appliquer graphiquement le principe de *Roberval*, il faut :

Dans le premier mode de génération de la courbe, désignant par x et y la direction des deux forces qui sollicitent son point m, il faut connaître la valeur finie du rapport $\frac{dy}{dx}$, et cela par la seule construction graphique de la courbe et sans avoir besoin de recourir à l'*équation* de la courbe qui fera $f(x, y) = 0$ (en coordonnées rectangulaires ou obliques), et ainsi sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*.

Dans le deuxième mode de génération de la courbe, désignant par r et r' les deux rayons vecteurs partant des points ou centres de rotation pour aboutir à un point m de la courbe, il faut connaître, en désignant par ω et ω' les cercles des rayons r et r', la valeur finie du rapport $\frac{d\omega}{d\omega'}$, et cela par la seule construction graphique de la courbe, et ainsi sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*, et par conséquent sans avoir besoin de recourir à l'équation $f(r, r') = 0$ de la courbe.

Dans le troisième mode de génération de la courbe, désignant par r la direction de la force rectiligne appliquée au point m de la courbe, et par ω le cercle que ce point m tend à décrire autour du point fixe (ce cercle ω ayant son rayon égal à r), il faut connaître la valeur finie du rapport $\frac{dr}{d\omega}$, par la seule construction graphique de la courbe et sans avoir besoin de recourir à son *équation*, qui sera dans ce cas $f(r, \omega) = 0$.

Car si pour trouver la valeur finie de l'un de ces rapports il est nécessaire de recourir à l'équation de la courbe, et dès lors s'il est nécessaire d'exécuter des calculs analytiques, on ne fera autre chose que chercher l'équation de la tangente au point m; car, si l'on y regarde de près, on verra bien vite qu'en calculant par l'*analyse* l'un quelconque de ces rapports, on calcule précisément ce qu'il faut pour obtenir l'*équation* de la tangente.

Si la méthode de *Roberval* s'applique si utilement à la construction de la tangente en un point d'une section conique, c'est précisément parce que l'on voit de suite, par la construction graphique seule de la courbe, et en vertu des propriétés géométriques qui se déduisent tout naturellement de cette construction, que le rapport $\frac{d\omega}{d\omega'}$ est égal à la l'unité.

Et en effet :

Soit donnée une ellipse ou une hyperbole (*fig.* 13) ayant les points f et f' pour foyers, en supposant que le point m' est infiniment voisin du point m, l'arc mn sera $d\omega$ et l'arc mn' sera $d\omega'$.

on obtiendrait la vitesse réelle Xx du point X sur la courbe décrite par ce point X ; en sorte que Xx' n'est qu'une des vitesses composantes de Xx par rapport aux

---

Or en vertu de l'équation $r \pm r' = c$ de la courbe, on voit que l'on a $dr = \mp dr'$, et qu'aussi $\overline{m'n} = \overline{m'n'}$. Le quadrilatère bi-rectangle $mnm'n'$ est donc inscriptible dans un cercle ayant $\overline{mm'}$ pour diamètre.

Or l'on sait que dans un tel quadrilatère, lorsque les côtés $m'n$ et $m'n'$ sont égaux, les autres côtés mn et mn' sont aussi égaux, et ainsi l'on a : $\frac{d\omega}{d\omega'} = 1$, tout comme l'on a : $\frac{dr}{dr'} = 1$.

L'on peut donc appliquer ***graphiquement*** le principe de Roberval, et l'on voit aussi que pour les sections coniques, peu importe, pour obtenir la tangente, de construire 1° un parallélogramme sur $m'n$ et $m'n'$ (ou sur dr et dr'), ou 2° un quadrilatère bi-rectangle sur mn et mn' (ou sur $d\omega$ et $d\omega'$), ou 3° un quadrilatère bi-rectangle sur dr compté sur le rayon vecteur r à partir du point m, et sur dr' compté sur le rayon vecteur r' et aussi à partir du point m.

Il n'en serait pas de même si la courbe à deux foyers avait pour équation $\varphi(r, r') = 0$; il faudrait de toute nécessité recourir à l'***analyse***, car il faudrait différencier l'équation de la courbe, pour obtenir le rapport $\frac{dr}{dr'}$.

Si l'équation de la courbe était $r^m \pm r'^n = c$ (1), on aurait en différentiant

$$mr^{(m-1)}dr \pm nr'^{(n-1)}dr' = 0.$$

D'où l'on tire :

$$\frac{mr^{(m-1)}}{nr'^{(n-1)}} = \mp \frac{dr'}{dr}.$$

On porterait donc sur le rayon vecteur r, à partir du point m, la longueur $nr'^{(n-1)}$, et sur le rayon vecteur r', à partir du point m, la longueur $mr^{(m-1)}$, et cela de la manière suivante : en sens contraire si l'on prend le signe (+) dans l'équation (1), et dans le même sens si l'on prend le signe (—) dans l'équation (1).

Et en construisant un quadrilatère bi-rectangle sur ces longueurs, la diagonale de ce quadrilatère donnera la direction de la tangente au point m de la courbe; et l'on voit de suite que l'on ne peut pas construire un parallélogramme sur dr et dr', car la diagonale de ce parallélogramme ne se confondra avec celle du quadrilatère bi-rectangle que dans le cas tout particulier où l'on a : $dr = dr'$.

Mais l'équation : $\varphi(r, r') = 0$, de la courbe ne permettra pas toujours, quoique l'on en déduise

$$\frac{dr}{dr'} = \varphi'(r, r'),$$

d'avoir ***séparément*** et de suite le rapport de dr à une quantité finie, et le rapport de dr' à une autre quantité finie, ce qui est nécessaire pour pouvoir appliquer ***graphiquement*** le principe de Roberval; alors on attribuera à dr une longueur finie et arbitraire A, et l'on aura pour dr' une longueur finie $B = \frac{A}{\varphi'(r, r')}$ que l'on sera obligé de construire ou de calculer.

Et l'on opèrera graphiquement sur les longueurs A et B, portées, la première sur le rayon vecteur r, et la seconde sur le rayon vecteur r', comme nous l'avons dit ci-dessus, en ayant égard au signe de A et de B, et ainsi nous construirons sur A et B un quadrilatère bi-rectangle dont la diagonale sera la tangente demandée.

Cette discussion nous fait bien voir que l'emploi du principe de Roberval, en géométrie descriptive, n'est pas toujours ***immédiatement*** applicable, son application étant considérée sous le point de vue ***graphique***.

Voyez encore, à ce sujet, ce que nous avons dit dans les ***développements de géométrie descriptive***, touchant la construction de la tangente en un point de l'épicycloïde annulaire. T. O.

directions particulières Py' et Xx'. Même chose a lieu pour la vitesse de rotation Xx_1. Donc la résultante des deux vitesses Xx' et Xx_1 ne donnera pas la vitesse réelle du point X.

Ainsi, dans le cas particulier qui nous occupe en ce moment, la diagonale du parallélogramme construit sur Xx' et Xx_1 ne donnera pas la tangente au point X de la courbe.

On se rend parfaitement raison de ce qui précède, en remarquant que les vitesses Xx' et Xx_1 ne sont que des quantités proportionnelles aux arcs infiniment petits que le point X tend à décrire réciproquement autour des pôles P et C. En sorte que les positions des nouveaux rayons vecteurs sont les droites $x'x$ et x_1x, parallèles aux rayons vecteurs primitifs PX et CX. Dès lors, l'intersection x de ces rayons vecteurs $x'x$ et x_1x représente la nouvelle position du point X.

Si les quantités Xx' et Xx_1 étaient réellement infiniment petits, Xx serait aussi infiniment petit et serait dès lors l'élément de la courbe décrite par le point X.

Mais comme on a augmenté ces quantités proportionnellement, la droite Xx devient une quantité finie prolongement de l'élément de la courbe, et par suite la tangente à la courbe.

Première simplification. Rien n'empêche de prendre Bb égale à la tangente Dd (*fig.* 7) arrêtée à la droite fixe PC.

Alors, si l'on prolonge $b'b$, qui est parallèle au rayon vecteur PB, jusqu'à sa rencontre Q avec l'autre rayon vecteur CX, le quadrilatère CBb'Q aura ses côtés parallèles et sera semblable au quadrilatère ci-dessus (*fig.* 6) $x'Xx_1x$, dont la diagonale est la tangente demandée. En sorte que la diagonale BQ du quadrilatère CBb'Q sera parallèle à la tangente au point X de la courbe.

La construction à exécuter sera donc la suivante.

Tracez (*fig.* 7) les tangentes Bb et Dd au cercle EBD et aux extrémités de ses rayons CB et CD ;

Prenez Bb = Dd ;

Tracez bQ parallèle au rayon vecteur PX, et marquez sa rencontre Q avec le rayon vecteur CX ;

BQ sera une parallèle à la tangente au point X de la courbe.

Deuxième simplification. Comme la tangente Bb est parallèle au rayon vecteur CX (puisque le triangle XCB est rectangle en C), il s'ensuit (*fig.* 7) que la figure BbQX est un parallélogramme, et que dès lors on a : QX = Bb = Dd.

Il suffit donc, pour avoir la tangente au point X, d'effectuer la construction suivante :

Portez Dd sur le rayon vecteur CX, prolongé, de X en Q (*fig.* 8) ; la droite bQ sera parallèle à la tangente demandée.

Troisième simplification. On peut se dispenser de construire la droite bQ parallèle à la tangente demandée, car on peut exécuter la construction suivante :

Tracez la tangente BQ′ au point B du cercle EBD (*fig.* 8) ;

Portez sur cette tangente, BQ′ = Dd ;

Portez sur le rayon vecteur CX prolongé, XQ = Dd.

Le point Q′ sera évidemment un point de la tangente à mener au point X de la courbe.

§ III.

Discussion de la courbe projection de la ligne de séparation d'ombre et de lumière de la vis triangulaire.

Le mode de construction au moyen duquel on détermine les divers points de la courbe, montre qu'elle est composée de deux branches infinies passant, l'une par le point fixe P, et l'une et l'autre par le centre C du cercle (*fig.* 9).

En cherchant les tangentes pour les points situés à l'infini sur ces branches, on trouvera, par la méthode des tangentes exposées ci-dessus :

1° Que ces asymptotes sont au nombre de deux, se croisant au point fixe P et tangentes l'une et l'autre au cercle ayant le point C pour centre.

2° Que la tangente en C aux deux branches est perpendiculaire à la droite fixe PC (ce qui est d'ailleurs évident en vertu de la symétrie des courbes par rapport à cette droite PC).

3° Que les tangentes au point P passent par les extrémités du diamètre BB′ perpendiculaire à la droite fixe PC, etc., etc.

CAS PARTICULIERS.

PREMIER CAS. *Le point fixe P étant situé sur le cercle ayant le point C pour centre.*

La courbe ne conserve plus (*fig.* 10) que la branche infinie ayant un point multiple au point fixe P.

Cette courbe a pour asymptote une droite FG perpendiculaire à la droite fixe PC et à une distance PR = PC du point fixe P.

Cette courbe jouit de la propriété suivante :

Si l'on mène un rayon vecteur CK quelconque, coupant : 1° la tangente PT, menée au point P du cercle, en le point K, et 2° la courbe en les deux points X et X′, on aura :

$$KX = KX' = KP.$$

On peut facilement démontrer cette propriété, et en effet :

Menons 1° le rayon vecteur PX coupant le cercle en B, et 2° le rayon vecteur PX′ coupant le même cercle en B′.

Les triangles XCB et X′CB′ sont tous deux rectangles en C, on a donc :

$$\widehat{CXB} = 100^\circ - \widehat{CBX}.$$

$$\widehat{XPK} = 100^\circ - \widehat{XPR} = 100^\circ - \widehat{CPB}.$$

Mais le triangle CPB est isocèle, on a donc :

$$\widehat{CPB} = \widehat{CBX};$$

d'où

$$\widehat{XPK} = 100^\circ - \widehat{CBX} = \widehat{CXB}.$$

Le triangle XKP est donc isocèle, et l'on a :

$$KX = KP.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Deuxième cas. *Le point fixe* P *est situé à l'infini, alors le rayon de lumière est horizontal, et dans ce cas, la courbe de séparation d'ombre et de lumière n'est autre que le contour apparent de la vis.*

La construction de la tangente en un point X de la courbe reste la même que celle que nous avons exposé à la fin du § 2. *Voyez* la fig. 11.

Troisième cas. *Le point fixe* P *étant dans l'intérieur du cercle.*

La courbe est fermée; elle a la forme indiquée (*fig.* 12).

Elle a un point multiple au point fixe P.

Elle a une tangente commune en C, laquelle est perpendiculaire à la droite PC.

Elle est tangente au cercle en les points N et N′, en lesquels le cercle est coupé par la droite menée par le point fixe P perpendiculairement à la droite PC.

Les tangentes au point multiple P passent respectivement par les points B et B′, en lesquels le cercle est coupé par son diamètre perpendiculaire à PC.

Pour construire la tangente en un point quelconque X de la courbe, on mènera CX coupant le cercle en D ; la tangente en D au cercle coupera la droite PC en *d*.

On mènera PX coupant le cercle en T; on mènera en T la tangente au cercle, et l'on prendra sur cette tangente TQ′ = D*d*. La droite Q′X sera la tangente demandée.

N° 7.

CONSTRUIRE LA LIGNE DE SÉPARATION D'OMBRE ET DE LUMIÈRE SUR UN PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

Nous nous proposons de déterminer la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur un paraboloïde hyperbolique supposé éclairé par un faisceau de rayons lumineux parallèles entre eux.

§ I.

Nous savons ce qui suit :

1° La courbe de contact d'un paraboloïde hyperbolique et d'un cylindre est une parabole (*).

2° Tout cylindre qui a pour *directrice* une parabole est coupé par un plan, et quelle que soit sa direction, suivant une parabole.

Cela posé :

Si l'on a un *toit* dont les divers *chevrons* soient les génératrices droites du premier système d'un paraboloïde hyperbolique, et que l'on cherche sur ce *toit* (supposé recouvert en *zinc*, par exemple, auquel cas on a une surface unie), la ligne de séparation d'ombre et de lumière, en supposant que le système est éclairé par un *rayon* lumineux, nous saurons d'avance que cette courbe sera une *parabole*, et que l'*ombre portée* sur le plan horizontal, ou sur le plan vertical de projection, ou sur tout autre plan, sera *limitée* par une parabole.

§ II.

Cherchons maintenant les divers points 1° de la parabole *ligne de séparation d'ombre et de lumière;* 2° de la parabole *ombre portée*, en simplifiant autant que possible les constructions graphiques à employer.

Supposons que l'on ait un paraboloïde hyperbolique rectangulaire ayant pour plans directeurs, les plans horizontal et vertical de projection, et que ce paraboloïde soit engendré (*fig.* A) par une droite G se mouvant horizontalement en s'appuyant sur deux droites A et A' : l'une A perpendiculaire au plan horizontal et l'autre A' située dans le plan vertical de projection.

(*) Voyez le *Cours de Géométrie descriptive*, 2° partie, chap. XII, p. 336.

Cela posé :

On se donne la direction L du rayon de lumière ; pour construire la parabole contact du cylindre lumineux Δ et du paraboloïde Σ, nous ferons passer par chacune des génératrices droites horizontales G, G_1, G_2,... de la surface Σ des plans T, T_1, T_2,.... parallèles à la droite L, et nous chercherons les points de contact x, x_1, x_2... de chacun de ces plans avec cette même surface Σ. Le lieu des points x, x_1, x_2.... sera une parabole 6, qui sera la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface Σ.

Pour exécuter cette construction le plus simplement et le plus promptement possible, il faudra procéder ainsi qu'il suit :

On divisera la droite verticale A en parties égales, à partir de sa trace horizontale a^4 ; on aura donc des points a^4, a^3, a^2, a^1, a,... également espacés entre eux. Par chacun de ces points on mènera des parallèles au rayon de lumière L, lesquelles viendront percer le plan horizontal en des points a'_3, a'_2, a'_1, a'.... également espacés entre eux et tous situés sur L^h.

Par les points a^4, a^3, a^2, a^1, a,... on mènera les génératrices horizontales G^4, G^3, G^2, G^1, G... du paraboloïde Σ.

Et cela fait :

Si l'on mène par le point a_1' une droite H^{T_1} parallèle à G_1^h, on aura la trace horizontale du plan T_1 parallèle au rayon L et passant par la génératrice G_1 de la face Σ.

On construira de la même manière les droites H^{T_2}, H^{T_3}, H^T,... la trace horizontale G^h de la surface Σ coupera les diverses traces horizontales des plans T_3, T_2, T_1, T... en les points t_3, t_2, t_1, t... ; et si par ces points on mène des parallèles à la ligne de terre, elles viendront couper les droites G_3^h, G_2^h, G_1^h, G^h,... et respectivement en les points x_3^h, x_2^h, x_1^h, x^h... qui, étant unis par une courbe, nous donneront la parabole 6^h, projection horizontale de la parabole 6, ligne de séparation d'ombre et de lumière.

Si ensuite nous menons par les divers points x^h,... des perpendiculaires à la ligne de terre, elles viendront couper les droites G_3^v, G_2^v, G_1^v, G^v... en les points x_3^v, x_2^v, x_1^v, x^v,... qui détermineront la parabole 6^v, projection verticale de la parabole 6.

§ III.

Les divers plans tangents T_4, T_3.... sont les *enveloppées* du cylindre lumineux Δ ; par conséquent les traces horizontales H^{T_4}, H^{T_3}... de ces divers plans seront les *enveloppées* de la parabole δ, trace horizontal du cylindre Δ. La courbe δ, ombre

portée par la surface paraboloïde Σ, sera donc facilement déterminée, puisqu'elle a pour tangentes les diverses droites H^{T_4}, H^{T_3}.... Mais il sera facile de construire le point de contact de cette parabole δ avec chacune de ses tangentes H^T.... Et en effet : si l'on considère un point x_1 de la parabole $\mathfrak{E}$ (ligne de séparation d'ombre et de lumière), en menant par ce point x_1 une droite L_1 parallèle à la direction L du rayon de lumière, on aura la génératrice droite du cylindre Δ suivant laquelle ce cylindre est touché par le plan T_1 ; si donc on mène par le point x_1^h une droite L_1^h parallèle à L^h, elle viendra couper la droite H^{T_1} en un point y_1 qui sera le point de contact de la parabole δ avec sa tangente H^{T_1}.

§ IV.

De ce qui précède on peut déduire les *théorèmes* suivants (*fig.* A) :

1er THÉORÈME.

Si l'on prend une droite L^h et sur cette droite des points équidistants a_4, a_3', a_2', a_1', a',... ; si l'on trace une ligne LT non parallèle à la droite L^h, et si l'on divise cette droite LT en parties égales par les points b_4, b_3, b_2, b_1, b,... et que d'un point a^4 de la droite L^h on mène des divergentes G^h, G_1^h, G_2^h,... aux divers points b, b_1, b_2,... ; puis que, par les divers points a^4, a_3', a_2',... on mène des parallèles H^{T_4}, H^{T_3}, H^{T_2},... et respectivement aux droites divergentes G_4^h, G_3^h, G_2^h,... ces droites H^T... envelopperont une parabole δ.

2e THÉORÈME.

Si l'on trace une parabole δ et une droite L^h de position arbitraire par rapport à la courbe, si l'on divise la droite L^h en parties égales par les points a_4', a_3', a_2',... et que par ces points on mène les tangentes H^{T_4}, H^{T_3}, H^{T_2},... à la parabole δ; si ensuite, par un des points de division, a_4, par exemple, de la droite L^h on mène des divergentes G_3^h, G_2^h,... respectivement parallèles aux tangentes H^{T_3}, H^{T_2}, H^{T_1},... ces divergentes couperont en parties égales une certaine droite dont la construction s'effectuera de la manière suivante.

Par le point y_1 contact de la parabole δ donnée avec une de ses tangentes H^{T_1} (par exemple), on mènera une droite L_1^h parallèle à L^h et coupant la divergente G_1^h parallèle à H^{T_1} en un point x_1^h, on unira le point x_1^h avec le point t_1 en lequel la tangente H^{T_1} coupe la tangente G_4 à la parabole δ, et l'on remarquera que G^4 n'est autre que H^{T_4}, n'est autre que la tangente à la parabole δ, qui coupe la droite L^h en le point a_4, d'où l'on a fait diverger les droites G_3^h,... et l'on aura en $x_1^h t_1$ la direction de la droite cherchée.

§ V.

Si le rayon L de lumière était parallèle au plan vertical de projection et faisait, avec le plan horizontal, un angle α, il arriverait que sur la surface paraboloïde Σ, il existerait une certaine génératrice droite K (du second système et ayant pour plan directeur le plan vertical de projection) qui serait parallèle au rayon L, car l'on sait que les génératrices du second système font chacune un angle différent avec le plan horizontal, et que cet angle varie depuis l'angle droit jusqu'à l'angle nul.

Dès lors la génératrice K, parallèle au rayon de lumière L, serait la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface Σ.

Cela est évident.

On peut d'ailleurs le démontrer d'une manière simple et nouvelle.

Supposons (*fig.* B) que la droite K se trouve parallèle au rayon L, en effectuant les constructions de la fig. A, il arrivera que les points a, a'_1, a'_2, a'_3,... seront équidistants sur la droite L^h, laquelle sera parallèle à la ligne de terre LT et aussi à K^h.

Or les divergentes G, G_1^h, G_2^h, G_3^h,... menées du point a couperont la droite K^h en les points p, q_1, q_2, q_3,... qui seront équidistants, et l'on aura évidemment : $\overline{q_3q_2} = \overline{aa'_1}$, $\overline{q_2q_1} = \overline{a'_1a'_2}$....

Dès lors, les quadrilatères $(q_3pa'_3a)$ et $(q_2pa'_2a)$ et $(q_1pa'_1a)$... seront des parallélogrammes ; dès lors les droites pa'_1, pa'_2, pa'_3... ne seront autres que les traces horizontales des plans T_1, T_2, T_3... menées parallèlement à la droite L ou K, et respectivement par les génératrices droites du premier système (de la surface Σ), savoir : G_1, G_2, G_3.... Ces divers plans T_1, T_2, T_3... seront donc tangents à la surface Σ suivant les divers points de la droite K, donc, etc.

§ VI.

Cette propriété, savoir, que lorsque le rayon L de lumière est parallèle à une génératrice droite D d'un paraboloïde hyperbolique, la ligne de séparation d'ombre et de lumière n'est autre que cette droite D, n'appartient pas seulement au paraboloïde hyperbolique; elle existe pour toute surface gauche, quelle que soit sa forme, quel que soit son mode de génération (*).

(*) Je donne, dans la fig. 3, l'épure de l'ombre d'un toit paraboloïde, en supposant que le rayon de lumière est parallèle à l'une des génératrices droites de la surface.

Dans l'atlas je donne aussi l'épure du problème d'ombre qui fut proposé en 1813 aux élèves (de pre-

§ VII.

D'après ce qui précède, il est évident que, lorsque l'on aura un paraboloïde hyperbolique, *rectangulaire* ou *oblique*, la ligne de séparation d'ombre et de lumière ne sera une parabole qu'autant que le rayon L de lumière ne sera pas parallèle à l'un ou à l'autre des deux plans directeurs de la surface; et lorsque ce rayon L sera parallèle à l'un ou à l'autre des deux plans directeurs de la surface, la ligne de séparation d'ombre et de lumière sera toujours une droite, qui sera une génératrice droite de la surface, laquelle devra être cherchée parmi celles qui ont pour plan directeur celui qui est parallèle au rayon L de lumière.

§ VIII.

La fig. A nous donne la parabole δ située à gauche de la trace horizontale du paraboloïde Σ; cela nous apprend que la partie externe de la surface (celle qui est vue d'un point situé à l'infini et au-dessus du plan horizontal) sera tout entière dans l'ombre.

Si cette parabole δ était à droite de la trace horizontale du paraboloïde, alors la surface externe serait en partie éclairée et en partie dans l'ombre.

Mais si l'on remarque que lorsque le rayon L de lumière est parallèle à la génératrice droite K (*fig.* B) de la surface paraboloïde, alors la parabole δ se réduit à un point qui n'est autre que la trace horizontale p de cette droite K, laquelle,

---

mière année) de l'École polytechnique; on donna *un toit paraboloïde et une cheminée cylindrique.* Je n'ai fait que décalquer l'épure que j'ai exécutée à cette époque, d'après la solution que j'avais donnée à ma salle, alors que j'étais élève à l'École polytechnique.

A ce sujet je crois devoir entrer dans quelques détails.

Depuis la fondation de l'École polytechnique, jusqu'à sa réorganisation effectuée par la restauration après le licenciement de 1816, les élèves de première année d'études avaient à résoudre, pendant la durée du cours de géométrie descriptive, trois problèmes. Le premier problème était une question théorique; le second problème était une question d'ombre; le troisième problème était une question de coupe des pierres.

Chacun de ces problèmes était résolu par les élèves à la fin de chaque partie de cours y relatif.

Le problème était le même pour tous les élèves; on leur donnait six heures pour chercher la solution et exécuter l'épure.

On comprend que, dans chaque salle, il arrivait qu'un élève parvenait plus vite que ses camarades à la solution demandée. Alors il passait au tableau et expliquait sa solution; après discussion, elle était adoptée et quelquefois modifiée. Tous les élèves de la même salle se mettaient alors à l'ouvrage et exécutaient l'épure.

Souvent il arrivait que la solution d'une salle passait de salle en salle et était généralement adoptée.

Souvent aussi il y avait plusieurs solutions en présence.

Ces travaux étaient très-utiles : ils furent supprimés depuis 1816. Pourquoi?

dans ce cas, est la ligne de séparation d'ombre et de lumière, on doit de suite en conclure que si la projection L^h, étant inclinée du bas du dessin vers la gauche pour aller couper vers la droite la ligne de terre LT, nous donne une parabole δ située à gauche de la trace horizontale de la surface Σ, en inclinant cette droite L^h en sens contraire (le rayon L faisant toujours le même angle avec le plan horizontal), on obtiendra une parabole δ' située à droite de la même trace horizontale de la surface Σ.

On voit donc comment l'on peut reconnaître si une surface paraboloïde étant projetée sur le plan horizontal, la surface externe de cette surface (ou une partie limitée de cette surface) sera éclairée ou non, et sera ainsi, ou toute dans l'ombre, ou toute dans la lumière, ou si elle sera en partie dans l'ombre et en partie éclairée.

N° 8.

CONSTRUCTION DE LA LIGNE DE SÉPARATION D'OMBRE ET DE LUMIÈRE D'UNE SURFACE DÉVELOPPABLE ÉCLAIRÉE PAR UN RAYON LUMINEUX ET DE L'OMBRE PORTÉE PAR UN TRONÇON DE CETTE SURFACE SUR LE PLAN HORIZONTAL.

§ I.

Ce que nous avons dit ci-avant (mémoire n° 7), sur la ligne de séparation d'ombre et de lumière d'un paraboloïde hyperbolique, nous montre la marche que l'on doit suivre lorsque l'on aura une surface gauche quelconque.

Mais si la surface réglée, au lieu d'être une surface gauche, était une surface développable, éclairée par un *rayon* de lumière, le mode de solution changerait du tout au tout. Et en effet : si l'on a une surface développable D ayant une courbe δ pour arête de rebroussement, et que cette surface soit éclairée par un *rayon* de lumière L, la ligne de séparation d'ombre et de lumière, si elle existe, ne pourra être qu'une génératrice droite G de cette surface D, et le plan T tangent à la surface D suivant la génératrice G et parallèle au rayon lumineux L sera un plan osculateur de la courbe δ et il sera osculateur au point g en lequel la génératrice G touche cette courbe δ.

Le mode de recherche doit donc évidemment changer lorsque l'on a une surface *réglée* développable et non une surface *réglée* gauche.

Pour une surface développable, on devra employer le mode de solution suivant :

On coupera la surface développable D par un plan P (le plan horizontal de projection par exemple), on aura une courbe C (*fig.* 1).

On considérera la courbe C comme la base d'un cylindre Δ dont les génératrices droites seront parallèles au rayon lumineux L.

Cela fait :

On considérera l'arête de rebroussement ∂ de la surface développable D, comme la directrice d'un second cylindre Σ ayant ses génératrices droites parallèles au rayon lumineux L, et l'on cherchera sa trace S sur le plan P.

On aura donc deux cylindres Δ et Σ parallèles entre eux et au rayon de lumière L et leurs traces C et S sur un même plan P (le plan horizontal par exemple); dès lors, un plan T tangent à la fois aux deux cylindres Δ et Σ sera parallèle à la droite L et sa trace H^T sur le plan P sera une tangente commune aux deux courbes C et S.

Ce plan T touchera la courbe C en un point *c* et la courbe S en un point *s*, et l'on mènera, par ce point *s*, une parallèle à la droite L, laquelle ira couper la courbe ∂ en un point *d*; la droite (*c*, *d*) sera une génératrice droite de la surface développable D; elle sera la génératrice droite suivant laquelle le plan T touche cette surface D; cette droite *cd* sera donc la ligne de séparation d'ombre et de lumière cherchée.

On voit de suite que si la surface développable D était éclairée par un *point lumineux l*, il faudrait considérer ce point *l* comme le sommet commun à deux cônes ayant pour directrices l'un la courbe C et l'autre la courbe ∂ (fig. 2).

Le cône (*l*, ∂) serait coupé par le plan P suivant une courbe B et le plan T aurait pour trace sur le plan P la tangente commune aux deux courbes C et B.

Cette tangente commune toucherait la courbe C en un point *c* et la courbe B en un point *b*; la droite *lb* couperait la courbe ∂ en un point *d* et la droite *cd* serait la génératrice de contact de la surface développable D et du plan T passant par le *point* lumineux *l*; cette droite *cd* serait donc la ligne de séparation d'ombre et de lumière demandée.

§ II.

Une surface développable n'est pas toujours donnée par son arête de rebroussement, souvent on se donne deux directrices sur lesquelles doit rouler le plan qui doit déterminer la surface développable comme *enveloppe* de l'espace parcouru par ce plan.

La solution du problème : ***construction de la ligne de séparation d'ombre et de lumière***, s'effectue alors, ainsi qu'il suit :

PREMIER CAS, *la surface développable étant éclairée par un rayon de lumière.*

Soient C et C′ les deux courbes (fig. 3) sur lesquelles doit rouler tangentiellement le plan qui sera en chacune de ses positions, *l'enveloppée* de la surface développable D ; soit L la direction du *rayon* de lumière.

On regardera les deux courbes C et C′ comme les *directrices* de deux cylindres dont les génératrices droites seront respectivement parallèles à la droite L.

On aura donc un cylindre Δ passant par la courbe C et un cylindre Δ′ passant par la courbe C′.

Cela posé :

On coupera les deux cylindres Δ et Δ′ par un plan P (le plan horizontal de projection par exemple), et l'on obtiendra deux courbes planes B et B′.

La tangente commune H^{r} à ces deux courbes B et B′ sera la trace sur le plan P d'un plan T tangent à la fois aux deux cylindres Δ et Δ′.

H^{r} touchera la courbe B au point *b* et la courbe B′ au point *b′*.

On mènera par ces points *b* et *b′* deux parallèles à la droite L, la première coupant la courbe C au point *c* et la seconde coupant la courbe C′ au point *c′*.

Il est évident que la droite *cc′* ne sera autre qu'une génératrice droite G de la surface développable D et que cette droite G (ou *cc′*) sera la droite de contact de la surface D avec le plan T, lequel sera parallèle au *rayon* L de lumière. Cette droite G (ou *cc′*) sera donc la ligne de séparation d'ombre et de lumière cherchée.

DEUXIÈME CAS. *La surface développable étant éclairée par un point lumineux.*

On considérera les courbes C et C′ comme les directrices de deux cônes Δ et Δ′ ayant le *point* lumineux *l* pour sommet commun (*fig.* 4).

On coupera ces deux cônes par un plan P, et la tangente commune aux deux courbes de section B et B′ sera la trace H^{r} sur le plan P d'un plan T tangent à la fois aux deux cônes Δ et Δ′.

On unira les points de contact *b* et *b′* des courbes B et B′ et de la tangente commune H^{r} avec le point *l* ; les droites *lb* et *lb′* couperont, la première la courbe C au point *c*, la seconde la courbe C′ au point *c′*, et la droite *cc′* sera la ligne de séparation d'ombre et de lumière demandée.

§ III.

La surface développable D peut être engendrée par un plan roulant tangentiellement à deux surfaces données Σ et Σ′. Il faut savoir, dès lors, construire la

ligne de séparation d'ombre et de lumière appartenant à cette surface D, suivant que cette surface D est éclairée par un *rayon* lumineux ou un *point* lumineux. Dans ce cas la solution sera la même que celle employée lorsque la surface développable était donnée par deux courbes directrices.

Et en effet :

Premier cas. *Surface développable* D *donnée par deux surfaces directrices* Σ et Σ' *et éclairée par un rayon de lumière* L.

On construira deux cylindres Δ et Δ' tangents perspectivement aux deux surfaces directrices données Σ et Σ', et ayant l'un et l'autre leurs génératrices droites parallèles au rayon de lumière L. Le cylindre Δ touchera la surface Σ suivant une courbe ξ, le cylindre Δ' touchera la surface Σ' suivant une courbe ξ'.

On coupera les deux cylindres Δ et Δ' par un plan P, et l'on obtiendra pour section deux courbes B et B'. La tangente commune H^{t} à ces deux courbes sera, sur le plan P, la trace d'un plan T tangent à la fois aux deux cylindres Δ et Δ', et aussi aux deux surfaces Σ et Σ'; ce plan T touchera la surface Σ en un point i situé sur la courbe ξ, et touchera la surface Σ' en un point i' situé sur la courbe ξ'. La droite ii' sera une génératrice droite de la surface développable D, et elle sera la ligne de séparation d'ombre et de lumière demandée.

Deuxième cas. *Surface développable* D *donnée par deux surfaces directrices* Σ et Σ' *et éclairée par un point lumineux* l.

Les cylindres Δ et Δ' employés dans le premier cas deviendront deux cônes ayant le point l pour sommet commun, et ils seront tangents perspectivement aux surfaces directrices Σ et Σ' suivant des courbes ξ et ξ'. La construction s'achèvera comme pour le premier cas.

§ IV.

Supposons que la surface développable est une surface hélicoïde Σ', ayant dès lors pour arête de rebroussement une hélice H tracée sur un cylindre de révolution K ayant pour axe de rotation une droite A, l'hélice H coupera toutes les génératrices droites du cylindre K sous un angle α. Supposons en outre que le rayon de lumière L est parallèle à l'une des génératrices droites de la surface développable Σ.

Il est évident que la droite L devra faire avec un plan P perpendiculaire à l'axe A un angle 6 complémentaire de l'angle α.

Cela posé :

Prenons le plan P pour plan horizontal de projection, il coupera le cylindre K suivant un cercle C, et la surface Σ suivant une développante δ de ce cercle C.

L'hélice H se projettera orthogonalement sur le plan P suivant le cercle C, et toutes les tangentes G à l'hélice H se projetteront sur le plan P suivant des tangentes au cercle C.

Dès lors, ayant donné les projections du rayon de lumière L, on aura L^h parallèle à une certaine tangente G^h (*fig.* 5) au cercle C, et les droites L et G feront avec le plan horizontal P le même angle 6, et il est évident que la droite G sera la ligne de séparation d'ombre et de lumière demandée. Mais si l'on voulait construire la droite G d'après la solution donnée ci-dessus (§ 2), on devrait considérer la développante δ comme la *base* d'un cylindre ayant ses génératrices parallèles au rayon de lumière L, et considérer l'hélice H comme la *directrice* d'un cylindre Δ ayant aussi ses génératrices parallèles au même rayon de lumière L. Il faudrait chercher la trace ξ du cylindre Δ sur le plan horizontal P, et la tangente commune aux courbes ξ et δ serait la trace, sur le plan P, du plan tangent à la surface Σ suivant la génératrice droite, qui serait la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

Or, pour déterminer la courbe ξ, la construction sera évidemment la suivante :

Ayant pris un point m^h sur le cercle C (ou H^h projection de l'hélice H arête de rebroussement), on mènera la tangente m^hn à ce cercle C, laquelle coupera la développante δ en un point n. Du point m^h comme centre, et avec m^hn pour rayon, on décrira un cercle qui sera coupé en un point p par la droite L_r^h, menée par le point m^h parallèlement à la droite L^h, le point p sera un point de la courbe ξ. Si l'on prolonge la droite L_r^h, elle coupera le cercle C en un second point m'^h, et si l'on mène en ce point m'^h une tangente au cercle C, elle coupera la développante δ en un point n', et si du point m'^h comme centre, et avec m'^hn' pour rayon, on décrit un cercle, il coupera la droite L_r^h en un point q qui appartiendra encore à la courbe ξ.

Or il est évident que le point p est *intérieur* à la développante δ, et que le point q est *extérieur* par rapport à cette même courbe δ.

De plus il est évident que lorsque la droite L_r^h sera tangente au cercle C, et aura pris dès lors la position G^h, le point r, en lequel G^h coupe la courbe δ, appartiendra à la courbe ξ.

La courbe ξ est donc une courbe présentant au point r un point de rebroussement, et devant avoir en ce point, même tangente H^r que la développante δ.

La droite G, qui est la ligne de séparation d'ombre et de lumière, et qui se trouve, dans ce cas particulier, immédiatement construite (sans avoir besoin de recourir à la courbe ξ), détermine le point de contact r commun aux deux courbes δ et ξ. Dans ce cas particulier les deux courbes δ et ξ ont non-seulement une tangente commune H^r, mais encore elles sont tangentes l'une à l'autre.

Il est encore évident que la courbe ξ ne peut offrir un point de rebroussement, qu'autant qu'il y aura une des tangentes de l'arête de rebroussement qui soit parallèle au rayon de lumière.

§ V.

Après avoir exposé la théorie qui nous donne d'une manière générale la solution du problème : *déterminer la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur un tronçon de surface développable, ce tronçon étant intercepté par deux plans parallèles entre eux ou non parallèles entre eux*, la surface étant éclairée par un *rayon* de lumière ou par un *point* lumineux, appliquons cette théorie à quelques exemples simples, ce qui nous permettra de reconnaître l'avantage que l'on trouve à l'exposition préalable d'une théorie générale, de laquelle on déduit sans peine la solution de tous les cas qui peuvent se présenter dans la pratique, et sans avoir besoin, dès lors, de multiplier les exemples.

§ VI.

1er EXEMPLE. *Ombre d'un cône droit éclairé par un rayon de lumière.*

Nous supposerons (*fig.* 6) que le cône a son axe A, de rotation, vertical; sa base sur le plan horizontal sera le cercle B; et son sommet sera le point s ayant pour projection s^v sur A^v et s^h au centre du cercle B.

Cela posé :

Supposons que le cône est éclairé par un rayon de lumière L, et cherchons la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur ce cône.

Lorsque l'on connaît le sommet d'un cône et sa base, on peut considérer cette surface développable comme étant donnée par son *arête de rebroussement*, qui, ici, sera un *point* qui n'est autre que le sommet du cône.

La base du cône sera la section faite dans cette surface développable par le plan horizontal.

Cela posé, appliquons la théorie générale.

Il faudra, par l'arête de rebroussement, faire passer un cylindre Δ parallèle au rayon de lumière L, et chercher son intersection avec le plan de la base B.

Or, l'arête de rebroussement étant le sommet s, ce cylindre Δ se réduira à une droite D menée du sommet et parallèlement au rayon lumineux L, et son intersection d, par le plan horizontal de projection, sera la courbe de section faite par ce plan dans le cylindre Δ.

Il faudra mener une tangente commune aux courbes B et d; or, la courbe d n'étant qu'un point, cela revient à mener par le point d une tangente au cercle B.

On aura donc deux tangentes H^T et H^Θ, qui seront les traces de deux plans T et Θ tangents à la fois et respectivement au premier cylindre Δ et à un second cylindre, qui aurait la base B pour directrice, et dont les génératrices seraient parallèles à la droite L.

Le plan T touchera la courbe B au point p, ce même plan T touchera l'arête de rebroussement en le point s, donc la droite sp sera la ligne de séparation d'ombre et de lumière demandée.

Il existera une seconde ligne de séparation d'ombre et de lumière qui sera rs et qui sera donnée par le plan Θ.

Mais en même temps que cette construction donne la ligne de séparation d'ombre et de lumière, elle donne l'ombre portée du cône sur le plan horizontal de projection.

§ VII.

2° EXEMPLE. *Ombre d'un tronc de cône droit éclairé par un rayon de lumière.*

Concevons le cône ayant son axe A, de rotation, vertical (*fig.* 7); sa base sur le plan horizontal sera un cercle B. Supposons que ce cône soit coupé par un plan P perpendiculaire au plan vertical de projection, nous aurons une ellipse E.

Le cône pourra donc être considéré comme étant une surface développable engendrée par un plan roulant tangentiellement sur les courbes B et E. Supposons que ce tronc conique est éclairé par un rayon de lumière L, et appliquons la théorie générale pour déterminer la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

Par la courbe E nous ferons passer un cylindre Δ ayant ses génératrices parallèles à la droite L, nous couperons ce cylindre Δ par le plan horizontal de projection, et nous aurons l'ellipse E'.

Cela fait :

Nous mènerons aux deux courbes B et E' une tangente commune H^T qui touchera la courbe B en i et la courbe E' en y.

Menant par le point y une parallèle au rayon L, elle viendra couper la courbe E en un point x, et joignant les points i et x, on aura la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur le tronc conique.

Il existe une seconde tangente commune H^Θ qui donne une seconde ligne de séparation d'ombre et de lumière.

Et l'on voit que par cette méthode on détermine en même temps l'ombre portée par le tronc conique sur le plan horizontal de projection.



N° 9.

DÉTERMINER LA LIGNE DE SÉPARATION D'OMBRE ET DE LUMIÈRE SUR UN CONOÏDE (*).

§ I.

Supposons que le conoïde soit donné : 1° par une directrice droite K perpendiculaire au plan vertical de projection, 2° par une directrice courbe B tracée sur le plan horizontal, et que le plan vertical de projection soit le plan directeur de ses diverses génératrices droites (fig. 1).

Cela posé :

Concevons un rayon lumineux L et cherchons la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface conoïde.

Menons par un point *x* de la droite K un rayon L de lumière et la génératrice droite G de la surface conoïde.

Le rayon L percera le plan horizontal au point *b* et la génératrice G le percera en un point *a* de la courbe B.

Faisant passer un plan P par les droites L et G, ce plan touchera la surface conoïde en un point *y* situé sur la droite G et qui appartiendra à la courbe de séparation d'ombre et de lumière demandée.

Pour déterminer ce point *y*, il faudra donc remplacer le conoïde par un paraboloïde de raccordement qui lui soit tangent tout le long de sa génératrice G ; or, le paraboloïde le plus simple à employer est évidemment, ici, celui qui sera engendré par la droite G se mouvant parallèlement au plan vertical de projection, en s'appuyant sur la droite K et sur la droite K_1 menée tangentiellement au point *a*, à la courbe B.

La droite *ab* sera H^P coupant la ligne de terre LT au point *o*.

La droite K_1 sera la trace horizontale du paraboloïde Σ, et sa trace verticale sera la droite G_1 qui unit les points *s* et K^v.

Le plan P coupera le paraboloïde Σ suivant une génératrice du second système ayant le plan horizontal pour plan directeur.

Cette génératrice K′ (du second système) étant déterminée, elle coupera la génératrice G (du premier système) en un point *y* qui sera le point demandé. Or, pour déterminer K′, il faut connaître V^P : construisons donc cette trace

(*) J'ai rédigé ce petit mémoire, d'après mes notes et des croquis exécutés à Metz en 1820.

verticale du plan P. Pour cela, menons par le point x une droite D *horizontale* du plan P, et coupant le plan vertical au point d, la droite od ne sera autre que V^v, et remarquons que V^v est parallèle à la droite G^v.

La trace V^v coupera la droite G_1 trace verticale du paraboloïde Σ en un point p; si donc on mène par ce point p une droite K'^v parallèle à la ligne de terre, et si l'on unit les points p^h et r (en lesquels les droites K^h et K_1 se coupent), on aura K'^h.

Les droites G et K′ se couperont au point y demandé.

Nota. Comme la droite K′ est la génératrice du second système du paralloloïde Σ, elle est horizontale; étant dans le plan P, elle est alors une *horizontale* de ce plan; il faudra donc, et ce sera une vérification, que les droites K'^h et H^p se trouvent parallèles.

On pourra donc se procurer autant de points y.... que l'on voudra et appartenant à la courbe de séparation d'ombre et de lumière et, cela, par une construction très-simple, car, en définitive, elle se réduira : 1° à mener H^p par les points a et b; 2° à mener la droite K'^h par le point r et parallèlement à la droite H^p; 3° à déterminer le point y^h interjection des droites K'^h et G^h, et par suite on aura y^v sur G^v.

Appliquons ce qui précède à un exemple particulier, le conoïde ordinaire, par exemple, et construisons complétement et en tous ses détails la ligne de séparation d'ombre et de lumière en considérant les deux nappes de cette surface conoïde, et discutons les diverses formes que cette courbe prendra, suivant l'inclinaison du rayon de lumière par rapport au plan horizontal.

§ II.

Nous voyons, par ce qui a été dit au § I (ci-dessus), que l'on pouvait déterminer la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur un conoïde éclairé par un *rayon* lumineux, sans avoir besoin de s'inquiéter de la projection verticale de cette ligne.

Dès lors (*fig.* 2), étant donné un conoïde dont la ligne de striction K est perpendiculaire au plan vertical, et dont la base sur le plan horizontal est un cercle B ayant son centre sur la droite K^h, il sera facile, en appliquant la construction générale, de trouver les projections des branches δ, δ_1, δ', δ_1' de la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

Dans la fig. 2, nous supposons que le rayon de lumière glissant sur la droite K de striction, engendre un plan Q, dont les traces sont H^q et V^q. Il peut évidemment arriver plusieurs cas.

PREMIER CAS: *La trace* H^a *coupant le cercle* B.

Si, comme dans la fig. 2, la trace H^a coupe le cercle B en les points b' et b^4, alors la ligne de séparation d'ombre et de lumière a la forme indiquée, en projection horizontale et verticale, par cette figure.

Discutons les particularités de cette forme de courbe.

Il est évident que la courbe passe par le point m, extrémité de la droite K, point m par lequel passe une génératrice G du conoïde, laquelle génératrice G est verticale.

La construction graphique nous montre que la branche δ^h coupe la droite K^h en un point x'^h qui est sur la projection G'^h de la génératrice G' du conoïde passant par le point b', en lequel le cercle B (base horizontale du conoïde) est coupé par H^a, trace horizontale du plan lumineux passant par la droite K de striction.

La ligne de séparation d'ombre et de lumière se projette horizontalement suivant deux branches séparées, offrant chacune un point de rebroussement, savoir, l'une au point m^h, et l'autre au point m'^h.

Le diamètre du cercle B parallèle à la ligne de terre LT, ou mieux, perpendiculaire à la droite K^h, est une asymptote commune aux deux branches. En sorte que les projections de la courbe de séparation d'ombre et de lumière offrent les formes indiquées par la fig. 2, et qu'en projection verticale on obtient deux nœuds tangents en K^v ou m^v aux droites G^v et G'^v; et que les branches infinies ont pour asymptotes les droites G^{5v} et G'''^v, dont les pieds ou traces horizontales sont en b^5 et b''' sur le cercle B.

Si l'on suppose que l'on ne considère, en projection horizontale, que la nappe inférieure du conoïde, la fig. 3 indique, dans le cas examiné ci-dessus, la forme de l'ombre. Et l'on doit remarquer que la courbe δ^h ne sera ligne de séparation d'ombre et de lumière que pour la face interne du conoïde, et non pour la face externe, puisque le cylindre lumineux tangent au conoïde suivant l'arc de la courbe δ projetée en δ^h, couperait le plan horizontal suivant une courbe intérieure au cercle B.

CAS PARTICULIER. *La trace* H^a *n'étant autre que le diamètre* K *du cercle* B.

Dans ce cas, le *rayon* lumineux est oblique au plan horizontal, et il est situé dans un plan vertical perpendiculaire au plan vertical de projection. Dans ce cas, les fig. 4 et 5 indiquent la forme que prennent les projections horizontales de la ligne de séparation d'ombre et de lumière. Les deux *boucles* disparaissent dans la projection verticale. Les branches δ^v et δ_1^v sont superposables entre elles, ainsi que les branches $\delta_1'^v$ et δ'^v, et cela en pliant l'épure suivant la droite G^v, car ces quatre courbes sont tangentes en m^v à cette droite verticale G^v.

Mais les branches δ, δ_{1} et δ', δ_{1}' sont différentes entre elles, elles ne sont pas superposables; cela n'aura lieu que lorsque le *rayon* lumineux sera vertical.

Deuxième cas. *La trace* H° *étant tangente au cercle* B.

Si l'on applique dans ce cas la construction graphique, on verra de suite que la ligne de séparation d'ombre et de lumière se trouve composée d'une seule branche ayant pour asymptote les génératrices droites G‴ et G⁵ du conoïde.

La fig. 6 indique la forme des projections horizontale et verticale de la courbe; mais, dans ce cas tout particulier, il existe une seconde ligne de séparation d'ombre et de lumière, soit sur sa nappe inférieure, soit sur sa nappe supérieure, et qui est la génératrice G‴ du conoïde.

Et en effet, le plan lumineux qui passe par la droite de striction K est tangent au conoïde suivant cette génératrice G‴, parce que l'on sait que la surface conoïde est développable tout le long de cette génératrice G‴, qui est toute particulière, puisque le paraboloïde de raccordement, mené suivant cette génératrice, n'est autre qu'un plan, n'est autre que le plan (G‴, K), c'est-à-dire le plan lumineux lui-même.

La fig. 7 donne l'ombre complète sur la projection horizontale du conoïde, en ne considérant que sa nappe inférieure.

Troisième cas. *La trace* H° *ne coupant pas le cercle* B.

La fig. 8 indique la forme des projections horizontale et verticale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, et la fig. 9 donne l'ombre de la projection horizontale du conoïde, en ne considérant que sa nappe inférieure.

Cas particulier. *La trace* H° *peut être située à l'infini.*

Dans ce cas, le *rayon* lumineux est horizontal, et la fig. 10 nous donne la forme des projections horizontale et verticale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière. Cette courbe est composée de deux branches qui sont chacune symétriques par rapport au plan horizontal passant par la droite K de striction, en sorte que les arcs δ et δ_{1}, δ' et δ_{1}' de chaque branche se projettent horizontalement suivant un arc d'une même courbe, arc qui s'arrête pour l'une des projections horizontales au point m^{h}, et pour l'autre au point m'^{h}.

La fig. 11 est dans ce cas identique à la fig. 10.

§ III.

Dans ce qui précède, nous avons donné la construction de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface conoïde; mais il nous reste à rechercher si cette surface ne peut pas, dans certains cas, porter ombre sur elle-même.

Il est évident que la ligne de striction K seule peut porter ombre sur la surface conoïde, lorsque l'on ne considère que la nappe inférieure de la surface (comme, par exemple, lorsque l'on aurait à considérer un *toit* de forme conoïde).

Ce n'est que dans les cas représentés par les fig. 3 et 7, que la droite K de striction pourra porter une ombre apparente sur la surface de la nappe inférieure du conoïde. Ce que je viens de dire sera évident, lorsque nous aurons démontré que la tangente aux points m^h et m'^h de la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière est parallèle à la projection horizontale du *rayon* lumineux.

Construction de la tangente au point de rebroussement de la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

Si l'on considère le point m de la ligne de striction K (*fig.* 12), et que l'on prenne sur le cercle B, base du conoïde, un point g' infiniment voisin du point m^h lequel est en même temps le point g, trace horizontale de la génératrice verticale G du conoïde, on voit que la génératrice G' successive de G, passera par le point m, parce que l'on sait que le cône qui a pour sommet le point m, et pour base le cercle B, est osculateur au conoïde tout le long de la génératrice droite G, suivant laquelle il est développable, suivant laquelle il a une *courbure conique.*

Il faudra donc, pour construire le point successif de m sur la ligne de séparation d'ombre et de lumière, faire la construction suivante : 1° mener par le point m^h une parallèle à L^h et rencontrant la trace H^o au point a; 2° unir le point g' et le point a; 3° mener en g' une tangente au cercle B; or, puisque le point g' est le point successif et infiniment voisin du point g, cette tangente ne sera autre que l'élément rectiligne gg' du cercle B, lequel coupera la droite K^h au point m^h ou g. Et enfin, 4° par le point m^h ou g, il faudra mener une droite parallèle à la droite $g'a$, et coupant gg', projection horizontale de la génératrice G', au point m^h lui-même. En sorte que pour ce point m, que nous retrouvons sur la génératrice G' successive de G, le plan tangent au conoïde, et qui est parallèle au *rayon* lumineux, aura pour trace horizontale la droite $g'a$, qui n'est autre que ga, puisque les points g et g' sont successifs et infiniment voisins. Le plan tangent au conoïde et au cylindre lumineux est donc vertical pour ce point m; par conséquent la tangente au point m de la courbe de séparation d'ombre et de lumière se projette horizontalement suivant une parallèle à la projection horizontale du *rayon* lumineux.

D'après ce qui précède, il est évident que si, dans les fig. 3 et 7, on mène par le point m^h une parallèle à L^h projection du rayon de lumière, cette parallèle lais-

sera en entier, à gauche d'elle, la courbe δ^h ; dès lors il est évident que, dans ces deux cas, la ligne de striction K portera une ombre apparente sur la nappe inférieure du conoïde.

Nous allons limiter la forme de cette ombre portée, qui ne pourra être apparente, d'après ce qui précède, que dans le cas où la trace horizontale H^e du plan lumineux, passant par la droite K, coupera ou touchera le cercle B, base du conoïde.

§ IV.

I. *La trace* H^e *coupant le cercle* B.

La droite L^h menée par le point m^h parallèlement à la projection horizontale du rayon de lumière, pourra couper la génératrice du conoïde située dans le plan Q, en un point qui peut avoir trois positions : ou 1° être dans l'intérieur du cercle B, et ainsi en q (*fig.* 13) ; ou 2° sur le cercle B, et ainsi en b (*fig.* 14) ; ou 3° hors du cercle B, comme fig. 15.

Les figures désignées montrent la forme de l'ombre en chacun de ces trois cas, soit l'ombre portée sur le plan horizontal, soit l'ombre sur le conoïde. Mais il est nécessaire de donner quelques explications.

Il est évident que si, d'un point d'une surface, on mène une parallèle au rayon de lumière, et que cette parallèle étant prolongée ne rencontre pas la surface en une partie opposée à la direction du rayon lumineux, ce point sera éclairé; et au contraire il sera dans l'ombre, si le rayon lumineux qui vient le frapper a dû, au préalable, traverser une partie de la surface.

Or si nous menons par la génératrice verticale G, qui passe par le point m, un plan vertical et parallèle au rayon de lumière, il aura pour trace sur le plan horizontal la droite L^h dans les fig. 13, 14 et 15; et ce plan coupera le conoïde suivant une courbe projetée horizontalement suivant la droite m^hq. Or, il est évident que tous les points de cette courbe seront au-dessous du rayon lumineux qui, passant par le point m, vient percer le conoïde en un point projeté horizontalement en q.

Par conséquent, tous les points de cette courbe seront dans l'ombre; car si de chacun d'eux on mène des parallèles au rayon lumineux, elles viendront toutes couper la droite G en des points situés au-dessous du point m ; mais si, de chacun des points du conoïde projetés dans l'intérieur du triangle mixtiligne qbm^h, on mène des parallèles au rayon lumineux, aucune d'elles ne rencontrera les génératrices du conoïde qui précèdent celle passant par le point considéré ; chacun des

points de cette partie de la surface sera directement frappé par un rayon de lumière.

II. *La trace* H^a *tangente au cercle* B.

Les fig. 16, 17 et 18 donnent tous les cas qui peuvent se présenter, selon la direction donnée à la projection horizontale du rayon lumineux.

N° 10.

PROBLÈME D'OMBRE.

ÉNONCÉ. *Construire l'intersection de deux ellipsoïdes de révolution dont les axes ne se coupent pas. Déterminer la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur l'une et l'autre de ces deux surfaces. Déterminer l'ombre portée de l'un des ellipsoïdes sur l'autre, et l'ombre portée de chacun d'eux, soit sur le plan horizontal, soit sur le plan vertical de projection* (*).

(Le système est supposé éclairé par un rayon de lumière.)

Solution. La solution complète du problème proposé exige la recherche de diverses courbes. Nous allons indiquer successivement les méthodes qui nous paraissent préférables pour la recherche des unes et des autres.

(*) En entrant à l'École d'application de Metz, les élèves sous-lieutenants d'artillerie et du génie avaient, pour premier travail, à exécuter l'épure au trait et le lavis d'un problème d'ombre. Ce travail avait été prescrit par la commission mixte qui avait été chargée de rédiger le programme des études de l'École d'application, lorsque les écoles d'artillerie et du génie furent réunies.

Par ce premier travail, on s'assurait que chaque élève savait la géométrie descriptive, et pouvait sans embarras se servir des méthodes graphiques qui lui avaient été enseignées à l'École polytechnique. Chaque élève avait un problème différent à résoudre, de sorte que pendant ce premier travail, chaque élève pouvait, en suivant les travaux de ses camarades, repasser tout son cours de géométrie descriptive. En 1819 ou 1820, on fut obligé de supprimer ce premier travail, les motifs de cette suppression sont consignés dans les registres des délibérations du conseil des études de l'École d'application de Metz. L'épure au trait et le lavis, que je donne ici, ont été décalqués sur les dessins que j'ai exécutés en 1816 comme élève sous-lieutenant d'artillerie.

§ I.

Construction de la courbe d'intersection de deux ellipsoïdes de révolution dont les axes ne sont pas situés dans un même plan.

Nous supposerons que le plan vertical de projection est parallèle aux axes des deux surfaces données, et que l'axe d'un des ellipsoïdes est vertical.

Cela posé :

Il faut toujours, lorsqu'il s'agit d'un problème à résoudre graphiquement, pour une surface particulière, employer la méthode la plus courte et qui soit fondée sur les propriétés géométriques reconnues exister pour cette surface. Ainsi, pour une classe ou famille de surfaces, il existe des propriétés qui appartiennent à chacune d'elles, mais certaines d'entre elles peuvent jouir de propriétés qui leur soient propres, et qui, dès lors, n'appartiennent qu'à elles, entre toutes les surfaces de la même famille.

Ainsi, par exemple, toutes les surfaces du second ordre, sans exception, sont coupées par des plans parallèles suivant des sections coniques semblables, mais toutes ne possèdent pas des sections circulaires, puisque le paraboloïde hyperbolique doit être excepté.

Le mode de solution pour un problème posé, doit donc varier suivant la nature de la surface proposée.

Pour la solution du problème qui nous est proposé, il existe trois méthodes :

La première méthode consiste à couper les deux surfaces par une série de plans horizontaux ; chaque plan coupera le premier ellipsoïde (celui dont l'axe est vertical) suivant un cercle, et coupera le second ellipsoïde suivant une ellipse, dont il est facile de déterminer le centre et les axes.

Le problème est donc ramené, pour la construction d'un point de la courbe intersection des deux ellipsoïdes de révolution, à celle des points intersection d'un cercle et d'une ellipse dont on connaît le centre et la direction des axes, et leur longueur.

On voit donc de suite que pour que la solution soit expéditive, il faut employer un compas ordinaire pour tracer le cercle, et un compas à ellipse pour tracer l'ellipse.

Ainsi cette méthode exige deux compas différents, l'un pour le *cercle*, l'autre pour l'*ellipse*.

La seconde méthode consiste à déterminer deux plans P et Q perpendiculaires au plan vertical de projection, et tels que les sections elliptiques faites par le plan P dans les deux ellipsoïdes se projettent l'une et l'autre suivant un cercle

sur le plan Q. Alors chaque point de la courbe intersection des deux ellipsoïdes est déterminé par l'intersection de deux cercles; cette méthode n'exige qu'un seul compas ordinaire, celui qui sert à tracer des cercles.

Cette solution, qui est on ne peut plus ingénieuse et très-simple, et facile dans l'exécution graphique, est due, comme on le sait, à M. Chapuis, ancien ingénieur des constructions navales, qui l'a trouvée alors qu'il était élève à l'École polytechnique (*).

C'est par l'emploi de cette méthode que j'ai déterminé les projections de la courbe intersection des deux surfaces ellipsoïdes de révolution, sur l'*épure* de l'atlas ci-joint.

La troisième méthode consiste à transformer *cylindriquement*, d'abord le premier ellipsoïde de révolution (celui dont l'axe est vertical) en une sphère ayant même centre et ayant pour rayon celui du cercle méridien de cet ellipsoïde, et de transformer ensuite, par le même *mode cylindrique*, le second ellipsoïde de révolution en un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Cela fait :

On détermine les plans des sections circulaires de l'ellipsoïde transformé; et coupant la sphère et cet ellipsoïde transformé par une suite de plans parallèles entre eux et à l'un des deux plans diamétraux donnant des sections circulaires sur l'ellipsoïde, on peut facilement, par l'intersection de deux cercles, déterminer chacun des points de la courbe intersection de la sphère et de l'ellipsoïde, *surfaces transformées*.

Cela fait on regardera cette courbe comme la *directrice* d'un cylindre dont les génératrices droites seront parallèles à l'axe de rotation du premier ellipsoïde, et ce cylindre coupera cette surface suivant une courbe qui sera précisément celle cherchée, c'est-à-dire la courbe intersection des deux ellipsoïdes de révolution donnés (**).

Il est, je crois, nécessaire pour être bien compris, d'entrer à ce sujet dans quelques détails.

Désignons par Σ l'ellipsoïde de révolution dont l'axe de rotation est vertical, par R le rayon de son cercle équateur C, et par A son demi-axe vertical. Désignons par $\Sigma_{,}$ le second ellipsoïde de révolution dont l'axe est oblique. Menons par le centre de l'ellipsoïde Σ' un plan horizontal P, ce plan coupera la surface Σ suivant l'équateur C, et la surface $\Sigma_{,}$ suivant une ellipse $\mathcal{E}$.

(*) Voyez dans la Correspondance de l'Ecole polytechnique, publiée par Hachette, le n 3ᵉ du 2ᵉ vol., p. 256.

(**) Voyez ce que j'ai dit, au sujet des transformations cylindriques, dans le *Cours de géométrie descriptive*, 2ᵉ partie, chapitre VI, page 114 et suivantes; et 2ᵉ partie, chapitre XII.

Cela posé :

Prenons un point m sur la surface Σ, et abaissons de ce point une perpendiculaire sur le plan P et le coupant en un point p. Il est démontré (*) que si l'on prend sur la verticale $\overline{pm}$ un point n, tel que l'on ait

$$\frac{\overline{pn}}{\overline{pm}} = \frac{R}{A}$$

le point n sera sur une sphère S ayant l'équateur C pour grand cercle.

Cela posé :

Prenons un point quelconque $m_{,}$ sur le second ellipsoïde $\Sigma_{,}$, et abaissons de ce point une perpendiculaire sur le plan P et le coupant en un point $p_{,}$.

Si l'on prend sur la verticale $\overline{p_{,}m_{,}}$ un point $n_{,}$, tel que l'on ait

$$\frac{\overline{p_{,}n_{,}}}{\overline{p_{,}m_{,}}} = \frac{R}{A}$$

le point $n_{,}$ sera sur un ellipsoïde $\Sigma_{,}'$ à trois axes inégaux passant par l'ellipse $\mathfrak{E}$.

Les deux surfaces Σ et $\Sigma_{,}$ seront, par ce moyen, transformées *ensemble*, l'une en la sphère S et l'autre en l'ellipsoïde $\Sigma_{,}'$.

En sorte que la courbe λ intersection des deux ellipsoïdes de révolution et donnés Σ et $\Sigma_{,}$, sera transformée cylindriquement en la courbe λ' intersection de la sphère S et de l'ellipsoïde à trois axes inégaux $\Sigma_{,}'$.

Si donc l'on construit la courbe λ', il suffira de faire passer par cette courbe un cylindre Δ ayant ses génératrices droites parallèles à l'axe de rotation de l'ellipsoïde Σ, et de chercher l'intersection de ce cylindre Δ et de l'ellipsoïde Σ pour avoir la courbe λ.

Cela dit :

Comme il faut pouvoir déterminer les sections circulaires de l'ellipsoïde transformé $\Sigma_{,}'$, il faut que nous puissions déterminer les trois axes de cette surface, puisque les deux plans diamétraux donnant les sections circulaires passent par l'axe moyen.

Or, si nous menons par l'axe de rotation de l'ellipsoïde $\Sigma_{,}$, un plan Q parallèle au plan vertical de projection, nous obtiendrons la courbe méridienne δ de la surface $\Sigma_{,}$.

(*) Voyez ce que nous avons dit, au sujet des transformations cylindriques, dans le *Cours de Géométrie descriptive*, 1re partie, p. 114, et 2e partie, p. 310 et suivantes.

Ce plan Q coupera l'ellipse δ suivant un de ses axes D, lequel sera une corde de l'ellipse δ.

Nous prendrons cette corde pour axe de transformation cylindrique, et prenant dès lors un point x sur l'ellipse méridienne δ, et abaissant de ce point une perpendiculaire sur la corde D et la coupant en un point d, on prendra sur $\overline{dx}$ un point y, tel que l'on ait

$$\frac{\overline{dy}}{\overline{dx}} = \frac{R}{A}$$

le point y sera sur une ellipse δ' ayant même corde D que l'ellipse δ. Il sera facile de construire le diamètre conjugué de la corde D, soit pour l'ellipse δ, soit pour l'ellipse δ'.

Or, connaissant un système de diamètre conjugué d'une ellipse, on peut facilement construire la direction de ses axes et leur longueur (*). Les axes de l'ellipse δ' seront deux axes de l'ellipsoïde Σ_1', le troisième s'obtiendra en menant par le centre de l'ellipse δ' une perpendiculaire au plan Q et cherchant son intersection avec la surface Σ_1'.

Toutes ces constructions sont exécutables graphiquement et sans difficultés aucunes ; nous n'avons pas besoin d'entrer dans de plus longs détails à ce sujet, tous ceux qui savent ce qui a été enseigné dans notre *Cours de géométrie descriptive*, suppléeront avec facilité à tous les petits détails de construction.

Ce mode de solution s'applique sans peine au cas où la seconde surface Σ_1 n'est pas de révolution, pourvu qu'elle ne soit pas un paraboloïde hyperbolique, qui est la seule surface du second ordre qui ne jouisse pas de la propriété d'avoir des sections circulaires.

Ainsi l'on pourra trouver la courbe d'intersection d'un ellipsoïde de révolution avec un ellipsoïde non de révolution, ou avec un paraboloïde elliptique, ou avec l'un ou l'autre des deux hyperboloïdes à 3 axes inégaux.

Si nous examinons plus attentivement cette méthode de solution, nous voyons de suite, qu'elle peut nous permettre de construire la courbe intersection d'un ellipsoïde à 3 axes inégaux, avec l'une quelconque des surfaces du second ordre, le paraboloïde hyperbolique excepté; et en effet, il suffira d'effectuer deux transformations cylindriques à la suite l'une de l'autre.

Ainsi étant donnés un ellipsoïde à trois axes inégaux Σ et ayant l'un de ses axes vertical, et une surface du second ordre Σ_1 possédant des sections circulaires,

---

(*) Voyez ce que nous avons dit, à ce sujet, dans le *Cours de Géométrie descriptive*, 2e partie, p. 198.

on fera passer par le centre de l'ellipsoïde Σ un plan P horizontal lequel coupera cette surface Σ suivant une ellipse α.

On déformera cette ellipse α (et dans le plan P) en un cercle C par des droites perpendiculaires à l'axe a de cette courbe α qui se trouve situé dans le plan P.

Et par des droites perpendiculaires au plan vertical X, qui passe aussi par l'axe a, on déformera (par rapport au plan X pris pour base de la transformation cylindrique) l'ellipsoïde Σ en un ellipsoïde de révolution Σ' et la surface du second ordre Σ_1 en une autre surface du second ordre et du même genre Σ_1'.

Puis l'on transformera l'ellipsoïde Σ' en une sphère S et la surface Σ_1' en une autre surface du second ordre et du même genre Σ_1'' et cela en prenant le plan P pour base de la nouvelle transformation cylindrique et au moyen de droites perpendiculaires à ce plan P.

On cherchera la courbe λ'' intersection de la sphère S et de la surface Σ_1'', puis on mènera par λ'' un cylindre Δ' perpendiculaire au plan P et l'on déterminera son intersection λ' avec l'ellipsoïde de révolution Σ', enfin l'on mènera par la courbe λ' un nouveau cylindre Δ perpendiculaire au plan X et l'on cherchera son intersection λ avec l'ellipsoïde donné et à 3 axes inégaux Σ; et l'on aura en cette courbe λ, l'intersection des deux surfaces données Σ et Σ_1.

§ II.

Construction de la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

Lorsque l'on a à déterminer la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur une surface, soit qu'elle soit éclairée par un *rayon* de lumière, soit qu'elle soit éclairée par un *point* lumineux, il faut toujours chercher la construction la plus simple, en s'appuyant sur les propriétés géométriques reconnues exister pour la surface toute particulière qui est donnée.

Si donc on donne une surface du second ordre, évidemment l'on devra se rappeler de suite que la courbe de contact d'une telle surface avec un cylindre ou un cône est toujours une courbe plane.

La marche la plus prompte à suivre, consistera donc à déterminer le plan de cette courbe et à chercher son intersection avec la surface proposée.

Et comme de plus, on sait que la courbe de contact est non-seulement plane, mais qu'elle est une section conique, il suffira de trouver les axes et le centre, ou le centre et un système de diamètres conjugués de chacune des projections de cette courbe, pour construire *directement* chacune de ces projections et connaître dès lors la ligne de séparation d'ombre et de lumière demandée.

C'est cette méthode que nous avons suivie dans la construction de l'épure au trait.

§ III.

Construction de l'ombre portée par l'un des ellipsoïdes sur l'autre.

D'après les données de notre épure au trait, c'est l'ellipsoïde de révolution dont l'axe est vertical qui porte ombre sur l'ellipsoïde de révolution dont l'axe est incliné.

Cette ombre portée ne sera autre que la courbe intersection du second ellipsoïde avec le cylindre lumineux tangent au premier ellipsoïde.

On prendra donc un nouveau plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe oblique du second ellipsoïde, et l'on construira sur ce plan la section faite par lui dans le cylindre lumineux.

Et l'on construira la courbe d'intersection du second ellipsoïde et du cylindre lumineux par la méthode connue, en employant des cylindres auxiliaires de révolution et ayant leurs génératrices droites parallèles au rayon de lumière (*).

§ IV.

Ombre portée par l'un et l'autre ellipsoïde sur les plans de projection.

On aura à chercher l'intersection de deux cylindres par les plans de projection. Ces cylindres auront l'un et l'autre leurs génératrices droites parallèles au rayon de lumière, et auront pour *directrice*, l'un l'ellipse *ligne de séparation d'ombre et de lumière* sur le premier ellipsoïde, l'autre l'ellipse *ligne de séparation d'ombre et de lumière* sur le second ellipsoïde.

Il sera facile de construire le centre et un système de diamètres conjugués de chacune des quatre ellipses-ombres portées, dont deux seront sur le plan horizontal, et dont deux seront sur le plan vertical de projection.

On pourra construire ensuite *directement* les quatre ellipses, au moyen du système de diamètres conjugués que l'on aura déterminé pour chacune d'elles (**).

(*) Voyez ce que nous avons dit, à ce sujet, dans le *Cours de géométrie descriptive* (2ᵉ partie), p. 147, et dans les *Compléments de Géométrie descriptive*, p. 349.

(**) Voyez, à ce sujet, ce que nous avons dit dans le *Cours de géométrie descriptive* (2ᵉ partie), p. 198.

N° 11.

NOTES SUR LE LAVIS (*).

§ I.

Dans un dessin où l'on veut représenter la forme d'un corps, souvent les projections de ce corps ne suffisent pas pour en donner une idée complète. Il faudrait presque toujours faire à travers ce corps un grand nombre de sections parallèles entre elles, divisées en plusieurs groupes de directions diverses et convenablement choisies, pour pouvoir en représenter les diverses courbures. Toutefois, ceux qui ne sont pas habitués aux procédés de la géométrie descriptive, qui n'en peuvent pas lire facilement les résultats graphiques, ne pourront pas avoir une idée exacte de la forme d'un corps, si on ne met sous leurs yeux que les projections d'un certain nombre de sections parallèles faites dans ce corps. Alors on est obligé de déterminer sur le corps la forme des ombres, en supposant que ce corps est éclairé par le soleil. C'est donc comme une espèce de *tableau* que l'on fait au moyen du lavis, en cherchant à faire *avancer* certaines parties et à faire *fuir* certaines autres; l'on parvient ainsi à représenter *à l'œil* l'objet comme s'il était en *relief*. L'œil peut alors en reconnaître les différentes formes.

(*) En 1818, alors que j'étais lieutenant d'artillerie attaché à l'état-major de l'École d'application de Metz, le général commandant cette école me chargea de rédiger des notes sur le dessin, sous forme d'*instruction*, pour les élèves sous-lieutenants de l'artillerie et du génie.

J'ai extrait de ce travail les notes que je publie ici.

Je n'ai pas cru devoir publier, parce que ce n'était pas le lieu, mes réflexions sur le dessin du paysage, le dessin de genre à la plume, et le dessin des cartes de tous genres que les officiers sont appelés à exécuter, lorsqu'ils sont chargés d'une reconnaissance militaire, d'un lever à vue, etc.

Mais il me sera permis de dire que le général Berge, après avoir lu mes notes, fit disposer une salle où les élèves pouvaient, le soir, se réunir pour dessiner le paysage et s'adonner aux dessins de genre à la plume. Ce travail était facultatif et dirigé par un des dessinateurs de l'école, qui avait du talent dans ces divers genres de dessin.

Le dessin du paysage et le dessin à la plume sont indispensables à tous les officiers chargés de faire des reconnaissances militaires.

Je dois ajouter qu'avant de remettre mon travail au général Berge, je communiquai mes notes au commandant Clerc, qui, avec la brigade topographique sous ses ordres, a fait le lever de presque toutes nos places de guerre.

Le commandant Clerc était un juge compétent, et nul plus que lui ne pouvait donner d'excellentes idées et de bons avis, car il était dessinateur militaire consommé. Tout ce que j'ai dit sur le lavis par *touches* m'a en quelque sorte été dicté par cet officier, qui était aussi brave à l'armée que savant en topographie.

L'on conçoit que la détermination rigoureuse des ombres sur les corps est indispensable pour que l'on puisse bien reconnaître la forme de certains corps, et ne point les confondre avec d'autres qui pourraient avoir quelque analogie avec eux. Car la forme des ombres dépend évidemment de la forme particulière à chaque corps, et la moindre altération dans l'exactitude des ombres, doit influer sur l'idée que l'on aura de la forme du corps représenté à l'œil au moyen d'un dessin. On suppose, et avec vérité, que les rayons du soleil sont parallèles entre eux, car la grande distance de la terre au soleil doit nécessairement rendre la divergence qui existe entre les rayons du soleil, presque nulle.

Nous supposerons donc que tous les rayons du soleil qui éclairent un objet pris isolément sur la surface de la terre sont parallèles entre eux.

Lorsque nous voudrons éclairer un corps et déterminer les ombres que les rayons de lumière forment sur lui, nous mènerons tangentiellement à ce corps un cylindre dont les génératrices droites seront parallèles aux rayons lumineux, et la courbe de contact du cylindre et de la surface qui termine le corps sera ce que l'on appelle la *ligne de séparation d'ombre et de lumière.*

Nous supposons ici que la lumière se propage en ligne droite, et qu'elle n'éclaire ni à droite, ni à gauche, mais directement, l'objet sur lequel elle vient frapper. Ainsi, un faisceau de lumière arrivant sur un plan éclairera la partie antérieure de ce plan, et ne pouvant le traverser, laissera la partie postérieure de ce plan, entièrement dans l'ombre; et si l'on suppose que ce plan ait des dimensions finies, qu'il ait une forme rectangulaire par exemple, il y aura un certain nombre de rayons lumineux qui raseront le contour de ce plan et iront au delà éclairer les objets qui peuvent se trouver en arrière et plus éloignés; mais tout l'espace compris entre ces rayons rasants sera privé de lumière, puisque tous les rayons compris dans l'intérieur du prisme lumineux seront arrêtés par le plan rectangulaire. On aura donc, en avant du plan, un faisceau de rayons lumineux parallèles entre eux, et dont la forme extérieure sera donnée par les rayons rasants, et derrière le plan, on aura le prolongement de ce faisceau, et qui sera entièrement privé de lumière; on l'appelle le *cylindre d'ombre.* Si l'on cherche l'intersection de tous les rayons rasants avec un plan ou une surface quelconque, on obtiendra une certaine courbe dont l'intérieur sera privé de lumière, et c'est ce que l'on appelle l'*ombre portée* du plan rectangulaire sur le plan ou la surface qui arrête les rayons lumineux rasants.

Si nous considérons une sphère, la ligne de séparation d'ombre et de lumière sera un grand cercle de la sphère, dont le plan sera perpendiculaire à la direction des rayons lumineux.

Si, au contraire, nous considérons un ellipsoïde de révolution, la ligne de sé-

paration d'ombre et de lumière sera une ellipse dont le plan sera un plan diamétral de la surface, et *conjugué* du diamètre parallèle aux rayons lumineux.

On voit donc que la détermination rigoureuse de la ligne de séparation d'ombre et de lumière est indispensable, puisque cette ligne peut varier de forme suivant la nature des surfaces.

Mais, comme la direction du rayon lumineux peut être telle, par rapport à un ellipsoïde à trois axes inégaux, que la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur cette surface se trouve être précisément un cercle, on voit de suite que la construction exacte et géométrique de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur une surface ne peut pas, en général, faire reconnaître à première vue (à l'œil de l'observateur) la forme géométrique et véritable d'une surface. Car, d'ailleurs, n'est-il pas évident que l'on peut construire une infinité de surfaces ayant un cercle pour courbe de contact avec un cylindre, et qui toutes diffèrent essentiellement entre elles et aussi de la sphère et de l'ellipsoïde à trois axes inégaux, ou de révolution.

Il faut donc appeler à son aide l'art du dessin, qui consiste à ménager les *clairs*, les *reflets*, les *ombres*, les *demi-teintes* et les *clairs-obscurs*, de telle sorte que l'on parvient à faire ressortir en relief les objets que l'on a peints sur une feuille de papier et ainsi sur une surface plane; et de telle sorte que l'œil est trompé luimême, et qu'il voit un corps à trois dimensions là où il n'y a qu'une surface plane diversement teintée en chacun de ses points.

Ainsi, l'application que l'on fait de la géométrie descriptive à la détermination des formes rigoureuses des ombres (*ligne de séparation d'ombre et de lumière* sur un corps et *ombre portée* de ce corps sur un autre corps), quoique étant essentielle pour pouvoir peindre la véritable forme d'un corps, est cependant insuffisante; et on le reconnaît de suite, pour peu que l'on ait observé avec quelque attention les effets et le jeu de la lumière sur les différents corps de la nature.

Il faut encore examiner avec le plus grand soin comment la présence d'un corps placé près d'un autre peut influer sur l'intensité des ombres de ce corps. C'est ainsi que, quoique un corps soit éclairé de la même manière, il ressort en *noir* sur un fond blanc, et en *blanc* sur un fond noir, pour les parties éclairées; et pour les parties ombrées, l'intensité des ombres apparaît d'autant plus grande par l'opposition d'un fond blanc, et semble au contraire être atténuée (*s'éteindre*), lorsque le corps se détache sur un fond noir.

Lorsque l'on approche un corps éclairé d'un autre corps sur lequel on veut déterminer les ombres, on voit bientôt et sensiblement diminuer l'intensité des ombres du second corps, et se produire un nouvel effet de lumière auquel on a donné le nom de *reflet*, parce qu'il est occasionné par la réflexion de la lumière

qui arrivant sur le premier corps se réfléchit sur le second corps; les rayons lumineux, en se réfléchissant, forment un nouveau faisceau lumineux d'une direction différente de celle du faisceau direct et venant tomber sur la partie ombrée du second corps, ne l'éclairent par entièrement, mais atténuent l'intensité de l'ombre, et cela parce que la lumière de ces rayons réfléchis est *pâle*. On peut se faire une idée de ce fait, en considérant les ombres formées par la lumière du soleil et celles qui sont formées par la lumière que nous renvoie la lune, lumière qui est *réfléchie*.

Lorsque la lumière arrive sur un plan qui est perpendiculaire à sa direction, le plan est alors le plus éclairé possible. A mesure que ce plan s'incline par rapport à la direction du rayon lumineux, il se teinte de plus en plus, et l'on peut, par l'intensité plus ou moins forte de cette teinte, reconnaître l'inclinaison du plan. Ainsi, lorsqu'un rayon de lumière arrive sur une surface courbe, on peut considérer chaque point de cette surface comme étant une petite *facette* plane, comme étant l'élément du plan tangent en ce point à la surface considérée; alors ce point ou *facette* sera teinté en raison de l'inclinaison du plan tangent qui en est le prolongement par rapport à la direction du faisceau lumineux. Les points ou *facettes* qui appartiennent à la ligne de séparation d'ombre et de lumière sont évidemment contenus dans les différents plans tangents à la surface qui sont parallèles au faisceau lumineux, et ces points ou *facettes* sont totalement dans l'ombre. En passant de ces points à ceux qui, situés sur la surface, sont plus ou moins directement frappés par la lumière, le plan tangent s'incline successivement par rapport au rayon de lumière, jusqu'à ce qu'il arrive enfin à être perpendiculaire à ce rayon.

L'on voit donc que tous les points de la surface qui reçoivent le faisceau de lumière ne sont pas tous également éclairés, et que les teintes qui se trouvent sur chacun d'eux diminuent d'intensité depuis la ligne de séparation d'ombre et de lumière jusqu'au point où le plan tangent est perpendiculaire à la direction du rayon lumineux. Ce point de contact est le plus éclairé entre ceux de la surface.

L'on voit donc que la dégradation de ces teintes, auxquelles on a donné le nom de *demi-teintes*, dépend de l'inclinaison successive des plans tangents, et cette inclinaison varie suivant une loi qui dépend de la nature géométrique et ainsi de la forme de la surface. C'est donc de ces demi-teintes que dépend la représentation exacte d'un objet. Ainsi, pour une sphère, ces demi-teintes se *dégraderont* d'une manière différente que sur un cylindre, un cône, ou sur toute autre surface.

Il faut encore remarquer que lorsque la lumière tombe sur un plan, la teinte est bien la même sur toutes les parties du plan; mais cette teinte ne nous paraît

pas uniforme, notre œil voit comme étant plus teintées les parties du plan qui sont les plus éloignées; et lorsqu'au contraire vous regardez la partie d'un plan qui est dans l'ombre, les points les plus rapprochés de l'œil paraissent les plus noirs.

Il faut, lorsque l'on fait un lavis, avoir égard, autant que faire se peut, aux deux principes fondés : 1° sur l'inclinaison du plan tangent au point de la surface, et 2° sur l'éloignement de ce point par rapport à l'œil (en sorte que si deux points d'une surface sont également rapprochés de l'œil, l'un sera plus teinté que l'autre, si son plan tangent est plus incliné à la direction du rayon de lumière, et si deux points d'une surface sont inégalement éloignés de l'œil, le plus éloigné sera le plus teinté, quoique leurs plans tangents soient également inclinés à la direction du rayon de lumière).

Tout ce que nous venons de dire est exact, si l'on suppose l'œil de l'observateur situé à l'infini sur la direction du rayon de lumière. Mais ordinairement l'on suppose que l'œil de l'observateur, quoique situé à l'infini, n'est pas sur la direction de la lumière; ainsi, lorsque l'on veut *laver* à l'effet la projection verticale ou horizontale d'un corps, on suppose que l'œil est placé à l'infini sur une perpendiculaire au plan vertical ou horizontal de projection, et l'on suppose que le rayon de lumière a, ou 1° une direction arbitraire par rapport aux deux plans de projection, ou 2° qu'il fait un angle de 45° avec le plan vertical, si l'on ne veut laver à l'effet que la projection verticale, ou un angle de 45° avec le plan horizontal, si l'on ne veut considérer que la projection horizontale du corps, ou 3° on suppose que ses projections font chacune un angle de 45° avec la ligne de terre, et c'est ordinairement cette dernière direction que l'on emploie dans les lavis d'architecture. Dès lors on serait obligé de considérer sur la surface du corps les *courbes d'égale teinte réelle*, courbes dont nous parlerons plus loin.

En terminant ce paragraphe nous devons faire remarquer qu'à mesure que les objets s'éloignent de l'œil, leurs formes et leurs caractères perdent de leur netteté, et à tel point que, lorsqu'ils sont très-éloignés, ils sont presque *effacés* à la vue; les ombres s'adoucissent, deviennent *grises;* les parties éclairées se *teintent*, et de telle sorte que, lorsque l'objet est à une certaine distance de l'œil, on ne peut plus distinguer les parties *éclairées* des parties *ombrées*.

Ces différents faits peuvent s'expliquer facilement, car nous n'apercevons les objets que par la lumière qu'ils réfléchissent à notre œil; à mesure donc que les objets s'éloignent de notre œil, la lumière réfléchie ne nous parvient qu'après avoir traversé une couche d'air d'autant plus épaisse.

§ II.

Il existe trois manières de faire un *lavis* : la première que l'on appelle *lavis par teintes adoucies*, la seconde est dite *lavis par teintes plates superposées*, et la troisième enfin est le *lavis par touches*.

Première méthode de lavis. La première manière est celle des trois qui flatte le plus l'œil, mais elle est longue et difficile à bien exécuter, et l'on ne peut d'ailleurs l'employer que lorsque l'on ne doit pas mettre sur le dessin des teintes de couleur (dites teintes de convention) pour distinguer la nature des divers matériaux qui entrent dans l'ensemble et les détails de l'objet représenté.

A ce sujet nous allons entrer dans quelques détails. Les teintes de couleur, par leur opposition avec le blanc du papier, forment déjà une partie des *demi-teintes* qui seraient mises avec grand soin à l'encre de Chine, si l'on ne devait point mettre des teintes de couleur sur le dessin. Si donc ce travail des demi-teintes était exécuté à l'encre de Chine, et que l'on vînt ensuite à placer des teintes de couleur, tout ce travail des demi-teintes serait en pure perte. Les ombres ont besoin d'être très-fortes dans le lavis à l'encre de Chine, lorsque l'on doit ensuite placer des teintes de couleur, parce que ces dernières teintes absorbent en partie l'intensité du premier travail à l'encre de Chine, travail qui forme ce que l'on appelle le *dessous*.

Lors donc que l'on doit placer des teintes de couleur, le premier travail à l'encre de Chine (ou le *dessous*) ne doit point être amené à l'*effet*, c'est-à-dire ne doit présenter aucune *demi-teinte* et ne doit offrir que les ombres très-intenses, de telle sorte qu'en mettant les teintes de couleur elles viennent former les *demi-teintes*, et qu'absorbant l'intensité des ombres exécutés à l'encre de Chine elles viennent amener tout naturellement le dessin à être à l'*effet*.

Si donc, nous le répétons, on fait un dessin par teintes adoucies, de manière à ce que les demi-teintes et les ombres soient tellement bien combinées que la représentation de l'objet soit exacte, aussitôt que l'on aura mis les teintes de couleur le dessin pâlira de *ton* et d'*effet*; l'objet ne sera plus représenté exactement; les parties qui devaient *tourner* ne tourneront plus; le grand travail du *dessous* sera perdu, puisque l'on ne sera pas arrivé au but que l'on s'était proposé : celui d'une représentation exacte de l'objet.

Il faut donc combiner le travail des teintes au lavis à l'encre de Chine avec le travail des teintes de couleur (teintes conventionnelles), et l'on doit dès lors se rappeler que le papier fera les *arêtes brillantes*, que les teintes de couleur feront les *demi-teintes*, et que les ombres placées à l'encre de Chine doivent être très-

fortes, pour qu'après avoir été en partie absorbées par les teintes conventionnelles, leur intensité soit suffisante pour que la représentation de l'objet soit exacte et que le dessin ait ce que l'on appelle de la *vigueur*.

Il y a de très-grands partisans du lavis par teintes adoucies, lorsque l'on ne doit pas superposer des teintes conventionnelles, des teintes de couleur, et surtout lorsqu'il s'agit de représenter des corps ronds.

Mais la méthode dite par teintes plates superposées a prévalu dans toutes les écoles d'architecture; nous dirons plus loin pourquoi.

Deuxième méthode de lavis. Il n'est aucune surface que l'on ne puisse représenter exactement par la méthode des teintes plates superposées, cependant on doit reconnaître qu'elle est difficile dans son application, si l'on veut atteindre à la rigueur géométrique; et en effet : les courbes que doivent affecter la série des teintes plates doivent être calculées géométriquement pour chaque espèce de surface, car sur un corps l'on peut considérer les ombres et les demi-teintes comme formées par une série de bandes d'égale intensité, chacune de ces bandes étant formée par les éléments de la surface qui termine ce corps et qui aurait pour plans tangents, en ces divers éléments, des plans également inclinés par rapport à la direction du rayon de lumière (l'on fait abstraction de l'éloignement, par rapport à l'œil, de ces éléments, ou *facettes* de la surface, parce que la différence de distance entre leurs positions extrêmes n'est pas assez grande, lorsqu'il s'agit d'un corps pris isolément, pour influer sensiblement sur l'intensité des teintes).

D'après ce qui vient d'être dit, il faudrait donc rechercher géométriquement, d'après la nature de la surface considérée, la forme que doit affecter chaque bande d'égale intensité, et cette *recherche graphique* peut être très-longue.

D'ailleurs, les bandes, telles que nous venons de les considérer, sont des bandes d'égale intensité réelle, ce sont celles que l'on devrait construire en supposant l'œil placé à l'infini sur la direction du rayon de lumière, et comme en général l'œil de l'observateur n'est pas ainsi placé, il faudrait construire les bandes d'égale teinte idéale, c'est-à-dire les courbes qui joignent les points de la surface, qui n'étant point, rigoureusement, également teintés, apparaissent cependant à l'œil comme tels (*), et la construction géométrique de ces courbes d'égale teinte idéale devient très-longue et très-compliquée.

Dans les applications du lavis on doit donc renoncer aux constructions géométriques de toutes les courbes autres que les lignes de séparation d'ombre et de lumière, et autres que celles des ombres portées. On n'a, dès lors, d'autre

---

(*) Voyez ce que nous avons dit, à ce sujet, dans les *Développements de Géométrie descriptive*, chap. III, p. 193.

moyen pour arriver à la représentation exacte de la forme des objets, que celui d'examiner avec soin la manière dont la lumière agit sur un corps en relief de la même forme que celui que l'on veut représenter sur son dessin, en cherchant à voir sur cet objet en relief, quelle est à peu près la forme des bandes également éclairées, vu la position de l'œil et la direction du rayon lumineux.

Ce n'est donc qu'après un long exercice et une longue observation des objets de la nature, que l'on peut parvenir à placer d'une manière convenable les teintes d'égale intensité idéale.

Cette habitude et ces observations sont également indispensables pour le lavis à teintes adoucies.

Si dans les dessins d'architecture le lavis à teintes plates superposées doit être préféré, c'est qu'il est très-expéditif et qu'il n'offre pas de difficultés sérieuses, puisque l'on n'a presque toujours, comme corps ronds, que des colonnes.

Le lavis par teintes plates superposées a plus de vigueur, plus de netteté, et semble représenter mieux la dureté du marbre et de la pierre que le lavis par teintes adoucies, qui a toujours quelque chose de *mou*.

Il faut autant que possible approprier, dans un lavis, la touche du pinceau à la dureté et à la nature de la matière dont sont formés les objets que l'on veut représenter, ainsi la manière de lavis qui rendra les différences qui existent entre le bois, la pierre et le fer, devra être préférée, et le lavis par teintes plates superposées se prête assez bien à rendre la nuance de ces différences.

Lorsque l'on emploie la méthode de lavis dite par teintes plates superposées, la quantité dont les teintes plates doivent déborder les unes sur les autres dépend de la forme de la surface. Il faudra donc, à moins que l'on ne détermine géométriquement les courbes d'égale teinte idéale, une grande habitude pour placer convenablement, et en retraite les unes sur les autres, les teintes d'égale intensité pour une surface quelconque.

Mais en architecture, comme nous l'avons dit ci-dessus, on n'a, en général, à examiner comme *corps ronds* que des colonnes, que l'on peut toujours considérer comme étant des surfaces cylindriques. Or, dans le cas d'une surface cylindrique, la *retraite* des bandes d'égale teinte peut très-facilement être déterminée. Et en effet :

Concevons un cylindre vertical ayant pour base une courbe C ; on partagera cette courbe C en parties égales par des cordes égales, et par chacun des points de division on élèvera une génératrice droite du cylindre ; chacune de ces génératrices sera la limite d'une bande d'égale teinte, non-seulement réelle, mais encore idéale, en supposant l'œil placé à l'infini sur une horizontale.

Si donc l'on projette ces bandes sur un plan vertical, on voit que leurs retraites

iront en diminuant depuis le milieu de la projection verticale du cylindre jusqu'à la génératrice extrême.

Et c'est précisément la loi des décroissements des largeurs des bandes en projection verticale qui indiquera la forme de la courbe C.

Ainsi, si le cylindre est elliptique, le grand axe de l'ellipse C étant parallèle au plan vertical, la dégradation des retraites des bandes ne sera pas la même que si le petit axe de cette ellipse C était parallèle au plan vertical; elle serait encore différente, si la courbe C était un cercle.

De plus, en ayant égard au *diapason* des teintes (*), les bandes de même numéro, en supposant la base C du cylindre divisée en un même nombre de parties égales, que cette courbe C soit un cercle, une ellipse ou toute autre courbe, n'auront pas la même intensité. On voit donc de suite que l'effet produit à l'œil par le lavis ne sera pas le même, si l'on a un cylindre *circulaire*, ou *elliptique*, ou etc.

Troisième méthode de lavis. Il existe, comme nous l'avons dit, une troisième méthode de lavis, que nous avons désignée par le nom de *lavis par touches*. C'est celle qui doit être préférée pour rendre des effets de lumière sur un corps, quelles que soient sa nature et sa forme, et surtout pour les dessins à l'*aquarelle*.

Expliquons en quoi consiste cette méthode.

En chaque point d'une surface éclairée, il y a une intensité de teinte qui varie de ce point aux points environnants. Si l'œil est assez exercé pour saisir la différence de la nuance entre les intensités des teintes de deux points voisins, alors on pourra placer sur le papier blanc et aux points qui, dans le dessin, correspondent aux points de la surface en relief, de petites *touches* d'encre de Chine, dont l'intensité sera dans le même rapport que celle des teintes remarquées en les mêmes points sur l'objet-relief. Et en marchant ainsi de proche en proche, décomposant dès lors la surface du corps en petites facettes, on placera sur le papier, et à côté les unes des autres, de petites touches de pinceau dont l'intensité ira en se dégradant de la même manière que les teintes sur la surface du relief. Ce premier travail ne donnera pas toute l'intensité d'ombre que l'on remarque sur l'objet, parce que la teinte qui existe en un point de l'objet, se trouvant entourée de parties ombrées, est plus forte réellement que la touche à l'encre de Chine que l'on place sur le papier et qui doit lui correspondre; cette touche que nous plaçons sur le papier, étant entourée de blanc, paraîtrait beaucoup plus forte que la teinte de l'objet, si on lui donnait réellement la même intensité que cette dernière possède.

(*) Voyez, à ce sujet, le mémoire publié dans cet ouvrage sous le n° 4.

Mais ayant par un premier travail couvert tout le papier, l'on revient par une suite de travaux analogues au premier, et l'on parvient peu à peu et progressivement à *monter le ton* du dessin et à lui donner l'intensité remarquée sur l'objet en relief.

Cette méthode a un très-grand avantage, en ce qu'elle est très-expéditive une fois que l'on a acquis un peu d'habitude et d'habileté.

Et de plus, elle permet, au moyen du seul coup d'œil et sans avoir besoin de recourir aux constructions géométriques, de rendre d'une manière très-fidèle les moindres détails et les moindres inflexions d'un corps et d'une surface. Mais, outre que les effets peuvent être rendus d'une manière excessivement juste, on voit, suivant l'expression des peintres, *circuler l'air* dans le dessin; ce qu'il est impossible d'obtenir soit par le lavis à teintes adoucies, soit par le lavis à teintes plates superposées. Par la première méthode de lavis, il semble que les corps sont tous *polis;* et par la seconde méthode de lavis, il semble que les corps ont été taillés par *zones* au moyen d'un ciseau.

Il est donc à désirer que toutes les fois que l'on a une machine composée d'un grand nombre de pièces de natures diverses et situées dans des plans différents, on emploie de préférence la méthode du lavis par touches, en réservant la méthode du lavis par teintes plates superposées pour le dessin de l'architecture, alors qu'il n'y a que des objets isolés à représenter ou des objets situés à peu près dans le même plan.

Cependant si l'on voulait faire la perspective d'une construction architecturale, comme le dessin rentrerait, dans ce cas, dans ceux que l'on désigne par le nom de *dessins pittoresques*, alors il faudrait employer la méthode des touches, parce que l'on pourrait facilement rendre, par cette méthode, les nuances les plus légères que l'on remarque dans la nature.

La méthode par touches est sans contredit la meilleure pour imiter avec exactitude la nature; ses avantages sont incontestables, car n'est-ce pas transporter dans l'art du lavis, la méthode suivie dans la peinture à l'huile? Aussi les avantages de la méthode par touches se font-ils remarquer dans les dessins de paysage dits à *l'aquarelle*.

Disons comment l'on doit procéder lorsque l'on veut exécuter un *paysage* par la méthode des touches.

On examine quel est le ton et l'intensité de la couleur en un point du paysage que l'on veut représenter, et l'on place sur le papier une touche de couleur ayant le même ton et la même intensité. On passe ensuite au point voisin et l'on opère de la même manière, et ainsi de proche en proche, et l'on parvient à couvrir tout le papier de petites touches juxtaposées, en sorte que l'on a fait comme

une mosaïque. Par ce premier travail la copie du paysage se trouve avoir déjà une vérité de ton et de couleur que l'on ne pourrait pas atteindre par une autre méthode. On reprend ensuite tout le premier travail, en exécutant par-dessus un second travail du même genre, seulement l'on place les secondes touches dans les petits intervalles qui existent entre les premiers, et en revenant successivement par trois et quatre travaux du même genre, on arrive à obtenir un grand fini.

On obtient par ce procédé *des points de vue* dans lesquels l'on ne remarque pas des couleurs factices et de pure convention, mais une couleur générale vraie et des tons de détails conformes à ce qui est dans la nature (*).

§ III.

Lorsque l'on aura une ombre portée par un corps sur un autre corps éclairé, cette ombre portée étant environnée de parties éclairées, paraîtra plus *noire* ou plus intense que les ombres déterminées par la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur l'un ou l'autre corps.

Et cela a lieu parce que l'opposition des parties dans l'ombre et des parties éclairées, nous fait apparaître comme plus intense la teinte qui couvre les parties dans l'ombre.

Lorsqu'une ombre portée arrive vers la ligne de séparation d'ombre et de lumière, sa teinte doit se fondre avec celle de cette dernière ligne, et de manière à ce que les points de la surface du corps qui se trouvent avant et après la ligne de séparation d'ombre et de lumière, aient à peu près la même teinte, et ainsi de manière à ce que l'on passe de l'ombre portée à la ligne de séparation d'ombre et de lumière sans *ressaut*, sans transition brusque.

Ainsi l'ombre portée va en décroissant d'intensité depuis le point où l'objet qui porte ombre touche le corps, jusqu'à la ligne de séparation d'ombre et de lumière tracée sur ce même corps.

Ainsi, par exemple, si l'on avait une *règle* s'appuyant sur un *cylindre*, le point où la règle touche le cylindre sera le commencement de l'ombre portée de la règle sur le cylindre. En cet endroit l'ombre portée sera très-*noire*, soit à cause de l'opposition de cette partie ombrée avec les parties environnantes situées sur le

(*) C'est en se servant de cette méthode, que le commandant Clerc, qui fut pendant longtemps chef de la brigade topographique et qui depuis fut, à la fin de sa carrière, professeur de topographie à l'École d'application de Metz, avait exécuté un grand nombre de vues des Alpes et de l'Italie; l'École d'application de Metz possède quelques-uns de ses précieux dessins, entre autres deux études de marronniers, l'une au lavis, l'autre à l'aquarelle.

cylindre et qui seront frappées par la lumière, soit parce qu'il n'arrive en cette partie de l'ombre portée qu'un très-petit nombre de rayons réfléchis, soit par l'air environnant, soit par les parties environnantes du cylindre. Et que dès lors ces rayons réfléchis ne peuvent que très-faiblement altérer en ce point l'ombre portée et diminuer son intensité.

Mais à mesure que l'on s'éloigne de ce point de contact de la règle et du cylindre, l'ombre portée diminue d'intensité, et enfin finit par se fondre et se mélanger avec les teintes qui forment la séparation d'ombre et de lumière sur le cylindre.

Cette diminution progressive de l'ombre portée tient à deux causes :

La première c'est que plus l'ombre portée s'avance vers la ligne de séparation d'ombre et de lumière, plus les parties du cylindre qui l'avoisinent deviennent teintées (les demi-teintes augmentant en intensité à mesure que l'on s'approche de la ligne de séparation d'ombre et de lumière), par conséquent l'opposition du *noir* au *blanc* diminuant, l'intensité de l'ombre portée semble diminuer ; en cela il y a une illusion d'optique. La seconde cause, et qui est due à un effet réel, c'est que la règle, en s'éloignant du cylindre après le point de contact, reçoit un certain nombre de rayons réfléchis par la surface éclairée du cylindre ; elle les réfléchit une seconde fois sur la partie du cylindre en laquelle se trouve située l'ombre portée, et ces rayons doublement réfléchis viennent diminuer, atténuer l'intensité de l'ombre portée.

Lorsqu'un corps est éclairé par le soleil, la ligne de séparation d'ombre et de lumière et en général les ombres paraissent très-noires, parce que les parties éclairées étant très-vives, elles blessent notre œil et nous empêchent de *lire* dans les ombres. Mais cette intensité des ombres n'est due dans ce cas qu'à une illusion d'optique qui ne provient que de la fatigue que l'œil a éprouvé en se reposant sur des parties vivement éclairées, et en voulant regarder à la fois et les parties éclairées et les parties ombrées.

Mais si l'œil ne se repose que sur les parties ombrées, bientôt l'éblouissement dont il avait été saisi se dissipe, et il finit par *lire* dans toutes les ombres et par voir même leur intensité diminuer graduellement, jusqu'au point où il ne voit plus que des *ombres grises*, là où il avait vu tout d'abord *des ombres noires*.

Nous venons de dire que lorsque l'on regarde un objet éclairé directement par les rayons du soleil, les ombres paraissaient tout d'abord très-fortes, très-intenses, *noires*, à cause de la vive opposition qui existait entre les parties ombrées et les parties éclairées ; mais si l'on met une gaze entre les rayons du soleil et l'objet, la grande vivacité des parties éclairées diminue, et alors les parties ombrées paraissent moins noires.

Cela provient de ce que la gaze *tamise* pour ainsi dire les rayons de lumière

et en diminue, en éteint la force, les parties éclairées qui reçoivent ces rayons *tamisés* sont donc moins brillantes, dès lors l'opposition entre les parties éclairées et les parties ombrées étant moins fortes, les ombres nous paraissent *grises* et non plus *noires*, et dans ce cas on peut *lire* plus facilement les formes variées du corps, dans les parties de ce corps qui se trouvent dans l'ombre.

Les parties ombrées doivent toujours dans la nature être aussi fortes, que les rayons de lumière soient *pâles* ou *vifs*, parce que l'ombre n'est que la privation de lumière. Ce n'est donc que par leur opposition avec des parties plus ou moins éclairées, que l'on voit les différences de force et d'intensité que l'on remarque dans les ombres.

Il est aussi à dire que plus une ombre est petite et étroite, plus elle paraît noire, et que plus une ombre est grande, longue et large, plus elle nous paraît s'éteindre, plus son intensité semble décroître.

Cela tient à ce que dans le premier cas l'œil ne peut regarder cette petite ombre, sans voir en même temps toutes les parties éclairées qui l'entourent, et qui le blessent par leur vivacité, leur éclat; tandis que lorsqu'une ombre est grande, l'œil peut se reposer sur elle sans voir les parties éclairées environnantes, et dès lors n'observant plus la différence qui se trouve entre les *clairs* et les *bruns*, la fatigue qu'il avait éprouvée d'abord par l'éclat de la lumière, se dissipe peu à peu, et il peut examiner attentivement les différentes parties qui sont couvertes par l'ombre, et qui lui sont rendues sensibles en leurs formes variées par les rayons réfléchies sur elles par l'atmosphère ou les corps environnants et qu'elles réfléchissent de nouveau et vers notre œil.

C'est ainsi que lorsque l'on vient à regarder le soleil, l'œil est si vivement blessé, que si l'on regarde peu après les objets qui nous environnent, nous ne pouvons rien apercevoir et nous ne voyons que du noir.

C'est par la même raison, que lorsque passant d'un appartement très-éclairé, dans un appartement obscur, nous n'apercevons rien dans les premiers instants. Mais peu à peu, la fatigue de l'œil étant dissipée, nous finissons par distinguer les objets qui nous entourent.

§ IV.

Les avantages du lavis par teintes plates superposées et du lavis par touches, ne sont pas seulement ceux que nous avons avons signalés ci-dessus.

Il en est un bien important, surtout pour les dessins militaires, c'est la *solidité*. Et en effet, dans le lavis par teintes adoucies, presque toutes les demi-teintes et principalement celles qui avoisinent les clairs, sont très-peu solides, elles ne tiennent presque pas au papier; et cela n'est pas étonnant, puisqu'elles ne sont

faites qu'avec un pinceau presque sec et en effleurant l'épiderme du papier. Au lieu que pour les teintes plates et les touches, on travaille à pinceau plein, et l'on incruste l'encre de chine dans le papier. Mais l'un des grands défauts du lavis par teintes adoucies, c'est de vouloir rendre la nature et de ne la rendre que conventionnellement, car le lavis par teintes adoucies, suppose la représentation d'un objet très-poli, puisque tous les noirs et toutes les teintes couvrent également le papier, et cependant ce genre de lavis ne rend point l'effet de la lumière éclairant réellement un corps poli.

Je m'explique : sur un corps poli, la lumière est réfléchie avec une telle vivacité, que les arêtes brillantes sont assez vives pour blesser notre œil et ne point nous permettre d'apercevoir la dégradation des demi-teintes par lesquelles on arrive à ces arêtes brillantes. En sorte que dans un lavis qui représenterait un corps très-poli, on devrait passer brusquement des arêtes brillantes à une teinte assez foncée et ainsi subitement du blanc au noir.

Nous avons dit précédemment que le lavis par teintes adoucies, semblait toujours représenter des corps polis, parce que les teintes d'encre de chine couvraient entièrement le papier. Expliquons ceci :

On remarque que dans tous les corps de la nature qui ne sont pas polis, la surface est couverte de petites aspérités, qui étant chacune un corps rond a son point brillant comme tout sphéroïde ; mais comme cette aspérité est très-petite alors la lumière qu'elle nous renvoie est faible et cependant sans diminuer notablement l'intensité de l'ombre qui existe sur la partie du corps où se trouvent ces aspérités, elle permet d'apercevoir une certaine quantité de petits points moins éclairés que la partie générale du corps, puisque ces points sont dans l'ombre.

C'est à ce fait que l'on doit le vaporeux que l'on remarque dans les ombres étendues sur les corps de la nature.

Mais dans les corps polis ces aspérités n'existent plus, ou du moins sont excessivement petites, en sorte que les rayons qu'elles réfléchissent à notre œil sont très-faibles, de telle sorte que tous les points du corps poli situés dans l'ombre sont également teintés pour notre œil.

La privation totale des rayons réfléchis par les parties d'un corps poli situées dans l'ombre, donne à cette ombre l'apparence d'un *trou*, et cela est évident, puisque pour que nous puissions apercevoir un corps qui est dans l'ombre, il faut qu'il nous arrive de ce corps une certaine quantité de rayons réfléchis, qui puisse nous faire juger de l'existence de ce corps et apprécier sa forme ; mais s'il n'arrive à notre œil aucun rayon réfléchi, nous ne pouvons rien apercevoir ; et

comme la partie du corps poli que nous voulons voir est dans l'ombre, nous jugeons que cette partie est un *trou*.

Ainsi l'on voit que dans le lavis à teintes adoucies appliqué à la représentation d'un corps très-poli, toutes les ombres doivent faire *trou*, et l'on doit passer presque brusquement du noir au blanc; le blanc du papier étant réservé pour les arêtes et points brillants.

On peut faire le même reproche à la méthode par teintes plates; mais, comme nous l'avons dit, son emploi doit être réservé aux dessins d'architecture et en général à tout dessin où les différentes parties à représenter sont à peu près dans un même plan; ce défaut disparaît alors.

Mais le lavis par touches est le seul qui puisse rendre avec vérité les effets produits par le jeu de la lumière sur les corps, parce que toutes les touches de pinceau étant placées à côté les unes des autres, laissent entre elles de petits intervalles, des parties moins foncées en teinte que chacune des touches et en même nombre que ces touches, petits intervalles qui représentent les petites aspérités qu'on aperçoit sur les corps. Ces parties moins teintées dans le dessin nous renvoient de la lumière réfléchie, de la même manière que les aspérités du corps.

Au moyen de travaux successifs bien ménagés nous pouvons diminuer le nombre de ces petits intervalles et les rendre moins clairs là où il est nécessaire, et parvenir ainsi à la représentation exacte d'un corps plus ou moins poli.

C'est à ces petits intervalles que l'on doit le vaporeux que l'on remarque dans les lavis faits par la méthode des touches; en sorte que les ombres n'y font pas *trous*; l'air, suivant une expression reçue, circule dans le dessin; de plus, cette méthode permet de pouvoir monter un dessin de *ton*, de manière à ce qu'il devienne *vigoureux*, sans devenir *noir*.

§ V.

Des ombres portées par un corps éclairé par plusieurs lumières.

Lorsqu'un corps est éclairé par trois points lumineux, par exemple, placés sur une même droite horizontale et à des distances finies les uns des autres, et de manière à ce que la distance de chacun d'eux au corps soit telle que chacune des trois ombres portées par ce corps sur un plan horizontal ait une certaine étendue, l'on remarque que l'ombre la plus longue est produite par le point lumineux le plus éloigné du corps (il va sans dire que le corps est plus rapproché du plan horizontal que l'horizontal passant par les points lumineux. Si le corps était, par exemple, une sphère, la droite qui unirait son centre avec l'un des points lumineux ferait, avec la verticale abaissée du point lumineux sur le plan

sur lequel la sphère porte ombre, un angle d'autant plus grand que le point lumineux serait plus éloigné de la sphère).

A mesure que le point lumineux se rapproche du corps, l'ombre portée diminue d'étendue, mais paraît augmenter d'intensité; et cela a lieu parce que cette ombre se rapproche du corps et que la partie éclairée sur le corps diminue d'étendue, et que dès lors il y a moins de rayons réfléchis par le corps sur l'air environnant qui soient à leur tour réfléchis de nouveau par l'air sur la partie du plan où est située l'ombre portée; mais c'est surtout à cause de ce fait physique, savoir, que les ombres décroissent d'intensité dans le rapport direct du carré de la distance du point lumineux, supposé situé à distance finie, au plan sur lequel le corps porte ombre (le corps restant, dans tous les cas, à la même distance du point lumineux).

Lorsqu'un corps (une sphère, par exemple) est éclairé par trois lumières, on obtient sur le plan horizontal trois ombres portées distinctes, et qui, suivant la position des lumières par rapport aux corps, peuvent être superposées en partie les unes sur les autres. On remarque alors trois intensités différentes sur l'ensemble de l'ombre.

Pour une partie, celle sur laquelle il n'y a pas superposition d'ombre, la teinte est très-faible; pour la seconde partie, celle où deux ombres se superposent, la teinte est assez forte; et, enfin, pour la troisième, celle où les trois ombres se superposent, la teinte est très-foncée, presque *noire*.

De plus, on remarque que, pour les parties où existent les teintes faibles et assez fortes, chaque partie paraît plus *claire* au milieu que vers les bords.

Cela tient à ce que l'on a sur le corps trois zones d'étendue différente, éclairées chacune par un des points lumineux; en sorte qu'il y a des points du corps qui reçoivent la lumière des trois points lumineux, d'autres points ne reçoivent la lumière que de deux points lumineux, plusieurs points ne sont éclairés que par un seul des trois points lumineux, et, enfin, il y a une certaine partie du corps dont les points sont totalement privés de lumière.

En sorte que l'on a trois lignes de séparation d'ombre et de lumière sur le corps, et trois cônes lumineux venant couper le plan sur lequel le corps porte ombre.

En vertu de l'existence de ces trois cônes lumineux, il arrive que l'ensemble de l'ombre portée se trouve divisé en trois parties distinctes; l'une de ces parties, la plus faible en teinte, est éclairée par deux des trois points lumineux, l'autre de ses parties, dont la teinte est assez forte, est éclairée par un seul des trois points lumineux, et, enfin, la troisième partie, celle qui est noire, est totalement privée de lumière.

Mais si, dans les deux premières parties de l'ensemble de l'ombre portée, le

milieu paraît moins teinté que les bords, cela provient d'une illusion d'optique dont nous avons parlé ci-devant, savoir, que passant d'une partie *ombrée* à une partie *claire*, l'opposition du *blanc* au *noir* plus ou moins foncé, fait paraître le bord de la partie ombrée comme étant plus intense de *ton*.

§ VI.

Des reflets.

Nous savons, sur un corps, éclairé par un *rayon* ou un *point* lumineux, déterminer par des méthodes graphiques simples et rigoureuses : 1° les lignes de séparation d'ombre et de lumière; 2° les ombres portées par ce corps sur lui-même ou sur d'autres corps environnants; 3° les points et les arêtes brillantes. Il nous reste à considérer les effets produits sur un corps par la réflexion des rayons de lumière sur les corps environnants; ou autrement il nous reste à déterminer les *reflets* produits dans les ombres d'un corps, par l'approche d'un ou de plusieurs corps éclairés.

Concevons un corps A éclairé par un *point* ou un *rayon lumineux* et un autre corps B voisin du corps A et aussi éclairé par le même *point* ou le même *rayon* lumineux.

Les rayons lumineux qui viendront frapper la surface du corps B, seront réfléchis par ce corps et viendront frapper le corps A. Ces rayons reflechis venant frapper la surface du corps A en des points situés dans l'ombre, ou dans les demi-teintes, y produiront un effet désigné par le nom de *reflet*.

Déterminons l'*étendue* du reflet.

Il est évident que tous les rayons réfléchis par la surface du corps B formeront un faisceau de droites ayant pour enveloppe une surface gauche Σ qui viendra couper la surface du corps A suivant une courbe δ qui sera sur ce corps A la limite du reflet.

L'étendue du reflet étant déterminée, on peut se demander de déterminer les points où le reflet sera plus intense, par conséquent se demander où seront les points les moins *sombres* ou en d'autres termes les plus *clairs*, dans l'étendue du reflet.

Ici, il faudra distinguer deux cas : 1° celui où l'on entendra parler de l'intensité réelle du reflet et 2° celui où l'on entendra parler de l'intensité apparente du reflet, le corps A étant vu d'un point situé en une position particulière de l'espace.

Dans le premier cas, il faudra chercher sur le corps B les courbes lieu des points pour lesquels chaque rayon réfléchi aura la même intensité de lumière.

On déterminera donc sur le corps B une suite de courbes d'égales intensités réelle $\gamma, \gamma', \gamma'', \dots$ et l'intensité variant entre ces courbes, et ainsi de courbe à courbe suivant une loi donnée.

Cela fait, on cherchera parmi tous les rayons réfléchis par les courbes $\gamma, \gamma', \gamma'', \dots$ ceux qui viendront frapper la surface du corps A sous un même angle α et tous ces points étant réunis par une courbe ξ, on aura, sur le corps A, une courbe d'égale intensité réelle du reflet.

On aura donc ainsi, sur la surface du corps A, une suite de courbes $\xi, \xi', \xi'', \dots$ d'égale intensité réelle de *reflet*.

Mais comme le corps A est aperçu par le spectateur en supposant que son œil soit placé en un certain point o fixe de position dans l'espace, les courbes $\xi, \xi', \xi'', \dots$ ne seront plus vues par l'œil placé en o, comme étant chacune d'égale intensité.

Il faudra donc résoudre le second problème et chercher pour chacune de ces courbes $\xi, \xi', \xi'', \dots$ les points pour lesquels les droites menées de chacun d'eux à l'œil du spectateur, font avec la surface A un même angle 6; alors tous ces points étant unis par une courbe λ, on aura, en cette courbe λ, une courbe d'égale intensité apparente de *reflet* sur le corps A.

On pourra de la même manière se procurer une suite de courbes $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$ et l'on aura divisé le *reflet* en bandes, chacune étant d'égale intensité, et l'intensité variant de bande à bande (*).

Prenons pour exemple la projection verticale de la niche, sur laquelle, après avoir déterminé les ombres, nous nous proposerons de déterminer le reflet.

La niche est terminée inférieurement par un plan demi-circulaire, ce plan réfléchit les rayons lumineux sur le cylindre concave qui termine verticalement la niche, et tous ces rayons réfléchis seront parallèles entre eux. Il est évident que les rayons réfléchis par l'arête extrême du plan qui forme le sol, cette arête étant le diamètre du demi-cercle plan, il est évident, dis-je, que ces rayons forment un plan oblique qui coupera le cylindre creux suivant une ellipse E qui sera la limite du *reflet*. Le reflet s'exercera ici sur la partie éclairée de la niche, car aucun rayon réfléchi n'ira frapper la partie qui est dans l'ombre; le reflet sera donc terminé d'une part à l'ombre portée sur le cylindre creux, par l'arête verticale et saillante de la niche et par une portion de l'ellipse E. Le reflet s'arrête donc à l'ombre portée et ne pénètre pas dans l'ombre.

(*) Les constructions graphiques à exécuter seront précisément celles que nous avons indiquées dans les *Développements de géométrie descriptive*, chap. III, p. 193, lorsque nous avons cherché à déterminer sur un corps les lignes d'égale teinte, soit réelle, soit apparente.

Il est encore évident que si l'on mène un plan X vertical et parallèle au *rayon* de lumière, il coupera le cylindre creux suivant une génératrice droite et verticale G et que tous les rayons refléchis situés dans ce plan X feront avec la surface cylindrique le même angle en chacun des points où cette droite G se trouvera frappée par un rayon réfléchi.

Dès lors, il est évident que toutes les lignes d'égale intensité réelle de *reflet* seront des droites verticales, des génératrices du cylindre creux.

Cela dit :

Comme nous supposons l'œil du spectateur placé à l'infini sur une perpendiculaire au plan vertical de projection, il s'ensuivra que toutes les lignes d'égale intensité apparente de *reflet* seront encore des génératrices droites du cylindre.

Mais si l'on faisait une perspective ombrée de la niche, si dès lors on supposait l'œil du spectateur situé à distance finie, alors les lignes d'égale intensité apparente de *reflet* seraient évidemment des courbes.

N° 12.

ÉNONCÉS DE DIVERS PROBLÈMES D'OMBRE.

En 1818, alors que j'étais attaché à l'état-major de l'École d'application de Metz, comme lieutenant d'artillerie et professeur-adjoint pour les sciences mathématiques, je fus chargé de réviser les anciens programmes du problème d'ombre que les élèves sous-lieutenants de l'artillerie et du génie devaient résoudre, comme premier travail, à leur entrée à l'École (*).

C'est un extrait de ce travail que je donne ici comme *spécimen*. Les professeurs de géométrie descriptive pourront facilement augmenter le nombre des problèmes, en choisissant leurs exemples dans les applications journalières que leurs élèves rencontreront plus tard dans leurs travaux d'ingénieur.

(*) Voir ci-devant la note au bas de la page 124 (mémoire n° 10).

§ I.

ÉNONCÉS DE CINQUANTE PROBLÈMES D'OMBRE (*).

1. *Vis cylindrique* à filet carré.
2. *Vis cylindrique* à filet triangulaire.
3. *Vis conique* tronquée à filet triangulaire. Le filet étant terminé par une surface conique parallèle à celle qui compose le corps de la vis.
4. *Vis conique* à filet triangulaire. Le filet étant terminé par une surface conique dont le sommet est celui du cône qui sert de corps à la vis.
5. *Écrou* d'une vis cylindrique à filet carré.
6. *Écrou* d'une vis cylindrique à filet triangulaire.
7. *Chausse-trappe* composée de cônes.
8. *Chausse-trappe* composée de tétraèdres.
9. *Chausse-trappe* composée de pyramides quadrangulaires.
10. *Pile* triangulaire de boulets et composée de 4 boulets.
11. *Pile* quadrangulaire composée de 5 boulets.
12. *Niche* droite.
13. *Niche* rampante.
14. *Ellipsoïde* non de révolution.
15. Intersection de *deux ellipsoïdes* de révolution dont les axes ne se coupent pas.
16. *Conoïde* à base elliptique. La droite directrice sera perpendiculaire au plan vertical.
17. *Hyperboloïde* à une nappe et à base elliptique.
18. *Vis* tracée sur une surface engendrée par une portion de cercle concave vers l'axe de révolution.
19. *Vis* tracée sur un hyperboloïde à une nappe et de révolution.
20. Deux *hyperboloïdes*, à une nappe et de révolution, égaux et tangents l'un à l'autre.
21. Intersection de deux *cônes* dont la base est une courbe du deuxième degré.
22. Intersection d'un *cône* et d'un *ellipsoïde* de révolution.
23. Intersection d'un *cylindre* et d'un *ellipsoïde* de révolution.

(*) On a choisi *principalement* des problèmes d'ombre relatifs à des surfaces gauches pour familiariser les élèves avec les propriétés dont jouissent ces sortes de surfaces.

24. *Puits* militaire conique, avec son pieu. On donnera la perspective militaire et la perspective réelle, et sur l'une et l'autre perspective on tracera les ombres.

25. *Cube* évidé. Perspective militaire et perspective réelle, et pour l'une et l'autre on donnera les ombres.

26. *Tétraèdre* évidé. Perspective militaire et perspective réelle, avec les ombres.

27. *Corps annulaire*, l'axe oblique par rapport aux deux plans de projection.

28. *Anneaux* ou chaînons engendrés par un cercle.

29. *Anneaux* ou chaînons engendrés par un rectangle.

30. *Tétraèdre* et *hyperboloïde* à une nappe, l'un et l'autre en creux. L'axe de l'hyperboloïde passe par le sommet du tétraèdre, et les deux bases de l'hyperboloïde et du tétraèdre sont parallèles.

31. *Bombe* et ses anses et anneaux de support.

32. *Colonne torse*, engendrée par une sphère dont le centre se meut sur une hélice cylindrique et circulaire.

33. *Piédouche* éclairé par un point lumineux, et perspective.

34. *Chapiteau* dorique éclairé par un point lumineux, et perspective.

35. *Limon* d'escalier, isolé, à base circulaire. (On ne dessinera qu'une révolution et demie.)

36. *Balustre* rampant (dorique romain) décomposé en tranches horizontales, qui, tournant chacun autour de son diamètre, deviennent parallèles à la rampe.

37. *Balustre* rampant (dorique romain) décomposé en tranches horizontales, dont on augmente les ordonnées, des coordonnées correspondantes de la rampe.

38. *Anneau* cylindrique, engendré par un rectangle. (L'axe est oblique par rapport aux deux plans de projection.)

39. *Piédouche* rampant, décomposé en tranches horizontales qui, chacune tournant autour de son diamètre, deviennent parallèles à la rampe.

40. *Piédouche* rampant. (En augmentant les ordonnées, des coordonnées correspondantes de la rampe.)

41. *Coupe* dans une hyperboloïde à une nappe et de révolution. (Le plan sécant passe par l'axe.)

42. *Conoïde* à base elliptique. La droite directrice sera parallèle au plan vertical. En plan le conoïde sera supposé creux.

43. *Coupe* dans un conoïde à base circulaire. Le plan passe par le centre du cercle base et par la droite directrice.

44. *Coupe* dans un conoïde à base circulaire. Le plan passe par le centre du cercle base, et il est perpendiculaire à la droite directrice.
45. Intersection de deux *puits* sphériques.
46. Intersection de deux *puits* coniques.
47. Intersection de deux *puits* paraboloïdes (de révolution).
48. *Roue* horizontale à *Rodet*. (L'on prendra l'échelle la plus grande possible.)
49. Ensemble de trois *puits* militaires coniques, avec la forme qu'affectent les terres qu'on rejette. Les centres des trois puits sont aux sommets d'un triangle équilatéral.
50. Intersection d'une *sphère* et d'un *cône* oblique à base elliptique. La sphère a son centre au sommet du cône.

§ II.

PROGRAMMES DE QUATORZE PROBLÈMES D'OMBRE.

1. *Vis cylindrique à filet carré.*

1° *Dessin.* On déterminera les lignes de séparation d'ombre et de lumière sur la projection verticale et sur la projection horizontale.

On cherchera l'ombre portée sur l'un et l'autre plan de projection.

On prendra la direction du rayon de lumière telle que l'on puisse avoir une ombre portée sur le plan vertical. On déterminera les points brillants.

On placera sur le cylindre un seul filet, ou deux, ou trois, ou quatre filets à volonté.

2° *Mémoire.* On décrira dans tous ses détails la construction graphique employée ; celles à faire pour déterminer les arêtes brillantes et les points brillants : les premières sur le cylindre, et les deuxièmes sur la surface gauche du filet.

On discutera avec soin le lavis, c'est-à-dire que l'on donnera les raisons qui ont dirigé dans la position des parties fortement teintées, et les principes d'après lesquels sont placés les ombres, les demi-teintes, les clairs et les reflets.

On examinera comment, au moyen de teintes plus ou moins fortes, et de clairs bien ménagés, on peut parvenir à représenter la nature et à produire le relief.

2. *Vis cylindrique à filet triangulaire.*

1° *Dessin.* On déterminera sur les projections horizontale et verticale les lignes de séparation d'ombre et de lumière, après avoir cherché la courbe qui, en projection verticale, limite la surface du filet.

On déterminera les ombres portées sur l'un et l'autre plan. Le rayon de lumière sera pris de manière que l'ombre portée puisse exister sur le plan vertical.

On déterminera les arêtes et points brillants.

2° *Mémoire*. On décrira les constructions employées pour déterminer les lignes de séparation d'ombre et de lumière, et les points brillants.

On discutera la nature de la courbe qui limite la surface du filet dans la projection verticale.

On discutera avec soin les principes d'après lesquels on a fait le lavis; examinant les raisons qui ont engagé à placer les ombres fortes, les demi-teintes, les clairs-obscurs, les reflets et points brillants, ainsi qu'on l'a fait.

On discutera cette question : Comment la lumière se comporte-t-elle par rapport aux corps très-polis et par rapport à ceux qui ne le sont que très-peu?

3. *Vis conique* (*tronquée*) *à filet triangulaire*.

Le corps de la vis est composé d'un cône droit à base circulaire. Chaque filet de la vis est engendré par un triangle, variable de grandeur, mais restant toujours semblable à lui-même, qui se meut en passant successivement dans tous les plans méridiens; son sommet parcourt une spirale tracée sur un cône concentrique à celui qui termine le corps de la vis, et sa base coïncide successivement avec les diverses génératrices droites du cône, corps de la vis.

L'on ne considérera *qu'un tronc* de cône. On placera deux, ou trois, ou quatre filets.

1° *Dessin*. On déterminera les projections horizontale et verticale des lignes de séparation d'ombre et de lumière, soit sur le cône, soit sur le filet de la vis. On cherchera les arêtes brillantes et les points brillants. L'on déterminera l'ombre portée sur le plan horizontal et sur le plan vertical de projection. L'on prendra la direction du rayon de lumière telle que cette dernière ombre puisse exister.

2° *Mémoire*. On décrira toutes les constructions employées et l'on donnera les raisons qui ont déterminé dans le choix de la méthode graphique employée.

On examinera la nature de la courbe projection horizontale de la spirale tracée sur le cône (dans le cas où le sommet du cône se projette sur le centre du cercle qui lui sert de base).

On discutera avec soin le lavis, donnant les motifs qui ont engagé à forcer *en teinte* telle ou telle partie.

On examinera si une ombre portée doit être aussi noire près du corps qui la donne, qu'à son extrémité.

4. *Vis conique à filet triangulaire.*

Le corps de la vis est un cône droit à base circulaire; son axe est vertical. Le filet de la vis est engendré par un triangle isocèle et invariable de surface dont la base est constante, et dont le sommet reste constamment sur une surface conique parallèle à la première (les sommets des deux cônes n'étant pas dès lors en un même point); pendant que ce triangle passe successivement par tous les plans méridiens, un des points de sa base parcourt une *spirale* tracée sur le cône.

1° *Dessin.* On déterminera les projections horizontale et verticale des lignes de séparation d'ombre et de lumière. On déterminera l'ombre portée par la vis sur elle-même et sur les deux plans de projections.

On prendra la direction du rayon de lumière telle que l'ombre portée sur le plan vertical existe.

On déterminera les arêtes brillantes et les points brillants.

On déterminera la courbe qui sert de limite au filet en projection verticale.

2° *Mémoire.* L'on décrira les principes de géométrie descriptive d'après lesquels on a exécuté les constructions graphiques.

On discutera la nature de la courbe qui limite le filet en projection verticale.

On discutera avec soin le lavis, examinant d'après quels principes l'on doit combiner les teintes fortes et les clairs, ainsi que les demi-teintes pour produire le relief.

On examinera pourquoi les ombres portées sur un corps en partie éclairé, en partie privé de lumière, doivent se fondre avec la partie ombrée de ce corps.

5. *Écrou d'une vis cylindrique à filet carré.*

1° *Dessin.* On déterminera les lignes de séparation d'ombre et de lumière sur les projections verticale et horizontale.

Ces lignes de séparation consisteront dans l'ombre portée par l'écrou sur lui-même et dans la séparation d'ombre et de lumière sur le filet en creux.

On pourra considérer un écrou appartenant à une vis carrée à deux, ou trois, ou quatre filets.

2° *Mémoire.* On décrira en détail les constructions graphiques nécessaires pour la détermination des lignes de séparation d'ombre et de lumière, et les lignes qui terminent les ombres portées du corps sur lui-même.

On discutera avec soin le lavis, examinant comment les teintes doivent décroître pour produire le relief.

On n'oubliera pas d'examiner d'où peuvent provenir les reflets.

6. *Écrou d'une vis cylindrique à filet triangulaire.*

1° *Dessin.* On déterminera les lignes de séparation d'ombre et de lumière sur la surface gauche du filet, et l'ombre portée par l'écrou sur lui-même.

On déterminera les points brillants.

2° *Mémoire.* On décrira les procédés graphiques employés pour la construction des lignes de séparation d'ombre et de lumière, pour celle des ombres portées, et pour la détermination des points brillants.

On discutera avec soin le lavis, donnant la relation qui doit exister entre la force des teintes pour produire le creux; on indiquera les points où il doit y avoir des reflets et l'on indiquera d'où ces reflets proviennent.

7. *Chausse-trappe composée de cônes.*

Les quatre sommets des cônes composant la chausse-trappe sont situés aux sommets d'une pyramide triangulaire régulière (dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux). Le centre de la sphère circonscrite à cette pyramide sera celui d'une sphère d'un petit rayon, à laquelle seront tangents les cônes composant les quatre pointes de la chausse-trappe. Trois des sommets de la chausse-trappe s'appuieront sur le plan horizontal.

1° *Dessin.* On déterminera les projections horizontale et verticale de la chausse-trappe. On déterminera en projection horizontale et verticale les courbes d'intersection des cônes entre eux.

On cherchera ensuite les lignes de séparation d'ombre et de lumière sur chacun des quatre cônes, les ombres portées par le corps sur lui-même, sur le plan horizontal et sur le plan vertical.

On déterminera les arêtes brillantes.

2° *Mémoire.* On décrira : 1° les procédés graphiques employés pour déterminer les projections horizontale et verticale du corps, 2° les constructions graphiques pour la détermination des ombres portées et des lignes de séparation d'ombre et de lumière, et 3° enfin la construction des arêtes brillantes.

On discutera avec soin le lavis, indiquant pourquoi les ombres portées, quand elles sont grandes et étendues, s'affaiblissent à mesure qu'elles s'éloignent du corps qui les produit, et surtout comment, pour le lavis, on peut, en dégradant les ombres vers la base, et au contraire, y renforçant les demi-teintes, produire le relief d'un cône droit.

8. *Chausse-trappe composée de tétraèdres.*

Les quatre sommets des branches de la chausse-trappe sont situés aux sommets d'une pyramide triangulaire régulière. Le centre de la sphère qui lui est circonscrite se trouve le centre d'une petite sphère à laquelle les tétraèdres qui composent les branches de la chausse-trappe sont tangentes.

On peut disposer ces tétraèdres de plusieurs manières différentes, les uns par rapport aux autres.

1° *Dessin.* On déterminera les projections horizontale et verticale du corps.

On déterminera les ombres portées sur le plan horizontal et sur le plan vertical, et les ombres portées par le corps sur lui-même.

2° *Mémoire.* On décrira les constructions graphiques nécessaires pour déterminer les projections horizontale et verticale du corps, examinant comment les tétraèdres peuvent être disposés les uns par rapport aux autres, de manière à donner une figure régulière à leur jonction, et l'on indiquera toutes les combinaisons que l'on peut faire pour obtenir un résultat satisfaisant.

On examinera quelle loi de dégradation doivent suivre les teintes pour que le lavis produise le relief.

9. *Chausse-trappe composée de pyramides quadrangulaires.*

Même programme que pour la chausse-trappe (n° 8) composée de pyramides triangulaires.

Dans les trois problèmes 7, 8 et 9, il conviendra de donner une dimension assez grande au rayon de la petite sphère intérieure à laquelle les quatre branches de la chausse-trappe se trouvent tangentes, afin que les intersections des faces des cônes ou des pyramides, entre elles, soient visibles d'une manière nette, et que toutes les arêtes soient bien visibles sur l'épure.

10. *Pile de quatre boulets.*

On placera trois boulets sur le plan horizontal; les trois centres formeront les sommets d'un triangle équilatéral. Le quatrième boulet sera placé sur les premiers.

Deux des boulets de la base triangulaire seront parallèles au plan vertical.

1° *Dessin.* On déterminera les projections horizontale et verticale des lignes de séparation d'ombre et de lumière sur chaque boulet; on déterminera ensuite

les contours des ombres portées par les boulets les uns sur les autres, et enfin, de tout le système sur le plan horizontal. On déterminera aussi les points brillants.

Le rayon de lumière sera la diagonale d'un cube.

2° *Mémoire*. On décrira les constructions graphiques employées pour la détermination des lignes de séparation d'ombre et de lumière, et celles pour les contours des ombres portées, et celles aussi pour la détermination des points brillants.

On discutera le lavis, expliquant comme l'on doit combiner les teintes, demi-teintes et ombres, pour produire le relief.

11. *Pile de cinq boulets.*

On placera quatre boulets sur le plan horizontal, de manière que les centres soient les sommets des quatre angles d'un carré. On pourra placer parallèlement au plan vertical ou l'un des côtés, ou la diagonale du carré. Le cinquième boulet sera posé sur les quatre premiers formant la base de la pile.

1° *Dessin*. On déterminera les lignes de séparation d'ombre et de lumière sur chaque boulet, les contours des ombres portées par les boulets les uns sur les autres, et de tout le système sur le plan horizontal. On déterminera la position des points brillants.

Le rayon de lumière sera la diagonale d'un cube.

2° *Mémoire*. On décrira les constructions employées pour la détermination des lignes de séparation d'ombre et de lumière, pour celle des contours des ombres portées et pour les points brillants. On démontrera l'éxactitude des méthodes graphiques employées.

On discutera le lavis, expliquant comment l'on doit combiner les clairs, demi-teintes et teintes fortes pour produire le relief.

12. *Niche droite*.

La niche pourra être sphérique ou formée par un quart d'ellipsoïde dont le grand axe sera horizontal ainsi que le plus petit, si l'ellipsoïde n'est pas de révolution; on pourra, si l'on veut, prendre un ellipsoïde de révolution, l'axe de révolution étant vertical et le grand axe de l'ellipse méridienne étant horizontal.

1° *Dessin*. On déterminera l'ombre portée par la niche sur elle-même; la position des points et arêtes brillantes.

Le rayon de lumière sera quelconque.

2° *Mémoire.* On expliquera les méthodes graphiques employées pour la construction de l'ombre portée et des points brillants. On examinera ce que serait l'ombre portée, dans le cas où le rayon de lumière serait la diagonale d'un cube. On expliquera comment on peut déterminer d'une manière précise les points de raccordement des trois lignes qui composent le contour de l'ombre portée.

L'on discutera le lavis, expliquant la combinaison à faire des clairs, demi-teintes et teintes fortes pour produire le relief. L'on reconnaîtra la position et la limite des reflets.

13. *Niche rampante.*

La niche rampante se déduira de la niche droite sphérique ou ellipsoïdale, en coupant tout le système par une suite de plans horizontaux que l'on fera tourner (autour de leurs intersections, avec le plan qui partage la niche droite en deux parties symétriques) jusqu'à ce qu'ils deviennent parallèles au plan de la rampe.

La surface composée par ces nouvelles courbes sera celle de la niche rampante.

1° *Dessin.* On déterminera l'ombre portée de la niche sur elle-même. Les arêtes brillantes et points brillants.

Le rayon lumineux sera la diagonale d'un cube.

2° *Mémoire.* On expliquera les méthodes graphiques employées pour la construction des contours de l'ombre portée, et pour la détermination des points et arêtes brillantes.

On reconnaîtra la nature de la surface de la niche rampante.

On discutera le lavis, expliquant la combinaison que l'on doit faire des clairs, demi-teintes et teintes fortes pour produire le relief. On recherchera la position et la limite des reflets.

14. *Ellipsoïde non de révolution.*

On placera l'ellipsoïde comme on voudra par rapport aux plans des projections.

1° *Dessin.* On déterminera la ligne de séparation d'ombre et de lumière et le point brillant, soit dans la projection horizontale, soit dans la projection verticale, et l'ombre portée sur le plan horizontal.

Le rayon de lumière sera la diagonale d'un cube.

2° *Mémoire.* On expliquera les méthodes graphiques employées pour la construction du point brillant et de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, et du contour de l'ombre portée.

On discutera le lavis, expliquant la combinaison des clairs, demi-teintes et teintes fortes, pour produire le relief.



LIVRE II.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE A LA PERSPECTIVE.

Avant que Monge ne publiât son Traité de geométrie descriptive, il existait divers traités de perspective dont plusieurs sont très-anciens. La méthode employée était celle dite : *des points de concours*.

Les anciens géomètres, au moyen de cette méthode, exécutaient la perspective des lignes droites ou courbes, et des points intersection de ces lignes; mais ils ne savaient pas déterminer la perspective d'une surface, car ils ne connaissaient pas la propriété remarquable dont jouit le plan tangent en un point d'une surface, savoir : de contenir les tangentes aux diverses courbes qui, tracées sur la surface, se croisent au point considéré comme point de contact.

De plus, lorsque plus tard cette propriété du plan tangent fut démontrée pour la première fois, et cela par l'*analyse*, les méthodes graphiques que connaissaient, alors, les géomètres, n'étaient pas assez perfectionnées pour leur permettre de construire *le contour apparent* d'une surface, et par suite la *perspective* de cette surface. On peut donc dire, avec raison, que la perspective doit son développement le plus essentiel à la géométrie descriptive ; et l'on doit ajouter, que l'on croit être dans le vrai, en disant que la géométrie descriptive elle-même n'a été féconde, qu'en vertu de la propriété dont jouit le plan tangent en un point d'une surface, et parce qu'elle a su déterminer, construire et écrire *graphiquement* ce plan tangent (*).

Ce second livre ne se compose que de deux mémoires, l'un de Monge, qui était inédit et que je donne *textuellement*, car il est des ouvrages que l'on doit respecter,

(*) MONGE, lorsqu'il a écrit son ouvrage sur la géométrie descriptive, ouvrage qu'il n'a point intitulé : *Traité*, mais seulement *Programme de géométrie descriptive*, composé de 168 pages qu'on ne peut se lasser de lire, car à chaque page on trouve des germes à féconder, MONGE n'a pas songé à démontrer que : *le plan qui passait par les deux tangentes en un point* m *où se croisaient deux courbes* C *et* C' *tracées sur une surface, contenait les tangentes à toutes les courbes qui, tracées sur la même surface, passaient par ce point* m. MONGE a admis, en un mot, la propriété dont jouit le plan tangent en un point d'une surface, propriété qui n'était encore démontrée que par l'*analyse*, et il s'en est servi pour ses re-

et d'ailleurs on doit être heureux de pouvoir connaître d'une manière précise non-seulement les idées, mais encore la manière de les présenter, du fondateur d'une science.

La méthode exposée par Monge était inconnue des anciens géomètres, et on comprendra sans peine que cela doit être, puisque cette méthode permet de construire *graphiquement* le contour apparent d'une surface.

On n'a pas, je crois, bien compris tout ce qu'il y avait d'ingénieux dans cette méthode, et surtout on n'a pas compris combien cette méthode était générale, et surtout qu'elle était d'une exécution aussi facile que celle des points de concours, pour mettre en perspective des *lignes* et des *points*; et je suis porté à exprimer l'opinion que je viens d'émettre, en regardant l'épure de la perspective du piédouche qui fait partie de la collection des épures gravées de l'École polytechnique, cette épure est disposée de telle manière que la méthode donnée par Monge n'y apparaît pas d'une manière nette, j'oserai dire qu'on ne peut guère l'y retrouver.

Ce que je dis ici sera évident, je crois, lorsque l'on aura lu ce que j'ai écrit à ce sujet dans le second mémoire qui termine ce second livre.

Hachette a publié quelques pages dans la Correspondance de l'École (*) polytechnique, sur la méthode des points de concours, pour montrer, il le dit lui-même, comment la perspective est une application de la géométrie descriptive.

Ce que ce *savant*, ami de Monge, a écrit sur ce sujet est loin d'être complet; j'ai donc cru qu'il ne serait pas sans utilité de reprendre le même sujet et de le traiter à ma manière; c'est ce que j'ai fait dans le second mémoire, qui a pour titre: ***De la perspective considérée comme une des applications de la géométrie descriptive.***

---

cherches graphiques ultérieures. Mais une science ne peut en effet être considérée comme *science*, qu'autant que ses bases sont établies d'une manière rigoureuse, et en vertu de principes, ou axiomes, qui découlent de l'essence de cette science elle-même, et sans avoir besoin de s'appuyer sur des bases qui lui sont étrangères. La science des projections, ou, en d'autres termes, la géométrie descriptive ne doit rien emprunter à l'*analyse*, ni à la géométrie des anciens quand il s'agit de ses bases fondamentales; elle doit dès lors tout demander au *principe des projections*. Frappé de cette idée, que je crois exacte et vraie, j'ai cherché à démontrer la propriété dont jouit le plan tangent, et cela directement, en ne m'appuyant que sur la génération des surfaces, telle qu'elle doit être entendue en géométrie descriptive. C'est alors que j'ai donné la démonstration publiée dans les *Développements de géométrie descriptive*, chap. VII, page 396. Je crois ne point me tromper, en disant que cette démonstration est *rigoureuse* et tout à fait dans l'esprit de la géometrie descriptive.

M. *Vallée*, auteur d'un Traité de géométrie descriptive estimé, a reculé devant la difficulté; il a admis pour les surfaces le polyèdre infinitésimal, comme on admet le polygone infinitésimal pour les courbes. Pourquoi deux axiomes, quand un seul, celui du polygone infinitésimal, peut suffire?

(*) Voyez la *Correspondance de l'École polytechnique*, rédigée par HACHETTE, tome I, p. 342 (année 1807).

N° 1.

(MÉMOIRE INÉDIT.) (*)

DE LA PERSPECTIVE EN GÉNÉRAL.

1° La perspective est l'art de représenter, sur une surface donnée, des objets donnés tels qu'ils paraissent étant vus suivant des conditions données, c'est-à-dire que comme la lumière peut venir des objets à votre œil de trois manières différentes, ou directement, ou après avoir été réfléchie par des miroirs, ou enfin réfractée par les surfaces des différents milieux au travers desquels elle peut avoir été obligée de passer ; la perspective doit renfermer trois parties, dont chacune donne la méthode de représenter les objets suivant l'une de ces conditions. La première peut s'appeler *perspective directe;* la seconde, *perspective par réflexion;* et la troisième, *perspective par réfraction.* Nous tâcherons de satisfaire à la généralité de cette définition. Commençons par le premier cas (**).

Perspective directe.

2° On sait que, dans un milieu libre ou uniformément dense, la lumière se propage toujours en ligne droite ; que nous ne nous apercevons de la présence et de

(*) Ce mémoire est de G. MONGE, il provient de la bibliothèque de l'École de Mézières. Dans la collection des manuscrits de l'École d'application de Metz, il est coté : carton n° 1, pièce n° 10.

Ce mémoire, que nous publions ici *textuellement* pour la première fois, fut écrit à Mézières en 1785.

T. O.

(**) Extrait de la *Perspective de Rohault* (Œuvres posthumes, 1682) :

La perspective est un art qui nous apprend à représenter les objets visibles comme ils nous paroissent ; c'est-à-dire un art qui nous apprend à tracer certains linéaments qui paraissent à nos yeux comme les objets mêmes nous paroissent.

Ces objets peuvent être veus en trois différentes manières, savoir : ou par une veüe directe, ou par réflexion, ou par réfraction ; par une veüe directe, comme sont veus communément tous les objets que l'on regarde ; par réflexion, comme le sont ceux que l'on voit par le moyen d'un miroir ; et par réfraction, comme le sont ceux que l'on voit au travers de quelque corps transparent, comme au travers de l'eau, ou du verre.

Et de là naissent trois parties de la perspective prise en général, sçavoir : la perspective, la catoptrique, et la dioptrique.

La première, qui retient le nom de perspective, nous apprend à représenter les objets qui sont veus d'une veüe directe, et rend raison de leurs apparences.

La catoptrique nous enseigne de quelle manière les objets peuvent être veus par réflexion, et nous en explique les causes.

Et la dioptrique nous montre comment le sont ceux qui sont veus par réfraction. C'est de la première dont j'entreprends icy de traiter.

T. O.

la figure des objets que par des faisceaux de lumière envoyés ou réfléchis par chacun des points de leur surface visible, et qui, en entrant dans l'œil, subissent des lois qui les mettent en état d'agir distinctement sur l'organe de la vision, et de donner à l'âme l'idée de la couleur, de la grandeur, de la distance, etc., des objets d'où ils sont partis; que chacun de ces faisceaux est un cône de lumière dont le sommet est au point d'émission et dont la base est appuyée sur la prunelle de l'œil; qu'enfin, lorsque les objets ne sont pas bien proches, les rayons qui composent un faisceau peuvent être regardés comme sensiblement parallèles entre eux, et même (eu égard à la petitesse de la prunelle de l'œil) comme confondus avec leur axe et ne faisant plus qu'une ligne droite avec lui : dans ce sens, il part de chaque point visible d'un objet un rayon de lumière qui arrive en ligne droite à l'œil, et l'assemblage de tous ces rayons forme une pyramide de lumière, dont le sommet est au centre de la prunelle et dont la base est appuyée sur les objets exposés à la vue.

3° Cela posé : soit (*fig.* 1) ABCD le plan ou la projection horizontale d'un parallélipipède quelconque qui puisse être vu sans obstacle par un œil placé dans un point donné projeté, par exemple, au point E. Soient AE, BE, CE, etc., les projections des rayons qui, partis chacun des angles du parallélipipède, aboutissent au centre de la prunelle et forment la pyramide de lumière dont nous venons de parler; j'imagine ensuite que cette pyramide soit obligée, pour arriver à l'œil, de traverser une surface quelconque diaphane que, pour plus de simplicité, je supposerai d'abord plane, verticale et représentée au plan par FG; et concevons que chaque rayon qui la compose, en se tamisant au travers de cette surface, teigne le point par lequel il passe de la couleur du point de l'objet d'où il est parti.

Il est clair que l'assemblage de tous ces petits points colorés formera un tableau que l'œil placé au point E ne distinguera pas de l'objet même, et qui sera par conséquent sa perspective vue du point E.

4° La perspective d'un objet donné peut donc être considérée comme la coupe ou la section d'une pyramide donnée par une surface quelconque aussi donnée de nature et de position; et cette surface est celle du tableau sur lequel se doit dessiner la perspective.

5° Il suit encore de là que la perspective du corps ABCD sera renfermée dans les limites *fg*, et que les différents points *f*, *a*, *b*, *g* seront la projection des points du tableau, sous lesquels sont vus du point E les points correspondants de l'objet.

6° Soit menée sur FG la perpendiculaire EH qui, mesurant la distance de l'œil au tableau, s'appellera *rayon principal;* et concevons que le point H soit la projection d'une verticale tracée sur le tableau, qui, étant par conséquent connue de

position, soit un terme de comparaison auquel nous rapportions les différents points *f*, *a*, *b*, *g*, etc., et serve à distinguer, parmi les dimensions horizontales de la perspective, celles qui sont à droite et celles qui sont à gauche; il est clair que chacun des points de la perspective se trouvera sur le tableau éloigné de la verticale que nous venons d'imaginer, d'une quantité égale à la distance de sa projection au point H. Par exemple, le point B mis en perspective sera à droite de la verticale et éloigné d'elle d'une quantité égale à *f*H; il en est de même de tous les autres points. Cependant cela ne suffit pas pour les déterminer, il faudrait connaître la position de chacun d'eux à une autre ligne connue de position; c'est-à-dire que nous avons toutes les dimensions horizontales de l'objet, en les rapportant à une verticale dont on connaît la situation; cherchons donc toutes les dimensions verticales et rapportons-les à une horizontale connue, et il sera facile, par la comparaison des unes avec les autres, de les mettre en perspective; pour cela, faisons une élévation ou une projection verticale de tout ce que nous avons projeté au plan.

7° Parmi l'infinité d'élévations qu'on pourrait faire, choisissons, pour la plus grande commodité et pour des raisons que nous verrons dans la suite, celle dans laquelle le tableau est représenté par une seule ligne de terre et par conséquent perpendiculaire à FG.

Soit donc IKLM l'élévation du parallélipipède, NO celle du tableau, et P celle de l'œil. De tous les points visibles de l'objet, menons au point P des droites IP, KP, etc., qui représentent en élévation les mêmes rayons de lumière que les droites AE, BE, etc. représentent au plan. Cela posé, faisons encore le même raisonnement que nous venons de faire, et considérons que les points I, K, *l*, *m*, etc. d'intersection de ces droites avec la ligne NO sont, en élévation, les points du tableau sous lesquels l'œil placé en P voit les points correspondants de l'objet, et que la perspective du corps IKLM se trouve renfermée entre les limites *tm*; si donc nous menons, de même qu'au plan, le rayon principal PQ perpendiculaire à NO, et si nous concevons sur le tableau une horizontale passant par le point Q, cette ligne connue de position sera un nouveau terme de comparaison auquel nous rapporterons les différents points *i*, *k*, *l*, *m*, etc., et servira à distinguer, parmi les dimensions verticales, celles qui sont supérieures d'avec les inférieures, de manière que la distance de chaque point de la perspective à la ligne horizontale que nous venons d'imaginer sera égale à l'intervalle compris entre le point Q et la projection de ce point à l'élévation; par exemple, le point K mis en perspective sera au-dessous de l'horizontale et éloigné d'elle de la quantité KQ.

8° Ceci bien entendu, connaissant les distances de tous les points de la perspective à deux droites données sur le tableau, l'une verticale et l'autre horizon-

tale, il sera bien facile de les rapporter ; et voici comment. Soit *nofg* le tableau vu en face, TV et RS les lignes verticale et horizontale, l'une représentée au plan par le point H, et l'autre dans l'élévation par le point Q ; et supposons qu'il faille mettre le point B en perspective, nous savons qu'il doit être à droite de la verticale de la quantité *f*H ; portons donc *f*H de W en X, et menons par le point X une parallèle à TV qui renfermera nécessairement le point que nous demandons. Mais comme le point B est la projection horizontale de deux centres représentés en élévation par les points K, M, supposons qu'il ne s'agisse encore que du point K qui doit être (article 7°) au-dessous de l'horizontale de la quantité KQ ; portons donc KQ au-dessous de RS et de X en Z, et le point Z sera la perspective demandée du point B.

On mettra de cette manière tant de points que l'on voudra de l'objet en perspective et par conséquent tout l'objet.

9° On pourrait, sans mener de parallèles, porter avec un compas l'intervalle *f*H de W en X, et avec un autre intervalle QK de W en M, et de suite : des points X et M comme centres, et avec les ouvertures de compas, décrire deux arcs qui, par leur intersection, donneront plus commodément le point demandé Z.

10° Le point W d'intersection de l'horizontale du tableau avec la verticale s'appelle *le point de vue* de la perspective et est celui vis-à-vis duquel doit être l'œil du spectateur, à la distance du rayon principal, pour que le tableau fasse l'effet que l'on désire.

11° Il n'est personne qui ne se soit aperçu que des lignes parallèles exposées à la vue, et prolongées à une certaine distance, paraissent concourir en un même point et former un angle par les extrémités, parce que, lorsque les objets sont hors de la portée ordinaire de la vue, nous jugeons de leurs dimensions (toutes choses d'ailleurs égales) par l'angle sous lequel arrivent à l'œil les rayons de lumière qui partent de leurs extrémités. Leur intervalle, en effet, qui est toujours le même dans tous les points (*fig.* 2), doit, à mesure qu'il s'éloigne de l'œil, être vu sous un angle moindre, jusqu'à ce qu'enfin, si on suppose les lignes poussées à l'infini, cet intervalle, qui est une quantité finie, devienne infiniment petit ou nul, par rapport à leur longueur.

12° L'œil voit donc les lignes parallèles concourir en un seul point ; mais, pour juger de ce concours, il imagine une autre ligne parallèle aux premières, qu'il fait passer par le centre de la prunelle et à laquelle il compare les autres qui lui paraissent se jeter sur celle-là. Qu'on se place, par exemple, dans une avenue d'arbres et presque sur une des rangées, les autres paraissent se porter sur celle auprès de laquelle on sera ; de là nous allons tirer des conséquences avantageuses pour la perspective.

13° En effet : soit, pour exemple, AFDCJG (*fig.* 3) le plan de l'angle d'un entablement d'architecture composé de lignes parallèles horizontales. Soit QR le tableau, L le point de l'œil, et LK le rayon principal : suivant ce que nous venons de dire, c'est dans une ligne LM parallèle à CD, BE, AE, etc. que l'œil voit leur point de concours. LM peut donc être considéré comme la projection d'un rayon de lumière envoyé à l'œil du point de concours des parallèles et doit donner, avec son intersection avec le tableau, le concours des parallèles mises en perspective ; mais comme ces lignes sont horizontales, LM le sera aussi, et le point N, où elle rencontre le tableau, sera nécessairement dans l'horizontale du tableau ; si donc on porte sur la perspective l'intervalle KN de K en *n*, le point *n* sera la perspective du concours des parallèles dont il s'agit.

14° En conséquence, si on met les points A, B, C en perspective par la méthode indiquée (art. 7, 8 et 9), on aura les points *a*, *b*, *c*, par lesquels on mènera des lignes au point *n*, qu'on terminera suivant les conditions. Si les points D, E, F, par exemple, sont *au plan* les projections des extrémités des parallèles, on mènera les lignes DL, EL, etc., indiquant la position horizontale de ces extrémités ; c'est-à-dire que celle de la ligne DC se trouvera en perspective à gauche de la verticale, de la quantité K*a*; par conséquent si, sur le tableau, on prend sur *an* un point éloigné de la verticale de la quantité K*d*, ce qu'on fera en menant à même distance la parallèle TS, on aura le point demandé. On fera la même opération pour les autres points E, F. On conçoit que ce que nous venons de dire pour un des côtés de l'entablement peut aisément s'appliquer à l'autre.

15° Si les parallèles, au lieu d'être horizontales, étaient inclinées, le point de concours ne se trouverait plus sur l'horizontale, mais au-dessus ou au-dessous, suivant leur position. Soit (*fig.* 4) DEGJ le plan de l'entablement d'un fronton dont le sommet soit ABC ; que KN représente le tableau, et LK le rayon principal ; il est clair que, comme au plan, les deux côtés du fronton et le reste de l'entablement sont dans les prolongements les uns des autres, si on mène LN parallèle à DG, le point N sera la projection des trois différents points de concours qui appartiennent aux trois espèces de lignes qui composent l'objet, c'est-à-dire que ces trois points se trouveront dans une même verticale, éloignée de celle du tableau de la quantité KN. Soit maintenant *dfgi* l'élévation du fronton, *n*K le tableau, et *i*K le rayon principal ; soient menées par le point *l*, les lignes *lm*, *ln* parallèles, l'une au côté *ad* du fronton, et l'autre au côté *ai* ; les intersections *m* et *n* de ces deux lignes, avec le tableau prolongé s'il est nécessaire, nous indiqueront de combien les deux points de concours qui conviennent aux deux côtés du fronton doivent se trouver au-dessus ou au-dessous de l'horizontale, comme on le voit sur le tableau MNOP.

N° 2.

MÉMOIRE SUR LA PERSPECTIVE CONSIDÉRÉE COMME UNE DES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

J'ai divisé ce mémoire en trois parties.

Dans la première, je montre comment, en effet, les méthodes graphiques de la géométrie descriptive s'appliquent à la perspective, en faisant voir que ce n'est qu'un cas particulier d'un problème plus général, savoir : *Couper par un plan un système de droites divergeant d'un point unique*, et que, dans ce cas particulier, on suppose que le plan sécant, qui en perspective prend le nom de *tableau*, se trouve parallèle au plan vertical de projection.

Dans la seconde partie, j'applique les méthodes graphiques, exposées dans la première partie comme une conséquence des principes fondamentaux de la géométrie descriptive, à la perspective proprement dite.

Dans la troisième partie, je fais voir comment les principes de la perspective, considérés sous un point de vue plus général, peuvent être employés utilement à la recherche et à la découverte de certaines vérités géométriques, et cela en se guidant sur l'exemple de plusieurs géomètres anciens qui ont fait de la perspective un fréquent emploi dans leurs *recherches géométriques*.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie générale.

§ I.

1° Soit donnée la ligne de terre LT (*fig. a*) et par conséquent les deux plans vertical et horizontal de projection.

2° Soit donné un point o (ayant pour projections o^v et o^h) situé en avant du plan vertical de projection, mais étant, ou au-dessus, ou au-dessous du plan horizontal de projection.

3° Soit donnée une droite D (ayant pour projections D^v et D^h).

4° Soit donné un plan T parallèle au plan vertical de projection, mais situé entre ce plan et le point o.

Cela posé :

On demande de construire la droite D_t intersection du plan T et du plan P déterminé par la droite D et le point o.

Or, pour résoudre ce problème de géométrie descriptive, nous savons qu'il suffit de mener par le point o une droite D' parallèle à la droite D, et de chercher les points d et d' en lesquels les droites D et D' sont respectivement coupées par le plan T.

Dès lors, D_r^v passera par les points d^v et d'^v, et D_r^h ne sera autre que la droite H^r trace horizontale du plan T, puisque ce plan T est vertical (ou en d'autres termes, puisque le plan T est perpendiculaire au plan horizontal de projection).

§ II.

Si la droite D, au lieu d'avoir une position quelconque par rapport au plan T, lui était perpendiculaire, la construction de la projection D_r^v serait plus prompte; et en effet, la fig. (b) nous fait voir de suite qu'il suffit de construire le point d^v, car la droite D_r^v passe par le point o^v, qui est donné, qui est dès lors un point fixé d'avance par les conditions du problème.

§ III.

Si la droite D était horizontale, la fig. (c) nous montre que, pour obtenir la solution, il faudrait effectuer toutes les constructions exigées dans le cas où la droite D a une position arbitraire dans l'espace par rapport au plan T. Toutefois il faut remarquer que, dans ce cas, la droite D'^v est horizontale.

§ IV.

Si la droite D, tout en étant horizontale, ne fait pas avec le plan T un angle quelconque, mais un angle particulier, et ainsi, par exemple, un angle égal à un angle demi-droit, il est évident (*fig. d*) que dans ce cas on aura : $\overline{o^v d'^v} = \overline{pd'^h} = \overline{po^h}$. Ainsi, le triangle opd' de l'espace sera rectangle et isocèle. Pour déterminer la droite D_r^v, il suffira donc de construire le point d'^v et de porter, sur la parallèle à LT menée par le point o^v, une distance $o^v d'^v$ égale à $\overline{o^h p}$ ou égale à la distance du point o^h à la trace H^r du plan T; et en unissant les deux points d^v et d'^v, on aura la ligne D_r^v.

Remarquons que la droite D étant supposée horizontale et faire un angle de 45° avec le plan T, peut avoir deux directions; car elle peut faire cet angle de 45° en étant dirigée vers la droite, ou en étant dirigée vers la gauche par rapport au point o; si elle est dirigée vers la gauche du point o, comme l'indique la fig. (d),

on devra porter $\overline{o^v d^v} = \overline{o^h p}$ à gauche du point o^v, et le contraire aura lieu dans l'autre cas.

§ V.

1° Soit donnée la ligne de terre LT, et par conséquent les deux plans vertical et horizontal de projection (*fig. e*).

2° Soit donné un point o (ayant o^v et o^h pour projections), ce point o étant en avant du plan vertical de projection, mais pouvant être situé au-dessus ou au-dessous du plan horizontal de projection.

3° Soit donné un plan T, vertical et parallèle au plan vertical de projection, et situé entre ce plan et le point o.

4° Soit donné un point m (ayant m^v et m^h pour projections), mais situé entre le plan T et le plan vertical de projection.

Cela posé :

On demande de trouver le point de rencontre du plan T et de la droite unissant les points m et o.

Ce problème peut se résoudre de diverses manières, que nous allons successivement exposer et examiner en vue des applications de la géométrie descriptive à la perspective.

Si 1° par le point m on mène trois droites horizontales, l'une G perpendiculaire au plan T, et les deux autres D et B faisant avec le plan T des angles de 45° (la droite B étant inclinée à gauche, et la droite D étant inclinée à droite).

Si 2° par le point o on mène trois droites G′, B′, D′ parallèles aux droites G, B et D, l'on aura six droites qui couperont le plan T ; et l'on aura dès lors six points qui, unis deux à deux, donneront trois droites G_1, B_1, D_1 se coupant au point m_1 demandé.

Or, puisque les droites B, D, B′ et D′ sont horizontales et inclinées à 45° sur le plan T, il est évident (*fig. e*), d'après ce qui a été dit ci-dessus, que l'on aura :

$$\overline{m^h g^h} = \overline{g^h b^h} = \overline{g^h d^h} = \overline{m^v b^v} = \overline{m^v d^v}$$

et

$$\overline{o^h g'^h} = \overline{g'^h d'^h} = \overline{g'^h b'^h} = \overline{o^v d'^v} = \overline{o^v b'^v}.$$

On voit donc de suite que, pour construire le point m_1^v, il suffira (*fig. f*) de mener par les points o^v et m^v deux droites parallèles à la ligne de terre LT, savoir, Y et X, et de porter :

1° A droite et à gauche du point m^v, sur l'horizontale X,

$\overline{m^v b^v} = \Big\{ \overline{m^h b^h} =$ la distance de la projection horizontale du point *m* à la trace
$\overline{m^v d^v} =$ horizontale H^r du plan T ;

2° à droite et à gauche du point o^v sur l'horizontale Y,

$\overline{o^v d'^v} = \Big\{ \overline{o^h g'^h} =$ la distance de la projection horizontale du point *o* à la trace
$\overline{o^v b'^v} =$ horizontale H^r du plan T ;

ensuite d'unir les points b^v et b'^v, d^v et d'^v, m^v et o^v, par des droites B_1^v, D_1^v, G_1^v, qui devront se croiser en un même point m_1^v qui sera le point demandé.

Si l'on remarque attentivement la fig. (*f*), et qu'on la compare à la fig. (*e*), on doit voir de suite que l'on ne s'est point donné le point o^h, et que l'on opère d'après ce principe fondamental en géométrie descriptive, savoir : *Qu'un point est connu de position dans l'espace, lorsque l'on connaît l'une de ses projections et sa distance au plan sur lequel la projection est donnée.*

Or, dans la fig. (*f*), la projection verticale o^v du point *o* est donnée *graphiquement*, et la distance du point *o* au plan T nous est donnée en $\overline{o^v d'^v}$ ou $\overline{o^v b'^v}$.

§ VI.

Nul doute que si l'on voulait trouver de la manière la plus simple le point m_1, en lequel la droite A qui unit le point *o* au point *m* coupe le plan T, il ne fallût employer la construction indiquée par la fig. (*g*).

Mais cette construction ne peut être employée qu'autant que le point o^h existe, qu'autant dès lors que la grandeur du papier permet de fixer ce point o^h.

Or, dans les applications de la géométrie descriptive à la perspective, la droite H^r est toujours à l'extrémité inférieure de la feuille de papier, et l'on se trouve dès lors contraint de donner *à part* la distance du point *o* au plan T ; c'est ce qui oblige forcément à employer la construction indiquée par la fig. (*f*). D'ailleurs nous allons exposer ci-après les conditions imposées en *perspective*, et l'on reconnaîtra la *nécessité* de la construction donnée fig. (*f*).

Toutefois les questions préliminaires que nous venons de résoudre nous seront d'un grand secours pour démontrer que les *méthodes graphiques* de la perspective, ne sont autres que celles que l'on emploie en géométrie descriptive lorsqu'il s'agit de résoudre un problème au moyen des *projections orthogonales*.

§ VII.

Imaginons une série de droites parallèles entre elles D, D', D''..., mais obliques au plan T, lequel sera toujours parallèle au plan vertical de projection (*fig. h*).

Par chacune de ces droites D, D′, D″... et le point o, faisons passer un plan et cherchons l'intersection de chacun d'eux avec le plan T.

Désignons par D_1, D_1', D_1''.... l'intersection du plan T et de chacun des plans respectifs (o, D), (o, D′), (o, D″).... Pour résoudre le problème proposé, il faudra 1° mener par le point o une droite K parallèle au faisceau des droites parallèles données D, D′, D″... ; 2° construire le point k en lequel la droite K perce le plan T ; et 3° construire les points d, d', d''... de rencontre de chacune des droites données D, D′, D″... avec le plan T.

Cela fait :

En unissant le point k^v avec chacun des points d^v, d'^v, d''^v..., on aura les droites D_1^v, $D_1'^v$, $D_1''^v$..., qui seront les projections verticales des droites demandées D_1, D_1', D_1''..., leurs projections horizontales n'étant autres que la droite H^T, trace horizontale du plan T, puisque ce plan T est vertical.

Ainsi l'on voit, qu'ayant construit le point k^v, point de *concours* de toutes les droites D_1^v, $D_1'^v$, $D_1''^v$..., il suffira, pour les déterminer, de construire pour chacune d'elles un seul point ; et ainsi :

le point d^v pour la droite D_1^v ;
— d'^v — — $D_1'^v$;
— d''^v — — $D_1''^v$;
— etc. — — etc.

§ VIII.

Imaginons que le faisceau des droites parallèles données soit parallèle au plan T (n'ayant d'ailleurs rien changé aux conditions établies ci-dessus), (*fig. i*).

La droite K sera parallèle au plan T. Le point de concours k^v sera dès lors situé à l'infini ; dès lors aussi les droites D_1^v, $D_1'^v$, $D_1''^v$... seront parallèles entre elles et aux droites D^v, D'^v, D''^v... ; car il est évident que les droites D, D′, D″... et D_1, D_1', D_1''... seront parallèles entre elles.

Cela posé :

Il suffira de construire un point de chacune des droites D_1^v, $D_1'^v$, $D_1''^v$... pour que l'on puisse tracer ces droites. Or ce qu'il y a de plus simple est de construire les traces horizontales b, b', b''... des droites D, D′, D″..., ainsi que la trace horizontale k de la droite K ; et les droites kb, kb', kb''... seront les traces horizontales des plans (o, D), (o, D′), (o, D″) ; on aura donc en les points b_1 ; b_1', b_1''... les traces horizontales des droites cherchées D_1, D_1', D_1''... Donc, etc.

§ IX.

Si l'on suppose que les droites données D, D′, D″... sont verticales (*fig. k*), alors les droites cherchées D_r, D_r', D_r''.... seront aussi verticales, et, pour déterminer les droites D_r^v, $D_r'^v$, $D_r''^v$...., il suffira de construire un point de chacune de ces dernières droites pour qu'elles soient complétement déterminées, car leur point de concours sera situé à l'infini.

Or, il est évident que la *solution* sera la même que celle donnée § VIII, mais la *construction* sera plus simple, parce que le point *k* et le point o^h se confondent dans le cas particulier qui nous occupe.

§ X.

Si l'on suppose que les droites parallèles et données D, D′, D″,... sont parallèles à la ligne de terre LT, les droites D_r, D_r', D_r'',... seront aussi parallèles à la même ligne de terre LT. Il suffira donc de déterminer un point de chacune des droites D_r^v, $D_r'^v$, $D_r''^v$,... pour qu'elles soient complétement connues de position. Mais on ne peut détermi ner un point de chacune d'elles et d'une manière simple, qu'au moyen d'un changement de plan vertical de projection, et qui s'effectuera de la manière suivante :

On prendra (*fig. l*) un nouveau plan vertical de projection L′ T′; perpendiculaire au plan T; dès lors, la nouvelle ligne de terre L′ T′ sera perpendiculaire à l'ancienne LT : on déterminera les traces $D^{v'}$, $D'^{v'}$, $D''^{v'}$,... des droites données sur le nouveau plan de projection, ainsi que la projection $o^{v'}$ du point *o*;

Cela fait :

On unira le point $o^{v'}$ avec chacun des points $D^{v'}$, $D'^{v'}$, $D''^{v'}$,... par des droites qui seront sur le nouveau plan vertical L′ T′, les traces des plans (*o*, D), (*o*, D′), (*o*, D″),... puisque ces plans sont parallèles à l'ancienne ligne de terre LT.

Cela posé :

La droite H^T, étant prolongée au-dessus de la ligne de terre L′T′, nous donnera V'^T, trace verticale du plan T sur le nouveau plan de projection.

Dès lors la droite V'^T coupera les droites $o^{v'}D^{v'}$, $o^{v'}D'^{v'}$, $o^{v'}D''^{v'}$... en les points $D_r^{v'}$, $D_r'^{v'}$, $D_r''^{v'}$... qui seront, sur le nouveau plan de projection, les traces des droites cherchées D_r, D_r', D_r''. Il sera, par suite, facile de construire les droites D_r^v, $D_r'^v$, $D_r''^v$,... qui seront parallèles entre elles et à l'ancienne ligne de terre LT (*).

(*) Il est facile de recon naître dans ce qui vient d'être exposé § IX et X, le principe fondamental de la méthode de perspective donnée par *Monge* dans le mémoire inédit de 1785.

§ XI.

Si le faisceau donné est composé de droites qui, parallèles entre elles, se trouvent perpendiculaires au plan T, alors (*fig. m*) les droites D_t^v, $D_t'^v$, $D_t''^v$... ont pour point de concours le point o^v.

§ XII.

Si le faisceau est composé de droites parallèles entre elles, horizontales et inclinées à 45° sur le plan T, la fig. (*n*) nous montre que le point de concours de ces droites est situé sur la droite X, menée par le point o^v parallèlement à la ligne de terre LT, et qu'il est situé en k^v à une distance $\overline{o^v k^v}$ du point o^v égale à la distance du point o au plan T.

Les droites inclinées à 45°, en sens inverse, auraient le point k'^v pour point de concours.

§ XIII.

De ce qui précède on peut conclure, en se résumant, que les droites D_t^v, $D_t'^v$, $D_t''^v$,... projections verticales des droites D_t, D_t', D_t'',... intersections du plan T et des divers plans passant tous par le point o et respectivement par les droites D, D′, D″,... formant un faisceau de droites parallèles entre elles, ont un point de concours situé : 1° hors de la droite X, si le faisceau est incliné par rapport au plan horizontal et au plan T ; 2° sur la droite X, si le faisceau est horizontal ; et 3° à l'infini, si le faisceau est parallèle au plan T, et que dans ce dernier cas les droites D_t^v, $D_t'^v$, $D_t''^v$... coupent la droite X, si le faisceau est incliné au plan horizontal sous un angle égal à celui que le faisceau fait avec le plan horizontal ; en sorte qu'elles coupent la droite X sous l'angle droit, si le faisceau est vertical, et qu'elles sont parallèles à cette droite X, si le faisceau est parallèle à la ligne de terre ; 4° si le faisceau est perpendiculaire au plan T, le point de concours est le point o^v ; et 5° si le faisceau étant horizontal se trouve incliné de 45° sur le plan T, le point de concours sera le point k^v ou le point k'^v (*), et ce point est situé sur la droite X à une distance du point o^v égale à la distance du point o au plan T.

§ XIV.

Étant donné un point m sur le plan horizontal et un plan T parallèle au plan vertical de projection, et un point o par ses deux projections o^h et o^v, construire

(*) Suivant que le faisceau est incliné ou à droite, ou à gauche, par rapport au plan T.

le point m_r, intersection du plan T et de la droite G qui unit les deux points m et o.

Pour résoudre ce problème, on peut employer trois méthodes distinctes :

La première, dite : méthode *directe;*

La deuxième, dite : méthode *des points de concours;*

Et la troisième, dite : méthode *des coordonnées.*

Nous allons exposer successivement ces trois méthodes et les constructions graphiques que chacune d'elles exige pour déterminer le point m_r^v.

§ XV.

Méthode directe.

Soit donné un point m situé sur le plan horizontal (*fig. o*); on construira les projections G^h, G^v de la droite G qui unit les points o et m.

Le point m_r^h sera donné immédiatement, puisque le plan T est vertical, et l'on en conclura le point m_r^v.

Pour employer la *méthode directe*, il faut évidemment connaître les deux projections o^v et o^h du point o, ou pouvoir, en vertu des *données*, construire (*au préalable*) ces deux projections.

§ XVI.

Méthode des points de concours.

Première construction. Soit donné un point m sur le plan horizontal (*fig. p*) par le point o et le point m, nous ferons passer deux plans P et Q, et sans construire la droite G, intersection de ces deux plans P et Q, nous allons construire le point m_r en lequel le plan T coupe cette droite G.

Pour cela, nous tracerons sur le plan horizontal deux droites H^p et H^q se coupant au point m, et nous construirons les droites A_r et B_r, suivant lesquelles le plan T coupe respectivement les deux plans P et Q, ces deux plans P et Q se trouvent déterminés l'un et l'autre par le point o, et respectivement par leur trace horizontale H^p et H^q. Pour déterminer les droites A_r et B_r, qui sont les traces des plans P et Q sur le plan T (ou *en d'autres termes* les intersections du plan T avec chacun des plans P et Q), nous mènerons par le point o deux droites A' et B', respectivement parallèles aux traces H^p et H^q. Nous construirons les points a, b, a', b', en lesquelles chacune des quatre droites horizontales A ou H^p, B ou H^q, A' et B' perce le plan T.

Cela fait :

En unissant les points a et a', on aura la droite A_r ;

En unissant les points b et b', on aura la droite B_r ;

Et les lignes droites A_r^v et B_r^v se couperont en un point m_r^v, qui sera le point demandé.

Par cette méthode on construit le point m_r^v demandé, sans avoir besoin de déterminer d'abord le point m_r^h.

Montrons maintenant pourquoi cette méthode a reçu le nom de *méthode des points de concours*.

Si, au lieu d'avoir un seul point m, on avait une série de points m, m', m'',... situés sur le plan horizontal, on ferait passer, par chacun d'eux, deux droites parallèles respectivement aux droites A ou H^a, et B ou H^b ; on aura donc, sur le plan horizontal, deux faisceaux de droites parallèles, que je désignerai par (A) et (B).

L'on devra d'abord faire passer par le point o et par chacune des droites du faisceau (A) un plan, et l'on aura ainsi une série de plans P, P', P'',... qui se couperont suivant la même droite A', et dont les traces sur le plan T formeront un faisceau (A_r) de droites concourant en le point a'.

L'on devra ensuite faire passer par le point o et par chacune des droites du faisceau (B) un plan, et l'on aura ainsi une série de plans Q, Q', Q'',... qui se couperont suivant la même droite B', et dont les traces sur le plan T formeront un faisceau (B_r) de droites concourant en le point b'.

Dès lors les droites A_r^v... concourront au point a'^v, et les droites B_r^v... concourront au point b'^v.

Et les droites A_r^v... et B_r^v... se couperont deux à deux et respectivement en les points m_r^v, $m_r'^v$, $m_r''^v$,... qui seront les points demandés.

On voit donc que les points a'^v et b'^v étant déterminés pour les droites A_r^v et B_r^v le seront pour toutes les autres droites du faisceau (A_r^v) et du faisceau (B_r^v), et qu'il suffira dès lors de déterminer les divers points a^v... et b^v... appartenant aux diverses droites A_r^v... du faisceau (A_r^v) et aux diverses droites B_r^v... du faisceau (B_r^v).

C'est à cause de l'emploi des points a'^v et b'^v que cette méthode a reçu le nom de *méthode des points de concours*.

Deuxième construction. Au lieu de mener par le point m deux droites horizontales de direction arbitraire, on peut ne mener (*fig.* q) qu'une seule droite A de direction arbitraire, l'autre droite D ayant une direction déterminée de la manière suivante.

Du point a comme centre et avec $\overline{am}$ pour rayon, on décrira un cercle C coupant la trace H^v en un point d, et la droite D sera celle qui unit les points m et d.

Dès lors, du point a'^v (point de concours de la droite A_1^v) comme centre et avec un rayon égal à $\overline{o^h a'^h}$, on tracera un arc de cercle coupant la droite X (menée par le point o^v parallèlement à la ligne de terre LT) en un point d'^v qui sera le point de concours de la droite D_1^v. Le point m_1^v sera l'intersection des droites A_1^v et D_1^v.

On voit donc que par cette méthode, qui n'est qu'un cas particulier de la méthode générale dite des points de concours, on n'a qu'à tracer, au moyen de la règle et de l'équerre, une droite A'^h parallèle à la droite A, et que le reste de la construction s'effectue au moyen du compas et de la règle seulement.

Cette méthode spéciale, que nous venons d'exposer, est dite : méthode *par la corde de l'arc*, parce que la droite D est la corde prolongée $\overline{md}$ de l'arc C.

Troisième construction. L'on peut, au lieu de mener par le point m deux droites de direction arbitraire B et A et dont il faut construire les points de concours, mener trois droites de direction spéciale et telle que l'on connaisse, d'avance et en vertu *des données*, leurs points de concours.

Et en effet :

Nous savons 1° que si par le point m nous menons (*fig. r*) une droite horizontale A perpendiculaire au tableau T, la droite A_1^v passera par le point o^v; 2° que si par le point m nous menons deux droites horizontales et inclinées à 45° sur le plan T (l'inclinaison de l'une étant à gauche, et l'inclinaison de l'autre étant à droite), les points de concours de ces deux droites B et D seront faciles à construire avec le compas seulement, puisque l'on n'aura qu'à porter sur la droite X, la distance $\overline{o^v a'^v} = \overline{o^v d'^v} = \overline{o^h p}$ = la distance du point o au plan T.

En sorte que les points b^v et d^v étant déterminés, les droites D_1^v, A_1^v, B_1^v le seront, et il suffira de la *règle* pour les tracer.

Or, remarquons que l'on peut se dispenser de tracer les droites B et D; car ce qu'il faut déterminer, ce sont les points b^v et d^v, pour pouvoir tracer les droites B_1^v et D_1^v; et il est évident que l'on a $\overline{ma} = \overline{ab} = \overline{a^v b^v}$ et $\overline{ma} = \overline{ad} = \overline{a^v d^v}$.

On voit donc qu'il suffit, le point m étant donné par ses deux projections m et m^v, de porter de a^v en b^v et en d^v une ouverture de compas égale *à la distance du point* m *au plan* T.

Par cette construction, il suffit du *compas* et de la *règle* pour construire le point m_1^v, et la construction est indiquée dans toute sa simplicité dans la fig. (*t*).

On doit encore remarquer que cette construction, qui est très-simple et très-expéditive, donne un moyen de vérification, puisque l'on construit trois droites qui doivent se couper en un même point m_1^v (qui est le point demandé).

§ XVII.

Méthode des coordonnées.

Soit donné un point m sur le plan horizontal de projection et un plan T parallèle au plan vertical LT, et un point o par ses projections o^h et o^v, on demande de construire la projection m_1^v du point m_1 en lequel le plan T coupe la droite G qui unit les deux points o et m.

Construisons un second plan vertical de projection L'T' perpendiculaire au premier plan vertical de projection LT (*fig. 2*).

Projetons sur ce nouveau plan les points o et m.

Imaginons deux droites passant par le point m, l'une verticale, l'autre parallèle à LT (ou, en d'autres termes, l'une perpendiculaire au plan horizontal de projection, et l'autre perpendiculaire au second plan vertical de projection L'T').

Si, par chacune de ces droites et le point o, nous faisons passer un plan, nous auront deux plans qui couperont le plan T, le premier suivant une perpendiculaire à H^T, et le second suivant une parallèle à H^T; et ces deux droites se couperont en le point m_1 demandé; et les projections, sur le plan vertical LT, de ces deux droites se couperont en le point m_1^v.

D'après ce qui précède, la construction à effectuer est donc la suivante :

1° Mener la droite mo^h, laquelle coupera la droite H^T en un point m_1^h, et mener par ce point m_1^h une perpendiculaire à LT (laquelle perpendiculaire devra passer par le point m_1^v).

2° Mener la droite $o^{v'}m^{v'}$, laquelle coupera V'^T (qui n'est autre que la trace H^T prolongée) en un point $m_1^{v'}$; porter $\overline{rm_1^{v'}}$ de e en i sur L'T', et mener par le point i une parallèle à LT (laquelle parallèle devra passer par le point m_1^v).

Le point m_1^v sera donc très-facilement déterminé.

Et si l'on examine de près cette construction, on verra pourquoi elle a reçu le nom de *méthode des coordonnées*. Et en effet, il suffit, pour déterminer le point m_1^v (que l'on cherche), de regarder LT et L'T' comme les axes des coordonnées, le point e étant l'origine.

Et il est évident que $\overline{es}$ et $\overline{ei}$ sont les coordonnées du point $\overline{m_1^v}$. Or, $\overline{es}$ est égal à : $\overline{rm_1^h}$ et $\overline{ei}$ est égal à : $\overline{rm_1^{v'}}$.

Il suffit donc de tracer les droites G^h (ou $\overline{mo^h}$) et $G^{v'}$ (ou $\overline{o^{v'}m^{v'}}$) pour déterminer les points m_1^h et $m_1^{v'}$, et la construction s'achève avec le *compas* (*).

(*) Il n'est pas difficile, maintenant, de reconnaître dans ce qui précède la méthode de *perspective* exposée par Monge dans son mémoire inédit de 1785.

§ XVIII.

Application ANALYTIQUE *de la méthode des* COORDONNÉES, *lorsque le point* m *est situé sur le plan horizontal de projection.*

Soit donnée sur le plan horizontal une courbe C, lieu des points m; les équations de cette courbe seront : $f(x, y) = 0$ et $z = 0$, en prenant les droites H' pour axe des x, et L'T' pour axe des y, et V'r pour axe des z, le point r étant l'origine des coordonnées (*fig. 8*).

Considérons le point o comme le sommet d'un cône Σ ayant la courbe C pour base, et proposons-nous de trouver l'équation de la courbe C_1, lieu des points m_1 (*ou en d'autres termes*, on demande l'*équation* de la section faite dans le cône Σ par le plan T).

Comme la courbe C_1 se projettera sur le plan vertical LT suivant une courbe identique C_1^v (qui sera le lieu des points m_1^v), il suffira de donner l'équation de cette courbe C_1^v pour que le problème soit résolu.

Désignons les trois coordonnées du point o par α, 6, γ; ainsi l'on aura : $6 = \overline{qo^h}$, $\alpha = \overline{rq}$, $\gamma = \overline{o^{v'}p'}$. Il faut calculer $\overline{rm_1^{v'}}$ et $\overline{rm_1^h}$.

Or les deux triangles semblables $m^{v'}m_1^{v'}r$ et $m^{v'}o^{v'}p'$ nous donnent :

$$\overline{m_1^{v'}r} : \overline{rm^{v'}} :: \overline{o^{v'}p'} : \overline{p'm^{v'}}$$

ou :

$$\overline{m_1^{v'}r} : y :: \gamma : (6 + y)$$

d'où :

$$\overline{m_1^{v'}r} = \frac{\gamma \cdot y}{(6 + y)}$$

Cela posé :

Les deux triangles semblables mum_1^h et mgo^h nous donnent :

$$\overline{m_1^h u} : \overline{um} :: \overline{go^h} : \overline{mg}$$

ou :

$$\overline{m_1^h r} - x : y :: (\alpha - x) : (6 + y)$$

d'où :

$$\overline{m_1^h r} - x = \frac{y(\alpha - x)}{(6 + y)}$$

d'où enfin :

$$\overline{m_1^h r} = \frac{x(6 + y) + y(\alpha - x)}{(6 + y)}$$

Désignant $\overline{m_1^{v'}r}$ par y_1 et $\overline{m_1^h r}$ par x_1, on aura les quatre équations

$$z = 0 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 0 \quad (2)$$

équations de la courbe C.

$$y_1 = \frac{\gamma \cdot y}{6 + y} \quad (3)$$

$$x_1 = \frac{x(6 + y) + y(\alpha - x)}{6 + y} = \frac{x6 + y\alpha}{6 + y} \quad (4)$$

Et en éliminant x, y, z entre ces quatre équations, on aura l'équation $\varphi(x_1, y_1, \alpha, 6, \gamma) = 0$, qui sera celle de la courbe C_1^v.

Nota. On voit de suite qu'il suffit d'éliminer x et y entre les trois équations (2, 3, 4), puisque la première équation est $z = 0$, et que les trois autres ne sont fonctions que de x et de y.

Effectuons l'élimination.

De l'équation (3) on tire :

$$y = \frac{6 \cdot y_1}{\gamma - y_1} \quad (5)$$

Substituant la valeur y donnée par l'équation (5) dans l'équation (4), on obtient, après les réductions :

$$x = \frac{\gamma \cdot x_1 - \alpha \cdot y_1}{\gamma - y_1} \quad (6)$$

en sorte que l'équation :

$$f\left\{\left(\frac{\gamma \cdot x_1 - \alpha \cdot y_1}{\gamma - y_1}\right), \left(\frac{6 \cdot y_1}{\gamma - y_1}\right)\right\} = 0 \quad (7)$$

sera l'équation de la courbe C_1^v ; car il est évident qu'il suffira de substituer dans l'équation (2), à la place de x et de y, les valeurs données par les équations (6) et (5), pour avoir l'équation de la courbe C_1^v.

§ XIX.

Si le point m était situé à une distance h du plan horizontal de projection, on mènerait par ce point m un plan horizontal R, qui aurait pour trace verticale sur le plan LT, une droite V^x parallèle à LT et distante de cette droite de la quantité h, et on devrait considérer ce plan R comme un nouveau plan horizontal de projection, la droite V^x étant la nouvelle ligne de terre; dès lors il est évident que :

1° Si l'on emploie la méthode des *points de concours* (*fig.* v), on devra

porter à droite et à gauche du point m^v sur V^a les ouvertures de compas $\overline{m^h a} = \overline{m^v b^v} = \overline{m^v d^v}$, et à droite et à gauche du point o^v sur la droite X, les ouvertures $\overline{po^h} = \overline{o^v b'^v} = \overline{o^v d'^v}$, en sorte que les droites $\overline{m^v o^v}$ et $\overline{b^v b'^v}$ et $\overline{d^v d'^v}$ se couperont au point m_i^v demandé ;

2° Si l'on emploie la *méthode directe*, la considération du plan H est inutile, car la fig. (*u*) nous montre que le point m_i^v se déduit du point m_i^h de la même manière que lorsque le point *m* était situé le plan horizontal de projection (*fig. o*);

3° Si l'on emploie la *méthode des coordonnées*, la fig. (*x*) nous montre que les constructions sont identiquement les mêmes que celles employées dans la fig. (*s*), alors que le point *m* était situé sur le plan horizontal de projection ; seulement le point $m^{v'}$, au lieu d'être placé sur la ligne de terre L'T', se trouve distant de cette droite d'une quantité égale à *h*, hauteur du point *m* au-dessus du plan horizontal de projection.

§ XX.

Application ANALYTIQUE *de la méthode dite* DES COORDONNÉES, *lorsque le point* m *est hors du plan horizontal de projection.*

Les coordonnées du point m_i^v seront : $x_i = \overline{es} = \overline{rm_i^h}$ et : $y_i = \overline{ei} = \overline{ei'} = \overline{rm_i^{v'}}$ (*fig. x*).

Or supposons que l'on ait une série de points *m*, *m'*, *m''*,... déterminant une courbe C dans l'espace.

Les équations de cette courbe seront :

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$
$$\psi(y, z) = 0 \qquad (2)$$

L'équation (1) sera celle de la projection de la courbe C sur le plan horizontal de projection, et l'équation (2) sera celle de la projection de cette même courbe C sur le second plan vertical de projection L'T'.

Cela posé :

Désignant par α, 6, γ les coordonnées du point *o*, on aura :

$$\alpha = \overline{p o^h}, \quad 6 = \overline{p r}, \quad \gamma = \overline{p' o^{v'}}$$

Et les deux triangles semblables $m^h u m_i^h$ et $m_i^h g o^h$ donneront :

$$\overline{m_i^h u} : \overline{u m^h} :: \overline{g o^h} : \overline{m^h g}$$

ou

$$\overline{m_1^k r} - x : y :: (\alpha - x) : (\beta + y)$$

d'où :

$$\overline{m_1^k r} - x = \frac{y(\alpha - x)}{\beta + y}$$

d'où encore :

$$\overline{m_1^k r} = \frac{x(\beta + y) + y(\alpha - x)}{\beta + y}$$

d'où enfin :

$$\overline{m_1^k r} = \frac{\beta . x + \alpha . y}{\beta + y}$$

Les deux triangles semblables $(m^{v\prime} u' m_1^{v\prime})$ et $(m^{v\prime} g' o^{v\prime})$ donneront :

$$\overline{m_1^{v\prime} u'} : \overline{m^{v\prime} u'} :: \overline{o^{v\prime} g'} : \overline{m^{v\prime} g'}$$

ou:

$$\overline{m_1^{v\prime} r} - z : y :: (\gamma - z) : (\beta + y)$$

d'où :

$$\overline{m_1^{v\prime} r} - z = \frac{y(\gamma - z)}{\beta + y}$$

d'où encore :

$$\overline{m_1^{v\prime} r} = \frac{z(\beta + y) + y(\gamma - z)}{\beta + y}$$

d'où enfin :

$$\overline{m_1^{v\prime} r} = \frac{\beta . z + \gamma . y}{\beta + y}$$

On aura donc les quatre équations :

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

$$\psi(y, z) = 0 \qquad (2)$$

$$y_1 = \frac{\beta . z + \gamma . y}{\beta + y} \qquad (3)$$

$$x_1 = \frac{\beta . x + \alpha . y}{\beta + y} \qquad (4)$$

Et en éliminant x, y, z entre ces quatre équations, on aura une équation finale :

$$\varphi(x_1, y_1, \alpha, \beta, \gamma) = 0$$

qui sera celle de la courbe C_1^v, lieu des points m_1^v, et cette courbe C_1^v sera identique (superposable) à la courbe C_1, section faite par le plan T dans le cône Σ ayant le point o pour sommet et la courbe C pour directrice.

§ XXI.

Si l'on avait une série de points m, m', m''..... situés hors du plan horizontal de projection et distants de ce plan respectivement des quantités h, h', h'',..... on pourrait appliquer à chacun d'eux l'une des trois méthodes, ou *directe*, ou *par les points de concours*, ou *par les coordonnées*, et l'on déterminerait les divers points m_r^v, m'^v_r, m''^v_r.....

Ainsi étant donnée une courbe C par sa projection C^h, et connaissant la hauteur de chacun de ses points au-dessus du plan horizontal de projection, on pourra facilement déterminer les divers points de la courbe C_r^v.

L'une ou l'autre des trois méthodes peut donc s'appliquer facilement lorsque la courbe C sera donnée : 1° par sa projection C^h et les *cotes* de hauteur de chacun de ses points (plans cotés et nivelés), ou lorsque la courbe C sera donnée; 2° par sa projection C^h et sa projection verticale C^v sur un plan vertical quelconque (projections orthogonales).

L'on doit remarquer que si la courbe C était donnée par ses projections C^h et C^v, la courbe C^v étant tracée sur le plan vertical LT, plan sur lequel on doit construire les divers points m_r^v..... de la courbe cherchée C_r^v, il pourrait arriver dans beaucoup de cas que les courbes C^v et C^v_r s'*enchevêtreraient* l'une dans l'autre, et que dès lors il y aurait confusion dans l'*épure*.

C'est pourquoi on doit préférer, lorsque l'on veut déterminer la courbe C_r^v par la méthode *directe* ou la méthode des *points de concours*, de se donner la projection verticale de la courbe C, non sur le plan LT, mais à part, sur un autre plan vertical.

Aussi voit-on de suite que la méthode des *coordonnées* satisfait pleinement à cette exigence graphique, car les courbes C^h, $C^{v'}$ et C_r^v sont toujours tracées sur des parties distinctes et séparées de la feuille de *dessin*, en sorte que l'*épure* est parfaitement *lisible*.

§ XXII.

Si l'on avait une surface Δ, et que l'on voulût construire la section faite par le plan T dans le cône Σ tangent à la surface Δ et ayant le point o pour sommet, on voit de suite qu'il faut au préalable construire la courbe C, contact du cône Σ et de la surface Δ.

La construction des projections de la courbe C exige deux plans de projection, qui existent en effet, puisque l'on a le plan horizontal de projection et le plan

vertical LT. Mais la courbe C^v étant sur le plan LT, plan vertical sur lequel on devra construire la courbe C_1^v, il y aura confusion sur l'*épure*.

Pour éviter cette confusion il faut donc nécessairement employer un second plan vertical de projection, et ainsi par exemple le plan L'T' perpendiculaire au plan LT.

Dès lors la courbe C sera déterminée par ses deux projections C^h et $C^{v'}$, que l'on construira par *points* et en se servant des méthodes exposées dans le Cours de géométrie descriptive (*).

Et de suite l'on voit que l'on pourra employer avec avantage la méthode des *coordonnées* pour déterminer la courbe C_1^v, tandis que l'emploi de la méthode *directe*, et surtout celle des *points de concours*, serait inadmissible, vu la multiplicité des constructions à effectuer (**).

C'est sans nulle doute parce que la méthode des *coordonnées* est applicable à tous les *cas* et à tous les *problèmes*, qu'il s'agisse de points, de droites, de courbes ou de surfaces, que Monge, qui avait une tendance si heureuse à généraliser les méthodes, s'est contenté, dans son Mémoire inédit de 1785, d'exposer la seule méthode des *coordonnées*, vue sa *généralité* (***).

DEUXIÈME PARTIE.

Applications des méthodes de la géométrie descriptive à la perspective.

§ I.

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons résolu le problème : *Trouver le point de rencontre d'une droite ou d'un plan avec un plan vertical T, parallèle au plan vertical de projection*. Nous avons employé, pour la solution de ce problème les méthodes de la géométrie descriptive fondées sur les projections orthogonales. Montrons maintenant que toutes les constructions que nous avons exécutées sont identiquement les mêmes que celles employées en *perspective* par les divers auteurs (et même les anciens) qui ont écrit sur ce sujet; nous

(*) Voyez le *Cours de géométrie descriptive*, 1re partie, page 107, et 2e partie, page 200.

(**) Si l'on jette les yeux sur la collection des épures gravées de l'École polytechnique, l'on verra (avec un peu d'attention) que l'épure de la perspective du piédouche qui a été exécutée par *Girard*, sous la direction de *Hachette*, ancien professeur à l'École polytechnique, est construite par la *méthode des coordonnées*.

(***) L'on doit faire remarquer avec quelle facilité l'on peut passer de la solution par la méthode des *coordonnées* à la solution *analytique* d'un problème de perspective, et ainsi traduire facilement de la langue *graphique* en la langue *algébrique*.

aurons dès lors démontré que la *perspective* est une des applications de la géométrie descriptive.

§ II.

Étant donné : 1° un point m situé derrière un plan vertical auquel on donne le nom de *tableau*, et situé à une hauteur z au-dessus d'un plan horizontal auquel on donne le nom de *plan géométral*, et 2° un point o situé en avant du *tableau* et distant du *tableau* d'une quantité égale à l, et du plan *géométral* d'une quantité égale à h, on appelle *perspective* du point m la trace de la droite om sur le *tableau*. Or si l'on recouchait le *tableau* sur le plan *géométral*, la *perspective* des divers points m... donnés dans l'espace se confondrait, se brouillerait avec les projections orthogonales de ces divers points m... sur le plan *géométral*. C'est pour éviter cette confusion, que l'on suppose que le *tableau* est transporté parallèlement à lui-même et derrière la projection sur le plan *géométral* des divers points m..., de manière à ce qu'étant recouché sur ce plan géométral, la figure qui se trouve tracée sur lui ne s'embrouille pas avec la figure tracée sur le plan *géométral*.

Les données d'une *perspective* sont donc les projections m^h... des divers points m... de l'espace sur le plan géométral (*fig.* α). On donne à cette figure le nom de figure *géométrale*, et l'on dit : les points, les droites, les lignes du *géométral* ou qui sont au *géométral*.

La droite xy, qui est tracée au *géométral*, et en avant de tous les points du géométral, est le pied du *tableau* sur lequel doit être tracée la *perspective* des divers points m... En sorte qu'en abaissant d'un point m^h du géométral une perpendiculaire m^hp sur la droite xy, on a en m^hp la distance du point m au *tableau*.

Le *géométral* étant donné, ainsi que la position de la droite xy par rapport au géométral, on a la position du *tableau* par rapport aux divers points m... de l'espace, qu'il faut mettre en perspective.

On transporte la droite xy en une droite $x'y'$ qui lui est parallèle et qui se trouve derrière tous les points du géométral ; cela fait, on se donne la position du pied de la perpendiculaire abaissée du point o sur le tableau ; le point o prend le nom de point de *vue*, et le pied de la perpendiculaire prend le nom de point *principal* de la perspective.

Pour fixer le point *principal* P, on mène une droite H parallèle à $x'y'$ et à une distance égale à h, hauteur du point de *vue* au-dessus du *géométral*, et l'on place un point P sur cette droite H, qui prend le nom de ligne d'*horizon*.

Cela fait, on porte, à partir du point P, à droite et à gauche de ce point et sur la droite H, une ouverture de compas égale à la distance l du point de *vue* au *tableau*, et l'on fixe ainsi deux points δ et δ', qui prennent le nom de *points de dis-*

tance. Cela fait, on a écrit *graphiquement* toutes les données de la perspective, et il s'agit de construire la *perspective* des divers points *m*....

§ III.

Avant de construire la perspective des points *m*..., faisons remarquer que toutes les lignes que nous avons tracées et que tous les points que nous avons placés jusqu'ici sont identiquement les mêmes que ceux que nous avons employés lorsque nous résolvions le même problème par les méthodes de la géométrie descriptive; seulement, lorsque l'on fait une épure de *perspective*, ces lignes et ces points sont autrement désignés.

Ainsi : la ligne xy, pied du tableau, n'est autre que la droite H^v (*fig.* v);
la ligne $x'y'$ n'est autre que la ligne de terre LT;
la droite H, ligne d'horizon, n'est autre que la droite X;
le point principal P n'est autre que o^v;
et les points de distance δ et δ' ne sont autres que les points d'^v et b'^v.

§ IV.

Pour mettre un point *m* en perspective, l'on emploie, *habituellement*, deux méthodes, l'une dite : méthode des *points de concours*, et l'autre dite : méthode des *échelles*.

Nous allons exposer successivement ces deux méthodes, mais auparavant il faut dire ce qu'on entend par *perspective* d'une droite.

Étant donnée une droite D dans l'espace, on appelle *perspective* de cette droite la trace, sur le *tableau*, du plan qui passe par cette droite D et le point de *vue o*.

Pour déterminer la *perspective* de la droite D, il suffit d'avoir deux de ses points; l'un est la trace de la droite D sur le *tableau*, et l'autre le point en lequel le *tableau* est percé par une droite D' qui sera menée par le point de *vue o* parallèlement à la droite D; ce second point prend le nom de point de *concours* de la droite D. Ainsi la *perspective* d'une droite D est déterminée par la trace *d* de cette droite et son point de *concours c*.

On donne au point *c* le nom de point de *concours*, parce que si l'on a un faisceau (D) de droites parallèles entre elles, les *perspectives* de ces diverses droites passent toutes par le même point *c*.

Le point de *concours* d'un faisceau de droites parallèles prend le nom de point *de fuite*, lorsque le faisceau est horizontal; et il prend le nom de point *accidentel*, lorsque le faisceau est incliné à l'horizon.

Le point de *fuite* d'un faisceau horizontal est toujours placé sur la ligne d'*horizon.*

Le point *accidentel* d'un faisceau incliné est placé hors de la ligne d'*horizon*, au-dessus ou au-dessous de cette ligne, suivant la direction du faisceau.

On a donné le nom de *point de fuite* au point de *concours* des droites parallèles et horizontales, parce que ces droites ne se coupent qu'à l'infini sur le plan horizontal passant par le point de *vue;* elles tendent donc à se couper en un point qui fuit toujours devant elles et jusqu'à l'*horizon*, qui est considéré comme une ligne située à l'infini par rapport au point de *vue.*

Le point de *fuite* d'un faisceau horizontal et perpendiculaire au *tableau* n'est autre que le point *principal* P.

Le point de *fuite* d'un faisceau horizontal et incliné de 45° sur le *tableau* n'est autre que l'un ou l'autre des points de *distance* δ et δ', suivant que ce faisceau est incliné à droite ou incliné à gauche sur le *tableau.*

§ V.

Méthode des points de concours (ou de fuite).

Pour mettre un point m en perspective, on fait passer par ce point deux droites quelconques A et B, et l'on construit les *perspectives* A^p et B^p de ces deux droites, lesquelles se coupent en un point m^p, qui est la *perspective* du point m.

Pour construire les *perspectives* A^p et B^p, on est obligé de construire le point de *concours* de chacune d'elles ; or, on ignore *à priori* la position que ce point de *concours* prendra au-dessus ou au-dessous de la ligne d'*horizon.* C'est pourquoi, au lieu de mener par le point m deux droites quelconques, on mène deux droites horizontales, parce que l'on sait que le point de concours de leurs *perspectives* est situé, pour chacune d'elles, sur la ligne d'*horizon.*

Mais, si l'on prend des droites quelconques, tout en les assujettissant à être horizontales, il faudra toujours construire le point de *concours* de chacune de leurs *perspectives.* Il serait donc préférable d'employer deux droites horizontales, de direction donnée et telle que l'on sache *à priori* où sera situé le point de concours de leurs *perspectives;* c'est ce qui arrive lorsque l'on fait passer par le point donné m trois droites horizontales, l'une perpendiculaire au tableau, et les deux autres inclinées à 45° sur le *tableau;* car l'on sait que le point de concours des *perspectives* de ces droites est le point *principal* P pour la *perspective* de la première droite, et l'un et l'autre des points de distance δ et δ' (*fig.* α) pour les *perspectives* des deux droites inclinées à 45° sur le *tableau.*

D'après ce qui précède, pour construire la *perspective* d'un point m dont on

connaîtra la hauteur z au-dessus du plan *géométral* et la projection m^h au *géométral*, on exécutera (*fig.* α) les constructions suivantes.

On abaissera du point m^h une perpendiculaire m^hp sur la droite xy, pied du *tableau*.

On tracera une droite $x''y''$ parallèle à la droite $x'y'$ et distante d'elle d'une quantité z égale à la hauteur du point m au-dessus du plan *géométral*.

Sur la droite $x''y''$, et à partir du point p' en lequel la perpendiculaire m^hp prolongée vient couper cette droite, on portera à gauche et à droite une ouverture de compas égale à $\overline{m^hp}$, et l'on fixera les deux points $6'$ et α'.

Cela fait, les droites $\alpha'\delta$, $6'\delta'$, $p'P$ se couperont en un même point m^p qui sera la *perspective* du point m.

Si l'on compare la fig. (α) avec la fig. (v), on voit de suite que les constructions que nous venons d'exécuter pour déterminer le point m^p sont identiquement les mêmes que celles au moyen desquelles nous avions construit le point m_1^v;

Et qu'ainsi : le point p' (*fig.* α) n'est autre que le point m^v (*fig.* v) ;
les points α' et $6'$ ne sont autres que les points b^v et d^v ;
le point m^p n'est autre que le point m_1^v ;
et que la droite $x''y''$ n'est autre que la droite V^x.

Nous pouvons donc en conclure que ce que l'on désigne par *perspective* d'un système de points m... n'est autre chose que la projection verticale de la section faite dans la pyramide (ayant pour base la figure formée par tous les points m...) par un plan vertical parallèle au plan vertical de projection, et *vice versâ*.

§ VI.

Comme les corps dont on a à s'occuper en *perspective*, lorsque l'on applique la perspective à l'architecture, sont terminés par des surfaces qui ne sont autres que des *cylindres*, des *cônes* ou des *sphères*, et que la plupart de ces corps sont composés de faces *planes*, *cylindriques* ou *coniques* ou *sphériques*, s'entre-coupant suivant des lignes *droites* ou suivant des lignes *courbes* qui se croisent elles-mêmes en des *points* qui sont des points remarquables du corps considéré, il s'ensuit que, sachant mettre en perspective un point, on sait tout ce qui est nécessaire. Ainsi, avec les principes exposés ci-dessus, nous pouvons affirmer que nous savons la *perspective*, puisque nous avons à notre disposition une méthode, *celle des points de concours ou de fuite*, qui nous permet de mettre en perspective un *point*, et par suite une ligne *droite* ou *courbe*.

Dans la première partie du *Cours de Géométrie descriptive*, nous avons donné, par la méthode des points de concours et de fuite, la perspective d'un polygone quelconque situé sur le plan géométral, et d'un prisme dont les arêtes étaient verticales, ainsi que d'une pyramide et d'un tronc de pyramide. Dans la deuxième partie du même cours, nous avons donné la perspective d'un cercle situé sur le plan horizontal ou dans un plan parallèle au plan horizontal, ainsi que d'un cône complet et d'un tronc conique. Nous savons donc déjà mettre en perspective tous les corps composés de prismes verticaux et de troncs cylindriques et coniques à bases horizontales, ainsi que de troncs pyramidaux à bases horizontales. Et comme la *perspective* ne doit (si l'on y réfléchit bien) n'être employée qu'à représenter, par son moyen, des constructions architecturales, on reconnaîtra sans peine que tout ce que nous avons donné dans la première et la deuxième partie du *Cours de Géométrie descriptive*, au sujet de la *perspective*, était suffisant aux architectes.

Mais il ne faut pas seulement avoir *démontré* (si je puis employer cette expression) qu'en effet il suffit, pour les architectes, de savoir mettre en perspective des prismes, des troncs de pyramides et des pyramides, des troncs cylindriques, des troncs coniques et des cônes ; il faut encore *démontrer* que la *perspective* ne doit être employée, par les ingénieurs, que lorsqu'il s'agit de constructions architecturales, et non de machines ou autres objets de constructions et d'industrie.

C'est ce que je vais faire en peu de mots.

La perspective déforme les objets, puisque des droites *parallèles* entre elles nous apparaissent comme des droites *concourantes*, et qu'ainsi un parallélogramme nous apparaît comme étant un quadrilatère.

Si l'on veut donc avoir une idée nette et exacte d'un corps, de sa forme, de ses dimensions, il ne faut pas avoir recours à la *perspective* pour le représenter.

La méthode graphique à employer dans ce cas est la méthode des projections orthogonales. Deux projections du corps, l'une sur le plan horizontal, et l'autre sur le plan vertical, non-seulement suffisent pour nous faire connaître parfaitement le corps donné et en toutes ses parties, mais *seules* elles permettent de bien connaître ce corps.

C'est donc, lorsqu'il s'agit de *construire en relief*, la seule méthode des projections orthogonales que l'on doive employer pour représenter un *corps*; aussi les constructeurs ne se servent-ils (et c'est qu'ils ne peuvent et ne doivent pas faire autrement, *sous peine d'erreur*) que des *plans*, *coupes* et *élévations* du *corps* qu'ils veulent exécuter. Toutefois la perspective est une science utile aux architectes, et dont ils font sans cesse un emploi convenable et utile; car lorsqu'ils imaginent un nouvel *édifice*, il faut qu'il soit en harmonie avec les *constructions*

environnantes; et comme le *spectateur* ne verra pas les constructions anciennes et nouvelles autrement que par *ses yeux*, et dès lors sous la forme *perspective*, il est bon que l'architecte fasse une *perspective*, pour que l'on puisse tout d'abord juger de l'*effet*, et aussi de la manière dont les détails architectoniques de la nouvelle construction *s'harmoniseront* avec ceux des anciennes constructions qui doivent environner l'*édifice* projeté.

§ VIII.

Quoique nous puissions, *à la rigueur*, mettre en perspective toutes les *lignes* droites ou courbes d'un *édifice*, en sachant mettre en perspective un *point*; il ne sera pas cependant inutile d'indiquer comment on met en perspective une courbe située dans un plan vertical P, lequel est : 1° perpendiculaire au *tableau*, ou 2° incliné à 45° *sur le tableau*, ou 3° incliné d'un angle arbitraire sur le *tableau*.

Premier cas. Soit donné un plan P vertical et perpendiculaire au *tableau* et une courbe E tracée dans ce plan P (*fig.* 6).

La trace H^p sera perpendiculaire à la droite xy, *pied du tableau*.

Cette trace H^p sera en même temps E^h, ou la projection sur le *plan géométral* de la courbe E.

Les données étant telles, la courbe E ne pourra être connue qu'autant que l'on connaîtra la hauteur de chacun de ses points m... au-dessus du *géométral*, connaissant la projection m^h... (*au géométral*) de chacun de ces mêmes points m....

Or la manière la plus simple de se donner la hauteur de chacun des points m... est de se donner le rabattement de la courbe E sur le *tableau*. Ainsi, faisant tourner le plan P autour de la droite Z, suivant laquelle il coupe le *tableau*, et recouchant ce plan P sur le tableau, la courbe E viendra en E_1, et après le transport de la droite xy en $x'y'$, on aura la courbe E_1' identique et superposable à la courbe E, la droite Z étant venue se placer en Z'.

Cela fait :

Soit un point m^h projection au *géométral* d'un point m de la courbe E, et proposons-nous de mettre en *perspective* ce point m.

Si du point Z^h comme centre avec $\overline{Z^h m^h}$ pour rayon, nous décrivons un cercle γ, le point m^h viendra en m_1^h sur la droite xy; et en transportant le *tableau*, et ainsi la droite xy en $x'y'$, on aura en m_1' sur E_1' le point m rabattu et transporté, et dès lors on aura en $\overline{m_1'q}$ la hauteur du point m au-dessus du plan *géométral*.

Et si l'on remarque que la corde $\overline{m^h m_1^h}$ du cercle γ est inclinée à 45° sur la droite xy, et que dès lors on a : $\overline{Z^h m^h} = \overline{Z^h m_1^h}$, on verra de suite qu'il suffit de faire les constructions suivantes :

Unir le point m_r' avec le point de *distance* δ;

Mener par le point m_r' une parallèle à la droite $x'y'$ et coupant la droite Z' au point m^v;

Unir le point m^v au point principal P.

Les droites $m_r'\delta$ et m^vP se couperont en un point m^p qui sera la *perspective* du point *m*.

Deuxième cas. Supposons toujours que le plan P est vertical, mais qu'il fasse avec le *tableau* un angle de 45°, alors sa trace H^p fera un angle de 45° avec la droite *xy, pied du tableau* (*fig.* γ).

Concevons une courbe C dans le plan P, sa projection C^h sur le *plan géométral* ne sera autre que la droite H^p, et sa projection orthogonale sur le *tableau* nous permettra de connaître la hauteur de chacun de ses points *m*... au-dessus du *géométral.*

Lorsque le *tableau* sera transporté parallèlement à lui-même, et qu'ainsi la droite *xy* sera transportée en $x'y'$, on aura en C^v la projection verticale de la courbe C.

Cela fait :

Pour déterminer la *perspective* d'un point *m* de la courbe C il suffira d'exécuter les constructions suivantes :

Étant donné m^h, élever par ce point m^h une perpendiculaire à la droite $x'y'$, jusqu'à sa rencontre en m^v avec la courbe C^v.

Élever par le point Z^h en lequel se coupent les droites H^p et *xy* une perpendiculaire Z' à la droite $x'y'$.

Mener par le point m^v une parallèle à la droite $x'y'$ et coupant la droite Z' en un point m_r.

Les droites $\overline{m^vP}$ et $\overline{m_r\delta}$ se couperont en un point m^p qui sera la perspective du point *m*.

Troisième cas. Le plan P étant toujours vertical fait avec le *tableau* un angle arbitraire λ.

Dans ce cas (*fig.* δ) la courbe C est donnée comme dans le deuxième cas (ci-dessus), mais il ne faut plus unir le point m_r avec le point de *distance* δ, il faut déterminer le point de *fuite f* des droites horizontales parallèles au plan P; pour cela on abaisse du point *principal* P une perpendiculaire à la *ligne d'horizon* H et du point P comme centre, et avec $\overline{P\delta}$ pour rayon on décrit un quart de cercle qui détermine le point *p*.

Cela fait, on mène par le point *p* une parallèle à H^p qui coupe la ligne d'horizon H en un point *f*, qui est le point de *fuite* demandé.

Dès lors les droites $m_{,}f$ et $m^{v}P$ se coupent en un point m', qui est la *perspective* du point m.

§ IX.

Application de ce qui précède à un exemple particulier.

Prenons pour exemple une voûte d'arête barre-longue et supposons que le *plan géométral* n'est autre que le plan de naissance des deux douelles cylindriques, faisant ainsi abstraction des pieds-droits qui soutiennent la voûte (*fig.* μ).

La courbe B arc de tête du petit cylindre sera un demi-cercle parallèle au tableau, on connaîtra sa projection au *géométral*, qui sera la droite B^{h}, et sa projection verticale, qui sera le demi-cercle B^{v} identique au demi-cercle B.

Dès lors la *perspective* du cercle B sera un cercle d'un rayon plus petit et qu'il est facile de déterminer.

La courbe E arc de tête du grand cylindre sera une demi-ellipse ayant son grand axe en $\overline{il}$ et dont le demi-petit axe, qui sera vertical, sera égal au rayon du cercle B.

La courbe C intersection des deux cylindres des douelles sera une demi-ellipse ayant *ab* pour grand axe et ayant son demi-petit axe, vertical, égal au rayon du cercle B.

Pour mettre l'ellipse E en perspective on se donnera son rabattement E'_{r}; pour mettre l'ellipse C en perspective on se donnera sa projection verticale C^{v}, qui ne sera autre que le demi-cercle B^{v}.

Cela fait, on exécutera les constructions indiquées ci-dessus (premier et troisième cas) pour mettre en perspective une série de points de chacune de ces courbes E et C, et l'on aura pour résultat le dessin de perspective (*fig.* ρ).

§ X.

Méthode des échelles.

Concevons un point m dans l'espace (*fig.* ϖ) placé derrière le *tableau*, la projection de ce point m au géométral étant m^{h}.

Traçons dans le plan géométral une droite Y perpendiculaire au pied xy du *tableau* et désignons cette ligne xy par X.

Concevons par la droite Y un plan perpendiculaire Q au plan *géométral*, il coupera le *tableau* suivant une droite Z.

Les distances du point m de l'espace au *tableau* et au plan Q, seront donc égales à $\overline{m^h p}$ pour le *tableau* et à $\overline{m^h q}$ pour le plan Q.

Transportons le *tableau* parallèlement à lui-même, la droite xy ou X se transportera en $x'y'$ ou X', et la droite Z se placera en Z' perpendiculaire à X'.

Nous pourrons nous donner sur la droite Z' la distance du point m au plan *géométral*, supposons qu'elle soit égale à $\overline{a'a''}$.

Nous connaissons donc les trois coordonnées rectangulaires du point m ou ses distances aux trois plans rectangulaires des coordonnées, ces plans étant : XY ou le plan *géométral*, YZ ou le plan Q, XZ ou le *tableau*.

Cela dit :

Donnons la ligne d'*horizon* H, le point *principal* P et les points de *distance* δ et δ', et construisons la *perspective* m^v du point m.

Trois droites passent par le point m : l'ordonnée x qui se projette au *géométral* en $m^h q$, l'ordonnée y qui se projette au *géométral* en $m^h p$ et l'ordonnée z qui est égale à $\overline{a'a''}$, et qui est verticale.

Cherchons les *perspectives* de ces trois coordonnées x, y, z; ces *perspectives* se couperont au point m^v demandé.

Et d'abord la droite X a pour perspective X', la droite Z a pour perspective Z', et la droite Y a pour perspective la droite Y', dont le point de *fuite* est le point principal P.

Cela posé :

Portant sur X' l'ouverture de compas $\overline{a'p'} = \overline{ap}$, sur Z' l'ouverture de compas $\overline{a'a''}$ égale à la hauteur z du point m au-dessus du géométral, on joindra le point principal P avec les points p' et a''.

Portant sur X' l'ouverture de compas $\overline{a'r'} = \overline{aq}$ et joignant le point r' au point de *distance* δ', cette droite $\delta'r'$ coupera la droite Y' en un point q'.

Cela fait on mènera par le point q' deux droites, l'une parallèle à X' et coupant la droite p'P au point m', l'autre parallèle à Z' et coupant la droite a''P au point q''.

On achèvera le rectangle $q'm'q''m^v$ et l'on aura en son sommet m^v opposé au sommet q', la *perspective* du point donné m.

Si par le point p' on menait une parallèle à Z', et si par le point a'' on menait une parallèle à X', on aurait en $(a'p'p''a''m'm^vq''q')$ la perspective du parallélipipède rectangle construit sur les trois coordonnées x, y, z, du point m (ce parallélipipède ayant l'une de ses faces dans le *tableau* et une autre face dans le plan Q).

Les *perspectives* des trois distances x, y, z, au *tableau*, au plan Q et au plan *géométral*, seront donc, respectivement, $\overline{m^vp''}$, $\overline{m^vq''}$, $\overline{m^vm'}$.

Ces *perspectives* ne sont point égales aux coordonnées du point m, aussi leur

donnent-on le nom de ***distances dégradées*** du point m aux trois plans, Q, ***tableau*** et ***géométral.***

En examinant avec attention la fig. (π) on voit sans peine que le point p'' est la perspective de la projection du point m sur le *tableau*, que le point q'' est la perspective de la projection du point m sur le plan Q, et que le point m' est la perspective de la projection du point m sur le *géométral*.

On voit aussi :

1° Que l'on a $\overline{m^{\prime}m'} = \overline{q''q'}$, et qu'ainsi la distance dégradée du point m au *géométral* est égale à la distance dégradée de sa projection sur le plan Q, au même plan géométral.

2° Que l'on a $\overline{m^{\prime}q''} = \overline{m'q'}$ et qu'ainsi la distance dégradée du point m au plan Q est égale à la distance dégradée de sa projection sur le plan *géométral* au même plan Q.

3° Que l'on n'a pas, en général, $\overline{m^{\prime}p''} = \overline{m'p'}$ et qu'ainsi la distance dégradée du point m au *tableau* n'est pas égale, en général, à la distance dégradée de sa projection sur le *géométral* au *tableau*.

Si l'on a une suite de points m... situés dans un plan V parallèle au *tableau*, les distances dégradées de ces divers points au *tableau* seront, en général, inégales entre elles ; mais si ces points m... sont sur une *horizontale* B située dans le plan V, les distances dégradées de ces mêmes points m... au *géométral* seront égales entre elles, et si ces points m... sont sur une *verticale* A située dans le plan V, les distances dégradées de ces mêmes points m... au plan Q seront égales entre elles.

Comme pour effectuer la *perspective* d'un point m on porte sur la droite X' les distances x et y de ce point m, et que l'on porte sur la droite Z' la distance z de ce même point m, on a donné à ces deux droites X' et Z' le nom d'*échelles*.

§ XI.

Les peintres se servent principalement de la méthode des *échelles* pour mettre en *perspective* les divers groupes de personnages et d'objets de toute sorte qui entrent dans la composition de la *scène* qu'ils veulent représenter sur la *toile*.

Ayant disposé sur le plan *géométral* les diverses *choses* qui doivent être mises en perspective, ayant fixé le pied xy du tableau par rapport à ces *choses*, la *hauteur* du point de *vue* au-dessus du *géométral* ou plan de la *scène* à représenter, la *distance* de ce point de *vue* au *tableau*, de manière à ce que l'*œil* de l'observateur embrasse d'un coup d'œil l'ensemble de la scène ; et ayant, de plus, fixé la position du point *principal* et par conséquent la position que le spectateur doit avoir par rap-

port à la *scène*, le peintre enveloppe chaque objet d'un parallélipipède rectangle dont les faces latérales sont telles que deux d'entre elles sont parallèles au *tableau*, et les deux autres perpendiculaires au *tableau*. Les deux dernières faces sont horizontales, l'une d'elles étant placée sur le plan géométral.

Il met ensuite en perspective ce parallélipipède (*fig.* φ), et il dessine, sur sa *toile*, l'*objet* qu'il veut représenter, de manière à ce qu'il soit renfermé dans la *perspective* ($q''r''m''n''q'r'm'n'$) du parallélipipède rectangle.

C'est ainsi que le peintre place sur sa toile les divers *personnages* qui doivent composer la *scène*.

Quant aux objets matériels et inanimés, composés de lignes droites ou de lignes courbes géométriques, en un mot, terminés par des lignes dont le tracé est rigoureux, il achève de les mettre exactement et complétement en *perspective* par la méthode des points de *concours*, après en avoir fixé préalablement la position sur sa *toile* par la méthode des *échelles*.

§ XII.

De l'échelle harmonique.

Étant donnés la droite d'*horizon* H, le point *principal* P, le point de *distance* δ et le pied $x'y'$ du tableau ;

Si l'on joint un point a de la droite $x'y'$ au point P, et si l'on divise, à partir du point a, la droite $x'y'$ en parties égales, par les points 1, 2, 3, 4, 5,... en unissant le point δ à ces divers points de division, on aura des droites convergentes qui couperont la droite aP en des points 1′, 2′, 3′, 4′, 5′... (*fig.* A).

Les divisions que détermineront sur la droite aP ces divers points ne seront point égales entre elles ; elles iront en décroissant de longueur depuis le point a jusqu'au point P.

On a donné le nom d'*échelle harmonique* à la droite aP ainsi divisée.

§ XIII.

Abaissons du point de *distance* δ une perpendiculaire δb sur la droite $x'y'$, nous aurons le point b ; abaissons du point P une perpendiculaire sur la droite $x'y'$, nous aurons le point q.

Désignons $\overline{\delta b} = \overline{Pq}$ par h, $\overline{aq}$ par d', $\overline{\delta P}$ par d, et $\overline{(a,\ 1)}$ par α ;

Dès lors $\overline{ab} = d - d'$.

Cela posé :

Cherchons les coordonnées du point 1' intersection des droites aP et (δ, 1).
L'équation de la droite aP sera :

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{d'} \qquad (1)$$

L'équation de la droite (δ, 1) sera :

$$y - h = \frac{h}{d' - d + \alpha}\,(x - d' + d) \qquad (2)$$

Des deux équations (1) et (2), l'on tire :

$$x = \frac{\alpha d'}{d + \alpha} \qquad (3)$$

et

$$y = \frac{\alpha h}{d + \alpha} \qquad (4)$$

Les valeurs (3) et (4) sont celles des coordonnées du point 1'.

Cela posé :

Si nous prenons, à partir du point a et sur la droite $x'y'$, n distances égales à α, il suffit de remplacer α par $n\alpha$ dans les valeurs de x et de y données (3) et (4).

On aura donc :

$$x = \frac{n\alpha . d'}{d + n\alpha} \qquad (5)$$

et

$$y = \frac{n\alpha . h}{d + n\alpha} \qquad (6)$$

Si l'on désigne par l la distance du point a au point qui, situé sur la droite aP, a pour coordonnées les valeurs (5) et (6), on aura :

$$l = \frac{n\alpha}{d + n\alpha}\sqrt{d'^2 + h^2}$$

et pour le point suivant situé sur aP, on aura :

$$l' = \frac{(n+1)\alpha}{d + (n+1)\alpha}\sqrt{d'^2 + h^2}$$

De sorte que $(l' - l)$ sera la longueur de la division effectuée sur la droite aP par deux convergentes partant du point de distance δ, pour aller passer par deux points situés sur la droite $x'y'$, et distants du point a, l'un de $n\alpha$ et l'autre de $(n+1)\alpha$.

En effectuant le calcul, on aura :

$$(l'-l)=\frac{\alpha . d \sqrt{d^2+h^2}}{(d+n\alpha)^2+\alpha(d+n\alpha)} \qquad (7)$$

et comme $\sqrt{d^2+h^2}=a\mathrm{P}$, nous pourrons désigner la longueur de cette droite par L, et nous aurons en définitive :

$$(l'-l)=\frac{\alpha . d . \mathrm{L}}{(d+n\alpha)^2+\alpha(d+n\alpha)} \qquad (8)$$

Nous pouvons nous donner les longueurs d, α et L, en centimètres et millimètres, par exemple, et ainsi mettre des *nombres*, dans la formule (8), à la place des longueurs *linéaires ;* et dès lors, en faisant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$,... dans la formule (8), nous aurons les nombres N′, N″, N‴,... qui exprimeront, en centimètres et millimètres, la distance au point a des points 1′, 2′, 3′... de division successive de la droite aP.

On pourra donc, dans tous les cas, au lieu de construire *graphiquement* la division *harmonique* de la droite aP, déterminer cette division par le *calcul*, et cela au moyen de la formule (8) (*).

§ XIV.

Toutes les *figures* apparaissent sous leur véritable forme lorsqu'elles sont situées sur le *tableau*.

Si l'on a une suite de *bandes* verticales situées sur un plan P, parallèle au *tableau* et ayant toutes même largeur k, elles nous apparaîtront en *perspective* sous la forme de bandes de même largeur k', largeur k' qui ne sera pas égale à la largeur réelle k.

Si l'on suppose une suite de plans P′, P″, P‴... parallèles au *tableau* et équidistants entre eux, de sorte qu'ils partagent en parties égales une droite D perpendiculaire au *tableau* ; et si l'on a une suite de bandes de même largeur k, placées dans chacun de ces plans, la *perspective* des bandes du plan P′ auront une largeur k', celle des bandes du plan P″ aura une largeur k'', et ainsi de suite.

Il sera facile de déterminer le rapport qui existe entre la largeur réelle k et les largeurs k', k'', k''',... des bandes en *perspective* ; en effet (*fig.* B) : supposons que l'on prenne sur la droite yx une longueur $\overline{ab}=k$ et les points q', q'', q''',... équidistants

(*) L'emploi de cette formule sera utile lorsque les points de distance seront hors du *tableau*, et qu'on ne pourra pas dès lors effectuer avec facilité, par le procédé graphique, la division de la droite aP.

entre eux, de manière à ce que $\overline{aq'}=\overline{q'q''}=\overline{q''q'''}=$..... et que $\overline{aq'}$ soit égal à la distance du premier plan P′ au *tableau;* les divergentes $\delta q', \delta q'', \delta q''',$... couperont la droite bP en les points $b', b'', b''',$... et l'on aura dès lors en $\overline{bb'}, \overline{bb''}, \overline{bb'''},$... les distances *dégradées harmoniquement* des plans P′, P″, P‴,... au *tableau.*

Joignant les points a et P et menant par les points $b', b'', b''',$... des parallèles à xy, on aura en $\overline{a'b'}, \overline{a''b''}, \overline{a'''b'''},$... les largeurs dégradées harmoniquement des bandes placées sur les plans P′, P″, P‴,...

Ainsi $\overline{ab}=k$, $\overline{a'b'}=k'$, $\overline{a''b''}=k''$,...

Ce qui vient d'être dit n'est pas sans intérêt lorsqu'il s'agit de faire une *perspective* au *simple trait.* Toutes les lignes tracées sur le *tableau* auront une certaine grosseur k, et toutes les lignes tracées sur les plans P′, P″, P‴,... devront avoir respectivement les grosseurs $k', k'', k''',$... Par ce moyen, le *trait* contribuera par lui-même à l'*effet* de la *perspective.*

On devrait bien aussi avoir égard à la *teinte* du trait, ainsi les *traits* représentant la *perspective* de figures placées dans les plans P′, P″, P‴,... ne devront pas avoir la même *teinte;* ils devront être d'autant moins *teintés* ou d'autant moins *noirs* que le plan considéré sera plus éloigné du *tableau*, et la gradation des teintes sera *harmonique* en prenant pour *échelle de dégradation*, ce que nous avons désigné ci-dessus par *échelle harmonique.* On pourrait donc construire un *diapason harmonique* des teintes, analogue à celui dont il a été parlé au livre *des ombres* (*).

§ XV.

Les deux méthodes de *perspective*, dites par les *points de concours* et par les *échelles*, et que nous avons exposées ci-dessus, nous permettent de mettre en perspective tous les *corps* composés de faces planes et toutes les *figures* planes composées de lignes droites et de lignes courbes.

Mais lorsqu'il s'agit de mettre en perspective un corps déterminé par une surface géométrique Σ, ces deux méthodes sont impuissantes.

Et en effet : la *perspective* d'une surface Σ étant la section A faite par un plan dans le cône Δ tangent à cette surface Σ, il est évident que l'on ne peut ni par l'une, ni par l'autre des deux méthodes exposées ci-dessus, parvenir à construire la courbe de contact C de la surface donnée Σ, et d'un cône Δ qui, lui étant tangent, aurait pour sommet l'œil du spectateur.

Or cette courbe de contact C est indispensable pour que le *cône perspectif* Δ soit connu, et que l'on puisse dès lors le couper par le *tableau.*

(*) Voyez, ci-avant, au livre premier, le mémoire n° 1.

Lorsque la courbe de contact C sera donnée, on pourra, par l'une ou l'autre des deux méthodes exposées ci-dessus, trouver la *perspective* A de cette courbe, et l'on aura la perspective de la surface Σ; il faut donc, dans tous les cas, connaître la courbe C, et la méthode des projections orthogonales, nous conduit aux projections de cette courbe C, projections qui nous sont indispensables pour l'emploi des deux méthodes de perspective exposées ci-dessus, et qui conduiront simultanément ou séparément à la détermination de la courbe A.

Mais comme en déterminant la courbe C (ou en d'autres termes ses deux projections C^h et C^v) par l'emploi des projections orthogonales, on connaît nécessairement les projections des diverses génératrices droites du cône tangent Δ, il vaut mieux achever l'épure de perspective, en employant la *méthode* dite *des coordonnées*, et dont nous avons parlé ci-dessus, pour déterminer la courbe A située dans le plan sécant, ou, en d'autres termes, sur le *tableau*.

Aussi, est-ce toujours de cette manière que l'on devra opérer, lorsque l'on voudra déterminer la perspective d'un corps terminé par une surface géométrique, comme, par exemple, un ellipsoïde à trois axes inégaux, une vis à filet triangulaire ou carré, un anneau, etc.

Et c'est *précisément* cette méthode qui est exposée dans le mémoire inédit de 1785 par Monge, comme étant la méthode la plus *générale* à employer en *perspective*, parce qu'elle s'applique à tous les *corps*.

§ XVI.

Lorsque l'on dessine *à vue* des monuments, on doit autant que possible le faire de manière à ce que les *règles* de la perspective soient observées, car sans cela le *dessin* serait faux et désagréable à l'œil de celui qui le regarderait.

Il est donc nécessaire de s'exercer d'avance par des *tracés* rigoureux à connaître les *formes perspectives* qu'affectent certaines *figures;* par exemple, un cercle situé dans un plan horizontal peut affecter trois formes très-différentes, suivant la position qu'occupe le spectateur par rapport à ce cercle.

Ainsi :

1° Si les pieds p du spectateur (*fig.* C), sont hors du cercle C situé sur le plan horizontal, ou plus généralement si la verticale, passant par l'œil et les pieds du spectateur, coupe le plan du cercle C en un point p situé hors de ce cercle, le *tableau* T coupe, en *général*, le cône *visuel* ou *perspectif* $(o, \hat{C})$ suivant une *ellipse* E;

2° Si le point p est (*fig.* D) sur le cercle C et que le *tableau* T soit parallèle au

plan tangent $(\overline{op}, \omega)$ au cône *visuel* ou *perspectif* (o, C), la *perspective* sera toujours un arc de *parabole* E.

3° Et si le point *p* est dans l'intérieur du cercle C (*fig.* E), le *tableau* T coupera toujours le cône *visuel* ou *perspectif* suivant un arc d'*hyperbole* E'.

Nota. Nous avons dit que, dans le *premier cas*, la *perspective* du cercle C était *en général* une ellipse E; c'est que le point *o* sommet du cône *visuel* pouvait être placé, dans certains cas, de manière à ce que la section E fût une *section sous-contraire* dans le cône (o, C), auquel cas la courbe E serait un *cercle* (*).

Lorsque l'on a un *dôme* demi-sphérique, il n'apparaît sous sa véritable forme qu'autant que l'œil du spectateur est placé dans le plan horizontal M qui forme le plan de naissance de la *voûte* sphérique, parce qu'alors le cône tangent Δ, qui est toujours un cône droit, se trouve coupé par le *tableau* (qui est toujours supposé vertical) suivant un *demi-cercle*.

Mais si l'œil du spectateur est au-dessus ou au-dessous du plan de naissance M, le *dôme* sphérique apparaît sous la forme d'un *dôme ellipsoïdal*, parce que le cône de révolution Δ est coupé par le *tableau* T, suivant un arc d'*ellipse* dont le grand axe est précisément situé dans ce plan T.

Nous nous bornerons à ces divers exemples.

TROISIÈME PARTIE.

De l'emploi de la perspective pour la recherche de certaines propriétés géométriques.

§ I.

Les anciens géomètres ont souvent fait usage de la perspective pour démontrer certaines propriétés géométriques, surtout pour les propriétés dites *des transversales*.

Supposons, par exemple, que je veuille démontrer le théorème suivant ;

Étant données (fig. 3) *deux droites* A_2 *et* B_2 *se coupant en un point* p, *et une droite* X, *et sur cette droite un point* d, *si je mène par le point* d *deux droites* D_2 *et* D_2' *coupant les droites* A_2 *et* B_2 *en quatre points sommets d'un trapèze, et si je construis les diagonales* K_2 *et* R_2 *de ce trapèze, ces diagonales iront couper la droite* X *en les points* r *et* k.

Cela fait : *si j'unis le sommet* a_2' *et le point* k, *le sommet* b_2' *et le point* r, *j'aurai les diagonales d'un nouveau trapèze tel que les sommets* a_2'' *et* b_2'' *seront en ligne droite*

(*) Voyez ce que nous avons dit dans les *Compléments de géométrie descriptive*, au sujet des projections *stéréographiques*.

avec le point d, *et que le point* c_2, *en lequel se croisent ces diagonales, sera sur la droite* p_2c_2.

Je prendrai un système analogue, mais assez simple pour que la propriété que je veux démontrer y soit évidente.

Dès lors je supposerai, par exemple, trois droites A, B, C (*fig.* 1), telles que la droite C divise en deux parties égales l'angle (2α) que font entre elles les droites A et B; ensuite je mènerai une suite de droites D, D', D''... parallèles entre elles et perpendiculaires à la droite C. Ces droites D couperont la droite A en les points a, a', a'',... et elles couperont la droite B en les points b, b', b''..., et il est évident que les diagonales des trapèzes $aa'bb'$, $a'a''b'b''$... se croisent en des points c, c', c''..., qui seront en ligne droite avec le point p concours des droites A et B, et que cette droite ($c, c', c'', \ldots p$) ne sera autre que la droite C.

Et il est évident que je puis toujours espacer entre elles les droites D, D', D'',... de manière à ce que les diagonales des trapèzes forment deux faisceaux de droites parallèles, ainsi que le montre la fig. 1.

Cela posé:

Concevons un point o dans l'espace et un plan vertical T_2, et supposons que la fig. 1 soit tracée sur le plan horizontal. Nous considérerons le point o comme l'*œil* du spectateur, et le plan T comme un *tableau* sur lequel on doit faire la *perspective* de la fig. 1 située au *géométral*.

N'est-il pas évident, pourrait-on dire, que le théorème énoncé se trouvera vérifié par la *figure-perspective* que l'on obtiendra?

Cependant il ne faudrait point admettre de suite la démonstration ainsi faite, comme étant *rigoureuse*, car, pour que cette démonstration soit rigoureuse, il faut, quelle que soit la fig. 3 en *perspective*, pouvoir passer à la fig. 1 au *géométral*.

Or, étant donné sur le tableau T trois droites A_2, B_2 et C_2 concourant en un même point, mais arbitraires d'ailleurs, il faudrait chercher la position que l'on devrait donner à l'*œil* o et au plan horizontal, pour que l'on obtînt sur ce plan horizontal (ou au géométral) trois droites A, B, C, telles que la droite C divise l'angle (A, B) en deux parties égales; et il faudrait pouvoir démontrer que cela est toujours possible. Or, c'est ce qui n'est pas; il y aura telle relation de position entre les droites A_2, B_2 et C_2, pour laquelle évidemment on ne pourra pas trouver au *géométral* trois droites A, B, C, telles que la droite C divise en deux parties égales l'angle des droites A et B. On voit donc que, pour démontrer le *théorème* énoncé, on ne peut pas partir de la fig. 1, parce qu'elle ne conduirait qu'à un cas particulier du théorème général.

En sorte que ce qui précède nous apprend qu'il faut, tout en prenant une *figure simple*, sur le *géométral*, la choisir cependant de manière à ce que l'on puisse fa-

cilement, et dans tous les cas, et avec toutes les données possibles, y revenir en partant de sa *perspective*.

Dès lors nous sommes conduit à supposer (*fig.* 2) deux droites A_1 et B_1 et à les couper par deux droites D_1 et D'_1 parallèles entre elles et de direction arbitraire. Les diagonales K_1 et R_1 du trapèze $a_1a'_1b_1b'_1$ se croiseront en un point c_1.

Cela posé :

Nous mènerons par le point a'_1 une droite K'_1 parallèle à K_1, et coupant B_1 au point b''_1, nous mènerons par le point b'_1 une droite R'_1 parallèle à R_1 et coupant A_1 au point a''_1; les droites K'_1 et R'_1 se couperont en un point c'_1.

Cela posé :

Je dis : 1° les points p_1, c_1 et c'_1 sont en ligne droite C_1; 2° les points a''_1 et b''_1 déterminent une droite D''_1 parallèle aux droites D_1 et D'_1.

Et en effet, *par construction* :

1° Les deux triangles $p_1a_1b_1$ et $p'_1a'_1b'_1$ sont semblables ; on a donc :

$$a_1p_1 : a_1b_1 :: a'_1p'_1 : a'_1b'_1. \qquad (1)$$

2° Les deux triangles $a_1c_1b_1$ et $a'_1c'_1b'_1$ sont semblables ; on a donc :

$$a_1c_1 : a_1b_1 :: a'_1c'_1 : a'_1b'_1. \qquad (2)$$

Des proportions (1) et (2) on déduit :

$$a_1c_1 : a_1p_1 :: a'_1c'_1 : a'_1p'_1. \qquad (3)$$

Or la proportion (3) démontre que les trois points p_1, c_1 et c'_1 sont en ligne droite (l'on voit de suite sur la fig. (2) comment l'on déduirait, de ce qui précède, que la droite $a''_1b''_1$ est parallèle aux droites D_1 et D'_1).

Cela dit :

Si l'on place la figure (2) au géométral et qu'on en fasse la perspective, on aura la figure (3), et si l'on prend la figure (3) on pourra toujours passer à la figure (2), et cela sans embarras ; et en effet :

Traçons sur le tableau T deux droites A_2 et B_2 se coupant en un point p_2 (*fig.* 3), et menons une droite X qui soit la ligne d'horizon, et prenons sur cette droite X un point d arbitraire.

Menons par le point d deux droites D_2 et D'_2 coupant A_2 et B_2 en les points a_2 et b_2, a'_2 et b'_2; les droites $a_2b'_2$ (ou K_2), a'_2b_2 (ou R_2), couperont la droite X en les points k et r, et s'entre-couperont en un point c_2.

Menons la droite R'_2 qui unit les points r et b'_2 et coupant A_2 au point a''_2; me-

nons la droite K'_2 qui unit les points k et a'_2 et coupant B_2 au point b''_2; les droites R'_2 et K'_2 se couperont en un point c'_2.

Cette construction effectuée, il faut démontrer ce qui suit :

1° Les points p_2, c_2, c'_2 sont en ligne droite;

2° Les points a''_2, b''_2 et d sont en ligne droite.

Pour effectuer la démonstration passons de la fig. (3) en *perspective* à la fig. (2) au *géométral*.

Le plan géométral sera perpendiculaire au tableau T et parallèle à la ligne d'horizon X; dès lors les droites qui divergent en *perspective* des points k, r et d, donneront au géométral des faisceaux de droites parallèles, et nous retombons évidemment au *géométral* sur la fig. (2), et complétement, avec toute sa construction indiquée ci-dessus; donc, etc.

§ II.

Pour rendre encore plus *sensible* ce qui a été dit ci-dessus, § I (3e partie), prenons un autre exemple.

Je suppose que l'on veuille démontrer la propriété des quadrilatères inscrits et circonscrits à une section conique (*).

Il est évident que ce qu'il y aura de plus simple, et ce qui se présente en effet immédiatement à l'esprit, c'est de prendre un cercle C et des rectangles inscrits et circonscrits à ce cercle C; en sorte que l'on aura une figure plane composée d'un certain nombre de faisceaux de droites parallèles.

Puis, l'on dira : ce cercle C peut être considéré comme la section droite (ou la base) d'un cône Σ droit (ou de révolution); si dès lors on coupe tout le système par un plan P, on obtiendra suivant la direction donnée à ce plan P une section conique E, qui sera ou une *ellipse*, ou une *parabole*, ou une *hyperbole;* et les *rectangles* inscrits et circonscrits au cercle C, deviendront, sur le plan P, des *quadrilatères* inscrits et circonscrits à la section conique E; dès lors l'on pourra énoncer les théorèmes dont jouissent les quadrilatères inscrits circonscrits à une section conique.

Cependant, il ne faut pas beaucoup d'attention pour reconnaître que cette manière de raisonner ne sera admissible qu'autant qu'elle sera rigoureuse, et dès lors à l'abri de toute objection; et elle ne sera rigoureuse qu'autant que, partant de la figure en *perspective* située sur le plan P, on pourra revenir, et toujours, et

---

(*) Voyez le *Cours de géométrie descriptive*, 2e partie.

quelle que soit la forme des quadrilatères inscrits et circonscrits à la section conique E donnée, et quelle que soit cette section conique E, on pourra, dis-je, revenir à la figure du *géométral*, et ainsi à celle du cercle C et de ses rectangles inscrits et circonscrits.

Or : si l'on donne une section conique E et un quadrilatère inscrit à cette courbe et si l'on fait passer par cette courbe E un cône droit (un cône de révolution), il faudra évidemment chercher parmi tous les sommets des cônes droits qui passent par cette courbe E, celui pour lequel le plan de section droite du cône, donnera un rectangle inscrit au cercle qui est cette section droite.

Il faudra donc non-seulement connaître les propriétés des *focales* des sections coniques, il faudra de plus savoir les construire tout en les connaissant, mais encore il faudra *forcément* résoudre *au préalable* un problème assez difficile.

Ne vaut-il pas mieux dès lors partir toujours d'une *figure simple*, mais autre que celle des *rectangles* inscrits et circonscrits à un *cercle*, et ainsi des *parallélogrammes* inscrits et circonscrits à une *ellipse?* car alors on pourra faire passer un cône droit Σ (et le premier venu) par la section conique E donnée, et à laquelle se trouvent inscrits et circonscrits les *quadrilatères*, et l'on pourra toujours couper le cône Σ par un plan Q, de manière à ce que sur ce plan on ait une ellipse E, telle que les *quadrilatères* inscrits et circonscrits de la section conique donnée E se trouvent transformés en *parallélogrammes* inscrits et circonscrits à l'ellipse E.

Quand on lit les anciens auteurs qui se sont servis de la *méthode de la perspective* pour démontrer certaines propriétés des sections coniques (en cherchant *évidemment* à faire passer les propriétés du *cercle* sur les *sections coniques*), on remarque assez souvent un défaut de *rigueur géométrique* dans leurs démonstrations. Ce qui précède montre *pourquoi*.

§ III.

La géométrie descriptive fait très-souvent usage de la méthode *de la perspective;* ainsi étant donnée une fig. (A) sur un plan P, les propriétés de cette fig. (A) étant connues, elle cherche à faire subir à cette fig. (A) toutes les transformations possibles pour lesquelles les mêmes propriétés subsisteront. Pour cela elle conçoit un point *s* dans l'espace (hors du plan P) et elle fait passer par le point *s* et par chaque ligne *droite* de la fig. (A) des *plans*, par le point *s* et par chaque ligne *courbe* de la fig. (A) des *cônes*, par le point *s* et par chaque *point* de la fig. (A) des *droites*, et elle coupe tout le système *conique* et *pyramidal* par un plan Q, dont la direction est arbitraire ou déterminée par les conditions du problème à résoudre et ainsi par la *particularité* de la transformation que l'on veut obtenir relativement à la fig. (A).

Nous avons fait un fréquent emploi de ce *procédé* dans nos ouvrages sur la géométrie descriptive, nous allons en donner encore un exemple ici, car c'est vraiment le lieu, puisque nous nous occupons d'une manière spéciale de la *perspective* et de son utilité comme application à la recherche de certaines *vérités géométriques*.

§ IV.

Dans les *Compléments de Géométrie descriptive*, nous avons démontré le théorème suivant (*) :

Si l'on a une parabole P (fig. 4) *ayant son sommet en* p *et pour axe infini la droite* A, *si l'on prend plusieurs ordonnées* mn, m'n', m''n'',... *et si l'on construit une suite de paraboles* M, M', M'',... *ayant respectivement pour corde*, $\overline{mn}$, $\overline{m'n'}$, $\overline{m''n''}$,... *et chacune tangente en* p *à la parabole* P; *toutes ces paraboles* M, M', M''... *auront, entre elles, une osculation du second ordre au point* p.

Si nous voulons faire passer cette propriété dont jouissent les *paraboles*, sur les autres sections coniques, et ainsi sur les *ellipses* et les *hyperboles*, il faudra concevoir dans l'espace un point *s*, et le regarder comme le sommet commun à divers cônes ayant respectivement pour base les paraboles P et M, M', M'',... et couper tout le système par un plan Q, de manière à obtenir pour sections, dans ces cônes, ou des *ellipses*, ou des *hyperboles*.

Or, si nous considérons le plan des paraboles comme étant le plan horizontal de projection, le plan R, mené par le sommet *s* parallèlement au plan horizontal, sera tangent à tous les cônes paraboliques.

Cela posé :

Il est évident qu'un plan sécant Q coupera tous ces cônes paraboliques ou seulement suivant des ellipses, ou seulement suivant des hyperboles.

En sorte que le système plan, situé sur le plan Q, ne sera composé que d'*ellipses*, ou ne sera composé que d'*hyperboles*, tout comme le système donné sur le plan horizontal n'est composé que de *paraboles*.

Et comme tous les cônes paraboliques ont une osculation du second ordre suivant la génératrice droite *sp* (*fig.* 4), puisque toutes les paraboles qui leur servent de bases respectives ont une osculation du second ordre au point *p*, il s'ensuit que les systèmes, soit d'*ellipses*, soit d'*hyperboles*, situés dans le plan sécant Q, auront aussi une osculation du second ordre en le point suivant lequel la génératrice droite *sp* se trouve coupée par le plan Q.

Nous pouvons donc, d'après ce qui précède, énoncer les *théorèmes* suivants :

(*) Voyez les *Compléments de géométrie descriptive*, § IX, p. 167.

1er THÉORÈME.

Si l'on a une ellipse P_1 (*fig.* 4) rapportée à ses axes, l'ellipse M_1 tangente 1° au sommet p de l'ellipse P_1, tangente 2° en un point à déterminer sur la tangente θ' au second sommet q de l'ellipse P_1, et 3° passant par les extrémités d'une corde m_1n_1 de l'ellipse P_1, aura un contact du premier ordre en p avec l'ellipse P_1; et toutes les ellipses construites comme M_1 auront entre elles une osculation du second ordre au point p.

2e THÉORÈME.

On aura un théorème analogue pour les hyperboles (*fig.* 6).

3e THÉORÈME.

Si l'on a une ellipse P_1 (*fig.* 7) et qu'on lui construise deux tangentes θ et θ', l'une au point p et l'autre au point q (ces deux tangentes se coupant en un point d); si l'on mène la corde pq et du point d une divergente arbitraire, et que l'on construise une ellipse M_1 qui soit: 1° tangente à θ' en un point à déterminer, 2° tangente en p à l'ellipse P_1, et 3° passant par les extrémités m_1n_1 de la partie de la divergente interceptée par la corde pq et l'ellipse P_1, cette ellipse M_1 aura un contact du premier ordre en p avec l'ellipse P_1; et toutes les ellipses construites comme M_1 auront entre elles un contact du second ordre au point p.

4e THÉORÈME.

On aura un théorème analogue pour les hyperboles.

§ V.

Si l'on prend le système composé (*fig.* 4) de la parabole P et des diverses paraboles M,... et qu'on le projette obliquement sur un plan X au moyen de cylindres parallèles entre eux, on obtiendra un nouveau système dans lequel la parabole P′, projection oblique de la parabole P, n'aura plus pour sommet le point p' projection du sommet p de la parabole P.

La tangente θ' en p' à la parabole P′, qui sera la projection de la tangente θ au sommet p de la parabole P, ne sera plus perpendiculaire sur le diamètre A′ de la parabole P′ projection de l'axe A de la parabole P.

On aura donc sur le plan X un système (*fig.* 8) analogue à celui de la fig. 4,

mais ce système sera rapporté à des coordonnées obliques, au lieu d'être rapporté, comme dans la fig. 4, à des coordonnées rectangulaires.

On pourra dès lors, au moyen d'un système de cônes ayant même sommet dans l'espace et ayant pour base les paraboles (*fig.* 8) tracées sur le plan X, obtenir par des sections arbitraires, mais parallèles à la tangente θ' au point p' de la parabole P' (*fig.* 8), le théorème relatif aux *ellipses* (*fig.* 9) et aussi celui relatif aux *hyperboles*, l'ellipse P_1' (ou l'hyperbole P_2') étant rapportée à un système de diamètres conjugués, au lieu d'être rapportée à ses axes comme l'ellipse P_1 (*fig.* 5) (ou l'hyperbole P_2) (*fig.* 6).

§ VI.

En menant un plan parallèle à la tangente θ' de la fig. 8, on obtiendra la fig. 7 relative aux ellipses et celles relatives aux hyperboles, et cela, suivant la direction ou l'inclinaison du plan sécant.

Ainsi l'on voit que les *paraboles* nous donnent les fig. 4 et 8, que les *ellipses* nous donnent les fig. 5, 7 et 9, et que pour les *hyperboles* nous aurions aussi trois figures qui seraient les *analogues* de celles relatives aux ellipses.

D'après ce qui précède, l'on doit tout naturellement se demander si l'on ne peut pas obtenir, pour les *paraboles*, une figre analogue à la fig. 7, laquelle existe pour les *ellipses*.

Pour reconnaître si le théorème relatif aux ellipses et représenté par la fig. 7 peut subsister pour les paraboles, il suffit de prendre la fig. 7 comme étant sur le plan horizontal la base d'un système conique ayant pour sommet un point *s* de l'espace situé hors du plan horizontal et de couper ce système de manière à avoir des paraboles.

Or : tous les cônes à base elliptique (s, P_1) et (s, M_1)... auront une génératrice droite commune *sp*. Toutes les cônes (s, M_1)... auront entre eux un contact du second ordre tout le long de cette génératrice *sp*, et ils n'auront chacun, et suivant cette même génératrice *sp*, qu'un contact du premier ordre avec le cône (s, P_1). Le plan (s, θ') sera tangent à tous les cônes (s, P_1) et (s, M_1)....

Donc, pour couper le système conique suivant des paraboles, il faudra mener un plan sécant Z parallèle au plan (s, θ') ; or, il est bien évident que les courbes de sections ne pourront avoir qu'une seule tangente commune donnée par l'intersection du plan Z et du plan tangent (s, θ), puisque, pour qu'il y eût deux tangentes communes, il faudrait que le plan Z coupât le second plan tangent (s, θ').

Ainsi la propriété représentée par la fig. 7, et qui existe pour les *ellipses*, et aussi pour les *hyperboles*, ne peut exister pour les *paraboles*.

§ VII.

Lorsque l'on met en perspective une droite B située sur le plan *géométral*, on fait passer par l'*œil o* une droite B′ parallèle à B et perçant le *tableau* T en un point b'; et en unissant le point b' avec le point b en lequel la droite B perce le *tableau* T, on a une droite indéfinie B_1 qui est la *perspective* de la droite B.

La droite B′ est divisée en trois parties distinctes, deux parties infinies et une partie finie.

La partie finie est comprise entre l'*œil o* et le point b'.

Les deux parties infinies sont : l'une, la partie qui part de l'*œil o* et qui s'éloigne indéfiniment du *tableau;* et l'autre, la partie qui part du point b' et qui *fuit* derrière le tableau.

La droite B_1, considérée comme ligne droite, est divisée aussi en trois parties : l'une *finie*, comprise entre les points b et b', et les deux autres *indéfinies*, la première située à partir du point b au-dessous du *pied xy* du *tableau*, et la seconde partant du point b'.

Or, à quelles parties de la droite B correspond chacune des trois parties qui composent la droite B_1?

Si par l'*œil o* je mène une droite qui passe par le point de la droite B qui est situé à l'infini derrière le tableau, la perspective de ce point sera le point b'.

Si par l'*œil o* je mène une droite qui passe par le point b de la droite B_1, la perspective de ce point b ne sera autre que ce point b lui-même ; ainsi la partie infinie de la droite B située, à partir du point b, derrière le *tableau*, a pour *perspective* une droite finie $\overline{bb'}$.

Si par l'*œil o* je mène une droite parallèle au *tableau*, et coupant la droite B en un point a, qui sera toujours situé en avant du *tableau*, je vois que la portion finie $\overline{ab}$ de la droite B_1 aura pour *perspective* la portion infinie de la droite B_1 située à partir du point b au-dessous du *pied xy* du *tableau ;* et que la partie infinie de la droite B, qui *fuit* à partir du point a en avant du *tableau*, aura pour *perspective* la partie infinie de la droite B_1 qui *fuit*, à partir du point b', au-dessus de la ligne *xy*.

Cela posé :

Si l'on trace sur le *tableau* deux courbes C et C′ ayant un point commun m situé sur la ligne d'horizon, et qu'on les regarde comme les bases de deux cônes Δ et Δ′ ayant l'*œil o* pour sommet commun, ces deux cônes se couperont suivant une génératrice *om* qui sera horizontale ; dès lors le plan *géométral* coupera les

deux cônes A et A′ suivant deux courbes B et B′, qui auront un point situé à l'infini et qui sera l'intersection de la génératrice *om* et du plan géométral.

Les deux courbes B et B′ auront entre elles une manière d'être, et l'une par rapport à l'autre, en ce point situé à l'infini, manière d'être qui nous sera révélée par la manière d'être, entre elles et au point *m*, des deux courbes C et C′.

Ainsi : 1° si les deux courbes C et C′ se coupent au point *m*, les deux courbes B et B′ tendront à se couper à l'infini ;

2° Si les deux courbes C et C′ ont un contact du premier ordre en le point *m*, les deux courbes B et B′ auront un contact du premier ordre à l'infini ;

3° Si les deux courbes C et C′ ont un contact du deuxième ordre en le point *m*, les deux courbes B et B′ auront un contact du deuxième ordre à l'infini, etc., etc.

On voit donc, par ce qui précède, qu'au moyen de la perspective, on peut amener un point situé à l'infini sur le plan *géométral*, en un point situé à distance finie sur le *tableau*, et que ce point sera toujours situé sur la ligne d'*horizon*.

Dès lors on conçoit de quelle utilité peut être la perspective, pour connaître la manière d'être entre elles des lignes courbes situées sur un même plan et qui passent par un même point situé à l'infini.

Nous allons appliquer ce qui vient d'être dit à la recherche de quelques propriétés relatives aux sections coniques.

§ VIII.

Plaçons la fig. 7 sur le *tableau*, de manière à ce que le point *p* soit sur la ligne d'*horizon*.

On pourra donner à la fig. 7 deux positions : ou 1° la tangente θ se confondra avec la ligne d'horizon, ou 2° la tangente θ sera inclinée par rapport à la ligne d'horizon.

Dans le premier cas, les sections faites par le plan *géométral* dans les divers cônes ayant l'*œil o* pour sommet commun et pour bases les diverses ellipses P_1 et M_1, M_1', M_1'',... seront des paraboles.

Dans le deuxième cas, les sections faites par le plan géométral dans les divers cônes seront des hyperboles qui auront une asymptote commune, laquelle sera donnée par l'intersection du plan géométral et du plan (o, θ) tangent à tous les cônes suivant la génératrice (o, p) qui leur est commune.

Dans le *premier cas*, toutes les paraboles intersections du plan géométral et des cônes (o, M_1), (o, M_1'), (o, M_1''),... auront un contact du second ordre à l'infini, et ce contact aura lieu pour chaque arc infini.

Dans le *deuxième cas*, toutes les hyperboles sections faites par le plan géométral

dans les cônes (o, M_1), (o, M_1'), (o, M_1''),... auront un contact du second ordre à l'infini, et seulement entre les arcs qui ont même asymptote.

Il sera facile de construire l'épure et d'énoncer divers théorèmes. Ainsi, pour les paraboles, on voit de suite que l'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME.

Étant donnée une parabole P_1' (*fig.* 10), une tangente θ' en un point p' de cette courbe et son diamètre infini A' passant par le point de contact p'; menant une suite d'ordonnées $m'n'$, $m''n''$,... parallèles à la tangente θ'; prenant les points milieux q', q''... de ces ordonnées, et menant par ces points des droites B', B'',... parallèles entre elles et au diamètre A', ces droites B', B''... couperont la tangente θ' en les points r', r''... Cela posé : si l'on construit une suite de paraboles N', N'',... respectivement tangentes à la droite θ' en les points r', r'',... et ayant respectivement pour *cordes* les ordonnées $m'n'$, $m''n''$,... toutes ces paraboles auront entre elles un contact du second ordre à l'infini, et ce contact aura lieu pour l'un et l'autre arc infini, et ainsi pour les arcs situés à droite, comme pour les arcs situés à gauche.



LIVRE III.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE A LA GNOMONIQUE.

DE LA GNOMONIQUE.

(MÉMOIRE INÉDIT.) (*)

§ I.

Le mouvement continuel du soleil autour de la terre ne se fait pas journellement dans le même plan; on voit à l'œil simple que, pendant six mois de l'année, il décrit des arcs diurnes continuellement plus près des points du ciel les plus élevés, et que, pendant les six autres mois, il décrit des arcs diurnes qui se rapprochent, au contraire, de l'horizon. Mais on suppose, sans beaucoup d'erreur, dans la gnomonique, que les différents cercles dans lesquels le soleil se meut sont parallèles entre eux. Celui de ces cercles qui est moyen entre celui qui s'éloigne le plus de l'horizon et celui qui s'en éloigne le moins, est nommé l'*équateur*. La ligne perpendiculaire aux cercles que le soleil semble décrire chaque jour se nomme l'*axe du monde*, parce qu'en effet tous les astres paraissent faire leurs révolutions autour de cette ligne. Les extrémités en sont les *pôles* : on les suppose dans la surface de la même sphère dont l'équateur est un des grands cercles.

(*) Ce mémoire fait partie des manuscrits de la bibliothèque de l'École d'application de Metz.

On pense qu'il est de l'abbé Bossut, ou tout au moins qu'il en a rédigé une partie. Au reste, il est certain que ce mémoire a été écrit pour l'instruction des jeunes officiers, élevés à l'École du génie de Mézières.

Je m'empresse ici d'adresser mes remerciements à M. le général d'artillerie Pion, commandant de l'École d'application de Metz, qui a eu l'extrême obligeance de me faire faire une copie *collationnée* de ce mémoire et des dessins qui l'accompagnent.

Quant aux deux mémoires de G. Monge et au petit traité des ombres publié dans le livre premier (ci-dessus) sous le n° 1, j'en avais pris *copie* dès 1818, alors que j'étais attaché à l'École d'application de Metz, comme lieutenant d'artillerie à l'état-major. T. O.

La quantité dont le soleil se trouve éloigné de l'équateur se nomme la *déclinaison du soleil;* elle est mesurée dans l'arc perpendiculaire à l'équateur passant par le pôle et par le soleil, en sorte que la distance du soleil au pôle le plus voisin est le complément de sa déclinaison.

On suppose que le centre de la terre est au centre de la sphère céleste, et par conséquent au centre de l'équateur; la section de la surface de la terre par le plan de ce cercle est nommé l'équateur terrestre : on voit aisément que la déclinaison du soleil peut être mesurée par l'angle formé par deux lignes partant du centre de la terre et allant l'une au soleil et l'autre au point de l'équateur qui répond perpendiculairement à cet astre; de manière que ce point, l'astre et le pôle soient dans le même grand cercle de la sphère céleste.

L'équateur se nomme aussi le cercle équinoxial, parce que l'arc diurne est évidemment alors égal à l'arc nocturne, puisque l'horizon coupe ce cercle en deux parties égales.

Les cercles extrêmes du mouvement du soleil sont nommés tropiques; on les nomme aussi solstices, parce que le soleil s'arrête là dans son mouvement progressif vers le pôle voisin pour retourner vers le pôle opposé.

Le soleil ne passe pas tout d'un coup du plan du cercle qu'il a décrit la veille au cercle qu'il décrit dans le jour même; son mouvement vrai trace, au lieu de cercles perpendiculaires, une espèce de spirale qui s'étend de l'équateur aux solstices et qui recommence des solstices vers l'équateur; en sorte que, dans le vrai, l'axe du monde n'est pas perpendiculaire au plan dans lequel se fait le mouvement du soleil, puisque le soleil passe continuellement d'un plan dans un autre; il faut en excepter les cercles des solstices, où le soleil reste deux ou trois jours sans que l'on aperçoive aucune variation dans sa déclinaison : les cercles des solstices sont donc les seuls perpendiculaires à l'axe du monde. C'est aussi dans le temps que le soleil s'y trouve, que l'on peut faire des observations justes pour la construction des cadrans : dans tout autre temps, ces observations sont sujettes à quelques corrections dépendantes de la variation de la déclinaison du soleil.

§ II.

Fig. 1. Le plan circulaire du mouvement du soleil étant perpendiculaire à l'axe du monde, et sa révolution s'accomplissant en vingt-quatre heures : si on imagine un cercle XII, XI, X, IX, dont la circonférence entière soit divisée en vingt-quatre parties, c'est-à-dire en parties de 15 degrés chacune, et que l'on place ce cercle de manière que l'axe du monde lui soit perpendiculaire et passe par son

centre, les points de division de la circonférence de ce cercle répondront aux points du grand cercle que décrit le soleil.

Si l'on suppose, outre cela, que l'axe du monde est une ligne ou plutôt une verge opaque, on verra que le soleil étant aux points 12, 11, 10, etc. de la circonférence qu'il parcourt, l'axe R portera son ombre aux points diamétralement opposés XII, XI, X, etc.; en sorte que le cercle XII, XI, X, divisé et placé comme nous l'avons dit, formerait un cadran solaire sur lequel une subdivision plus détaillée ferait voir toutes les heures et les parties de ces heures.

§ III.

C'est sur ces notions qu'est fondée toute la gnomonique, et la grande distance du soleil à la terre permettant de prendre pour l'axe du monde une ligne quelconque, qui lui est parallèle, à la surface de la terre, cette science se réduit à fixer la position de cette ligne et à déterminer ensuite les points où se porte son ombre dans les différentes heures du jour sur des plans ou sur des surfaces situées d'une manière quelconque à l'égard de cette ligne.

§ IV.

Si l'on imagine un grand cercle de la sphère céleste passant par les pôles du monde et perpendiculaire à l'horizon, ce cercle, que l'on nomme le *méridien du lieu*, coupera l'arc diurne du soleil au point le plus élevé de cet arc; et si l'on détermine la section du méridien avec l'horizon, on sera assuré que l'axe du monde sera placé dans le plan élevé verticalement sur elle. Cette section du méridien et du plan horizontal se nomme le méridien du lieu.

§ V.

Première méthode pour tracer une méridienne.

Si on élève un gnomon perpendiculairement au plan horizontal, le point déterminé par la plus courte ombre portée par ce gnomon répondra au point de la plus grande hauteur du soleil sur l'horizon. On entend par la longueur de l'ombre la distance du point où se porte l'ombre sur le plan horizontal au pied du gnomon, c'est-à-dire au point de ce plan qui répond verticalement au gnomon. Or le point de la plus grande hauteur du soleil et le point du gnomon portant l'ombre sont dans le méridien suivant la définition de ce cercle (§ IV). Ainsi le point d'ombre marqué sur le plan horizontal sera aussi dans le méridien; et puisque le

pied du gnomon est aussi dans le méridien, il s'ensuit que la ligne tirée du pied du gnomon au point déterminé par l'autre la plus courte est la section commune au méridien et au plan horizontal ou la méridienne du lieu (§ IV).

Deuxième méthode pour tracer une méridienne.

Puisque le méridien est perpendiculaire au cercle que décrit le soleil et qu'il divise l'arc diurne en deux parties égales, parce qu'il est en même temps perpendiculaire à l'horizon, il est clair que le soleil aura des hauteurs égales au-dessus de l'horizon, lorsqu'il se trouvera à des distances égales du méridien; et, réciproquement, il sera à des distances égales du méridien, lorsqu'il aura des hauteurs égales au-dessus de l'horizon. Ainsi, en observant dans un même jour deux lignes d'ombre égales portées par un gnomon, la ligne qui divisera en deux parties égales l'angle formé par ces deux lignes d'ombre sera la section du méridien et du plan horizontal, ou la méridienne.

Pour observer deux lignes d'ombre égales, on trace, sur le plan horizontal du pied du gnomon pour centre, un arc de cercle passant par un point d'ombre observé avant que le soleil soit parvenu au méridien, et l'on marque le point où l'ombre recoupe le même arc lorsque le soleil s'éloigne du méridien.

La portion de l'arc comprise entre les deux points d'ombre ainsi déterminés étant divisée en deux parties égales par une ligne menée au pied du gnomon, cette ligne sera la méridienne.

§ VI.

Ces deux méthodes pour tracer une méridienne ne sont ni l'une ni l'autre parfaitement exactes.

Pour la première, la longueur de l'ombre varie si insensiblement au moment où le soleil est voisin du méridien, qu'il est très-difficile de marquer le point où la plus courte ombre se porte, à moins d'un gnomon fort élevé, ce qui n'est pas à la portée de tout le monde et qui demande une attention infinie pour le placer, pour en déterminer le pied et pour s'assurer que le grand plan sur lequel se porte l'ombre est bien horizontal.

La deuxième méthode suppose que la déclinaison du soleil est restée la même pendant qu'il a été aux deux points de la circonférence qu'il parcourt et desquels il a marqué les points d'ombre observés. Mais cette supposition n'est vraie que dans le temps des solstices (§ I) : ainsi, si l'on voulait beaucoup d'exactitude dans la méridienne tracée suivant cette méthode dans tout autre temps, il faudrait y faire entrer une correction dépendante du changement de la déclinaison du soleil.

Il est clair, en effet, que si la déclinaison a augmenté dans l'intervalle de la pre-

mière à la deuxième observation, le soleil arrivera à une hauteur égale à celle qu'il avait au moment de la première observation, quoiqu'il se soit éloigné du méridien vers le couchant d'une plus grande quantité que celle dont il s'en trouvait éloigné vers l'orient dans le premier instant. Ainsi la ligne méridienne tracée par cette méthode retardera l'heure de midi; elle l'avancera au contraire, par une raison semblable, si la déclinaison a diminué dans l'intervalle de la première à la deuxième observation.

§ VII.

Ayant ainsi déterminé le plan du méridien dans lequel nous avons vu que doit se trouver l'axe du monde, il faut aussi trouver dans ce plan les pôles du monde, et la position de l'axe sera fixée.

Si dans le triangle rectangle CPO, formé par la hauteur CP du gnomon et par la plus courte ombre PO (§ V), on calcule l'angle COP, on aura l'arc SR de la surface céleste qui marquera l'élévation du soleil à midi au-dessus de l'horizon. Son complément ZS ou l'angle PCO sera la distance du soleil au zénith ou au point de la surface de la sphère céleste élevé verticalement au-dessus du lieu où se fait l'observation. Fig. 2.

La même observation étant faite tous les jours de l'année, on verra que cette hauteur RS augmente depuis la fin du mois de décembre jusqu'à la fin du mois de juin, et qu'elle diminue ensuite dans les six mois restant dans les contrées situées au nord de la terre, le contraire arrive pour les contrées situées au midi.

La hauteur moyenne entre la plus grande et la moindre, qui sont regardées comme constantes, détermine le point où le soleil est à égales distances des deux pôles, c'est, suivant ce que nous avons dit (§ I), un point de l'équateur. On trouve dans les tables des astronomes et même dans les almanachs, sous le nom de déclinaison du soleil, la distance du soleil, pour chaque jour de l'année, à ce point de l'équateur.

Soit L*ehorn* la section du globe terrestre par le méridien EPRO; L le point où est l'observateur, HI sera l'horizon. Mais, à cause de l'immense éloignement du soleil, nous pouvons supposer le rayon CL de la terre nul et prendre, au lieu de l'horizon HI, le diamètre MN qui lui est parallèle, et confondre le point L avec le centre C de la terre. Soit ER le diamètre de l'équateur dans le plan du méridien, le diamètre PO perpendiculaire à ER sera l'axe du monde. Ainsi, si par l'observation du soleil, nous parvenons à fixer le point E ou le diamètre ER, il n'y aura plus qu'à lui mener une perpendiculaire pour fixer la position de l'axe du monde; or, si l'on ajoute à la distance LS du soleil au zénith observée comme nous l'avons Fig. 3.

dit ou d'une autre manière quelconque, la déclinaison ES donnée par le jour où se fait l'observation, on aura la distance EZ de l'équateur au zénith; c'est ce qu'on nomme la latitude du lieu. Elle est égale à la hauteur NP du pôle au-dessus de l'horizon; car si, de chacun des deux angles droits ECP, ZCN, on retranche le même angle ZCP, on aura ECZ = PCN ou EZ = PN. Ainsi, l'observation qui fera connaître la distance ZS du soleil au zénith suffira pour déterminer la hauteur du pôle sur l'horizon du lieu.

En disant qu'il faut ajouter à la distance ZS du soleil au zénith la déclinaison SE on suppose que cette déclinaison est du même côté de l'équateur que le lieu où se fait l'observation; car si cet astre était d'un côté opposé, il faudrait retrancher la déclinaison de la distance du zénith au soleil pour avoir la distance du zénith à l'équateur. D'ailleurs la latitude ou la hauteur du pôle du lieu où l'on est, est ordinairement connue, au moins par approximation, avec des lieux voisins, et l'opération dont nous venons de parler comme propre à la déterminer n'est rapportée ici que pour faciliter l'intelligence de ce qui doit suivre.

§ VIII.

Nous avons supposé que le plan sur lequel on avait à tracer une méridienne, et au-dessus duquel il fallait fixer l'élévation du pôle, était horizontal : mais il est clair que tout ce qui a été dit (§ IV, V, VI et VII) pour un plan de cette espèce peut s'appliquer à tout autre plan, quelle que soit sa situation. Ce plan aura un plan parallèle horizontal pour quelque point de la terre, et les opérations que l'on ferait en cet endroit sur ce plan, au moyen de lignes verticales et horizontales, en suivant ce qui a été dit précédemment, auraient le même résultat que celles que l'on ferait ailleurs sur un plan qui serait parallèle à celui dont nous venons de parler, au moyen des lignes perpendiculaires à ce plan et des lignes tracées sur ce plan même.

On peut donc, par les méthodes que nous avons données, tracer une méridienne sur un plan quelconque, au moyen de la courte ombre portée par un gnomon sur ce plan ou par des lignes d'ombre égales (§ IV et V), on trouvera aussi l'élévation du pôle sur ce plan par la plus courte ombre.

§ IX.

Si l'on trouvait zéro pour la hauteur du pôle sur le plan, cela prouverait que la méridienne tracée sur le plan est elle-même parallèle à l'axe du monde.

§ X.

Dès que la méridienne sera tracée sur le plan où doit être tracé un cadran solaire, au moyen de l'élévation connue du pôle, on placera au-dessus de cette ligne, dans le plan perpendiculaire au plan du cadran, une ligne ou verge qui soit inclinée sur la méridienne conformément à l'élévation du pôle; c'est-à-dire que si AB est la méridienne, il faudra placer la ligne AC dans le plan perpendiculaire au plan du cadran, de manière que l'angle BAC soit égal à l'élévation du pôle sur ce dernier plan, et qu'elle soit dirigée vers le pôle. La ligne AC (*fig.* 4) ou une partie CE de cette ligne (*fig.* 5), ou un point C de cette ligne (*fig.* 6) serviront à porter l'ombre qui doit marquer les heures sur le cadran. Fig. 4, 5, 6.

§ XI.

La ligne AB étant la méridienne du plan, et AC étant placé au-dessus de cette ligne, dans un plan perpendiculaire au plan du cadran, pour tracer les lignes horaires, on mènera CB perpendiculairement à AC, qui rencontrera la méridienne en un point B; par ce point B l'on mènera dans le plan du cadran la ligne TZ perpendiculaire à la méridienne, puis ayant prolongé AB d'une quantité BE=CB: du point E, comme centre, on décrira la circonférence WBF, que l'on divisera en douze parties égales aux points B, L, K, I, H, etc., et l'on tirera aux points de division les rayons EB, EL, etc., qui couperont par leurs prolongements la ligne TZ aux points M, N, O, etc., par les points ainsi déterminés sur cette ligne, et par le point A, on tirera les lignes AM, AN, AO, etc., qui seront les lignes horaires que le style AC marquera par son ombre entre 6 heures du matin et 6 heures du soir, et en prolongeant ces lignes au delà du point A, les prolongements marqueront les heures qui précèdent ou qui suivent celles dont nous avons parlé, de manière que la ligne de 7 heures du soir, par exemple, sera marquée par le prolongement de la ligne de 7 heures du matin. La ligne VI—A—VI, menée par le point A perpendiculairement à la méridienne, sera la ligne de 6 heures du matin au côté occidental et du soir au côté oriental. Fig. 7.

Pour entendre cette construction : sur le diamètre WF prolongé des deux côtés et du point E comme centre, avec un rayon E—12, que l'on imaginera infiniment grand, soit décrite la circonférence 6—12—6 : les rayons EL, EK, EI, etc., prolongés, la rencontreront et la diviseront en douze parties égales aux points 11, 10, 9, etc. Cela posé, imaginons le plan des deux demi-cercles WBF et 6—12—6 relevé et appliqué perpendiculairement à la ligne AC, aussi relevée sur AB, le

point E sur le point C, et le rayon BE sur BC. Il est clair que AC étant, comme nous l'avons dit, parallèle à l'axe du monde, on peut supposer que le point C est au centre du mouvement du soleil que l'on imagine se faire dans la circonférence 6—12—6 : à midi le soleil sera au point 12, dans les 6 heures précédentes il sera trouvé aux points 6, 7, 8, 9, 10, 11, et dans les 6 heures suivantes il se trouvera aux points 1, 2, 3, 4, 5 et 6, en sorte que si le point C est opaque, il portera son ombre à midi au point B du cadran ; à onze heures, au point M de ce plan fixé par les rayons en lignes droites 11 — E et EM ; à dix heures, au point N ; ainsi des autres. A midi, il portera également son ombre aux points correspondants de la ligne BT, et lorsque le soleil sera au point 6, l'ombre du point C se portera à une distance infinie sur la ligne TZ, en sorte que la ligne A — VI, menée par le point A à ce point d'ombre, sera parallèle à TZ.

Mais l'ombre portée par le point A du style, qui est dans le plan du cadran, passera nécessairement à ce point pour toutes les heures. Il s'ensuit donc que l'ombre portée par le style AC sera sur les lignes AM, AN, AO, etc. dans les différentes heures du jour, depuis six heures du matin jusqu'à six heures du soir.

Quant aux autres heures, il est clair qu'elles sont marquées par les prolongements des premiers ; car le soleil est placé, par exemple, à huit heures du soir, relativement à l'axe, comme il l'est à huit heures du matin, mais du côté opposé. On se convaincra encore mieux de cela en achevant les cercles dont 6 — 12 — 6 et WBF sont les moitiés.

§ XII.

La construction que l'on vient d'expliquer est difficile à exécuter dans les grands cadrans et sujette à de grandes inexactitudes, à cause des intersections obliques aux points éloignés de la méridienne. Il est bien plus aisé et plus sûr de calculer les angles BAM, BAN, etc. que les lignes horaires doivent faire avec la méridienne et de les rapporter ensuite sur le plan.

Or, dans le triangle rectangle BAC, on a : $AB = \frac{CB \times B}{\sin BAC}$; dans le triangle BEP, aussi rectangle, on a :

$$PB = \frac{EB \times \operatorname{tang} BEP = BC \times \operatorname{tang} BEP}{R}$$

dans le triangle rectangle BAP, on a : $\operatorname{tang} BAP = \frac{R \times PB}{AB}$; ou, en mettant les valeurs trouvées pour BP et pour AB :

$$\operatorname{tang} BAP = \frac{\operatorname{tang} BEP \times \sin BAC}{R}$$

C'est-à-dire que *la tangente de l'angle qu'une ligne horaire quelconque fait avec la méridienne est égale au produit fait de la tangente de l'arc de l'équateur qui répond à l'heure dont il s'agit par le sinus de la hauteur du pôle sur le plan, divisé par le rayon.*

Si l'on veut trouver par exemple la ligne de trois heures et demie du soir et de huit heures et demie du matin, en se servant des logarithmes, on sait que trois heures et demie répond à un arc de 52° 30′ de l'équateur, à raison de 15° pour une heure, ainsi on ajoutera le logarithme de la tangente 52° 30′ au logarithme du sinus de l'angle de hauteur du pôle, et on retranchera de leur somme le logarithme du rayon : cette dernière opération se réduit à retrancher 10 de la caractéristique trouvée pour la somme des deux autres logarithmes.

§ XIII.

Lorsqu'on aura calculé suivant la manière précédente les angles 12 — A — 1, 12 — A — 2, etc., que les lignes horaires font avec la méridienne, au lieu de rapporter ces angles sur le plan du cadran, au moyen d'un rapporteur, il sera plus sûr de calculer les distances 12 — 1, 12 — 2, etc., prises sur la ligne perpendiculaire à la méridienne. Pour cela, on prendra à volonté la longueur de la ligne A — 12 qui fixe la longueur du cadran, ou la ligne A — 6 qui fixe sa largeur. Fig. 8.

§ XIV.

Si, au lieu d'un style entier, on ne voulait en employer qu'une partie, comme dans la fig. 9, ou si l'on voulait seulement se servir du trou d'une plaque pour marquer les heures, comme dans la fig. 10, le centre A se trouverait hors du cadran, mais la méridienne A — 12 du plan étant tracée et la hauteur BAC du pôle déterminée, on calculerait également les angles 12 — A — 1, 12 — A — 2, etc. que les lignes horaires doivent faire avec la méridienne; puis, abaissant du centre de la plaque la perpendiculaire CO que l'on mesurerait, au moyen de cette ligne et de l'angle BAC de hauteur de pôle, on calculerait la distance OA du point O au centre A du cadran, dans le plan supposé prolongé; ensuite, fixant les limites du cadran à la longueur prise à volonté MN et à la largeur aussi choisie EF ou GH, on mesurerait les deux lignes OM et ON. L'une de ces lignes, ajoutée à OA, et l'autre en étant retranchée, déterminerait les lignes AN et AM avec ces lignes et les angles calculés N-A-11, N-A-10, N-A-9, etc., on trouverait les longueurs des lignes N-11, N-10 d'un côté du cadran et des lignes M-11, M-10, etc., du haut du cadran. Les lignes telles que A-9, terminées aux côtés du cadran, seraient tracées Fig. 9 et 10.

en déterminant la ligne G-9 au moyen de AG et de l'angle G-A-9 complément de l'angle calculé M-A-9 ; puis, en retranchant de cette ligne G-9 la longueur AM, on aurait la longueur de E-9, ce qui fixerait sur le cadran le point 9.

Fig. 9. Dans le cas où l'on ne voudrait employer qu'une partie RC de l'axe, on supposerait OC de longueur convenable et prise à volonté, avec cette ligne et l'angle de hauteur de pôle BAC, on calculerait AO. Puis, prenant OK de grandeur proportionnée à la partie RC de style que l'on veut employer, on calculerait, au moyen de AK = AO — KO et de l'angle BAC, la ligne KR : cette ligne et la ligne OC serviront à placer la partie RC de style dans sa vraie situation au-dessus de la méridienne. On trouverait d'ailleurs, comme dans le cas précédent, les lignes horaires en partant du point O et mesurant les lignes ON et OM de longueur du cadran, et sa largeur EF = GH.

§ XV.

Fig 7. AC étant l'axe du cadran, AP une des lignes horaires qui répond à l'arc BH de l'équateur, en sorte que si AP est, par exemple, la ligne de huit heures du matin ou de quatre heures du soir, l'arc BH soit de 60° à raison de 15° pour une heure, il est facile de déterminer l'angle que l'axe fait avec cette ligne, dès que l'on connaît l'angle BAC, c'est-à-dire l'élévation du pôle sur le plan.

Imaginons une ligne menée du point C du style au point P, elle sera, par construction, égale à EP. Cela posé dans le triangle rectangle BAC :

$$AC = \frac{AB \times \text{cos élév. du pôle}}{R}$$

et

$$BC = BE = \frac{AB \times \text{sin élév. du pôle}}{R}$$

et dans le triangle EBP rectangle en B, on a :

$$EP = CP = \frac{BE \times R}{\cos BEP} = \frac{AB \times \text{sin élév. du pôle}}{\cos BEP}$$

et dans le triangle ACP rectangle en C :

$$\text{tang}\, CAP = \frac{CP \times R}{AC}$$

ou en mettant les valeurs de CP et de AC :

$$\text{tang}\, CAP = \frac{R \times \text{sin élév. du pôle}}{\cos BEP \times \text{cos élév. du pôle}}$$

Mais le sinus d'un angle divisé par son cosinus est égal à la tangente de cet angle divisée par le rayon ; ainsi on aura :

$$\text{tang CAP} = \frac{\text{R} \times \text{tang élév. du pôle}}{\text{cos BEP}}$$

C'est-à-dire que *la tangente de l'angle qu'une ligne horaire quelconque fait avec l'axe est égale au rayon, multiplié par la tangente de la hauteur du pôle sur le plan et divisé par le cosinus de l'arc de l'équateur qui répond à cette ligne horaire.*

§ XVI.

Si le soleil restait constamment dans l'équateur, l'ombre du point C de l'axe se porterait toujours sur le point correspondant P de la ligne TZ perpendiculaire à AB ; mais comme il s'écarte du plan de ce cercle, tantôt en s'approchant de l'un des pôles, tantôt en s'approchant de l'autre, l'ombre du point C se portera en des points P de la ligne AP, tantôt plus près, tantôt plus loin du point A, suivant la déclinaison du soleil. De manière que si AC représente l'axe, PAC l'angle qu'il fait avec une des lignes horaires ; et que PCQ représente la déclinaison du soleil, il est clair que l'angle ACQ sera égal à un droit, plus ou moins la déclinaison ; et puisque l'angle PAC est connu (§ XV) et que l'on peut mesurer ou calculer AC, on pourra déterminer le côté AQ, et l'on aura $\text{AQ} = \frac{\text{AC} \times \sin \text{ACQ}}{\sin \text{Q}}$. Mais sin ACQ = cos PCQ, et l'angle Q étant le supplément de la somme faite de l'angle CAQ et ACQ, ou le supplément de l'angle PAC, plus l'angle droit ACP, plus ou moins la déclinaison PCQ, il s'ensuit *que la distance du centre du cadran au point d'ombre porté par un point connu du style sur une ligne horaire quelconque est égale à la longueur de l'axe comprise entre le centre et le point portant l'ombre, multipliée par le cosinus de la déclinaison du soleil, divisée par le sinus de la somme faite de l'angle que l'axe fait avec la ligne horaire* (§ XV) *et de l'angle droit, plus ou moins la déclinaison du soleil.*

§ XVII.

C'est par le moyen de ce qui a été dit (§ XV et XVI), que l'on peut marquer l'ombre portée par un point déterminé du style sur le cadran dans un instant pris à volonté, tel que l'entrée du soleil dans les signes du zodiaque, les jours caniculaires, etc. ; mais c'est charger les cadrans de lignes inutiles.

§ XVIII.

Telle est la manière de tracer un cadran sur un plan quelconque, lorsque l'on connaît sa méridienne et la hauteur du pôle au-dessus de ce plan. Mais la méridienne du plan ne sera la même que la méridienne du lieu, que dans le cas où le plan sera horizontal, ou lorsque la section de ce plan avec le plan horizontal sera perpendiculaire à la méridienne horizontale. Dans tout autre cas, la méridienne du plan, tracée comme nous l'avons dit (§ V et VI), ne coïncidera pas avec la méridienne du lieu ; et le cadran ainsi tracé ne pourrait servir que pour les points de la terre où ce plan se trouverait horizontal, ou placé comme nous l'avons dit relativement à la méridienne horizontale. Mais, sans rien changer à la manière de le construire, on parvient facilement à le tracer de manière qu'il indique les heures du lieu même.

Suivant ce que nous avons dit (§ IV), le méridien du lieu est un grand cercle de la sphère, perpendiculaire à l'équateur et au plan dont il est le méridien ; en sorte que la quantité de temps dont ces deux méridiens diffèrent, et qui est exprimée par le temps que le soleil, supposé dans l'équateur ou dans des cercles parallèles, emploie à passer de l'un à l'autre ; cette différence, dis-je, sera égale à l'arc de l'équateur compris entre les deux méridiens. Nous verrons la manière de déterminer cette différence pour les différentes situations des plans, mais nous allons voir d'abord comment on peut faire usage de cette différence des méridiens pour tracer les heures du lieu sur un plan dont la méridienne, que l'on nomme alors *soustylaire*, est différente de la méridienne du lieu.

§ XIX.

Soustylaire.

Si le plan est oriental, c'est-à-dire si la ligne menée perpendiculairement à la section de ce plan avec un plan horizontal est dans la partie de l'orient, il sera midi au plan avant qu'il ne soit midi pour le lieu de toute la quantité marquée par la différence des méridiens; et, au contraire, si le plan est occidental, mais cette différence étant un arc de l'équateur, il est clair que si dans la formule du § XII on met la différence des méridiens pour l'arc de l'équateur qui convient à l'heure cherchée, le résultat que l'on trouvera sera la tangente de l'angle que la ligne de midi du lieu fera avec la soustylaire du plan ; cet angle sera placé vers l'orient, relativement à la soustylaire, si le plan est oriental, et vers l'occident s'il est occidental.

On trouvera avec la même facilité les lignes des autres heures sur le plan, en combinant la différence des méridiens avec l'arc de l'équateur qui convient à l'heure cherchée. Nous allons en appliquer la méthode à un exemple : supposons un plan tourné vers l'orient, de manière que la différence de son méridien avec le méridien du lieu soit de deux heures vingt-cinq minutes ou de 30° 15′ pris sur l'équateur, il sera quatorze heures vingt-cinq minutes au plan ou deux heures vingt-cinq minutes du soir lorsqu'il sera midi pour le lieu ; ainsi en mettant l'arc de l'équateur qui convient à deux heures vingt-cinq minutes, nous déterminerons la ligne de midi du lieu. Pour tracer la ligne qui marquera une heure du soir pour le lieu, il faudra mettre l'arc de l'équateur qui répond à trois heures vingt-cinq minutes *des autres heures du soir, en ajoutant toujours la différence des méridiens à l'heure cherchée.*

Pour les heures du matin remarquons que la ligne d'onze heures du lieu répond à un arc de 15° de l'équateur, ou est éloigné de la méridienne du lieu d'une heure ; or la soustylaire en est elle-même éloignée de deux heures vingt-cinq minutes, ainsi en cherchant la ligne qui convient à l'éloignement de deux heures vingt-cinq minutes, de une heure, ou à l'éloignement d'une heure vingt-cinq minutes, on aura la ligne de onze heures.

La ligne de neuf heures du matin est éloignée de trois heures de la ligne de midi du lieu, or la soustylaire en est aussi éloignée de deux heures vingt-cinq minutes, ainsi la ligne de neuf heures du lieu sera éloignée de la soustylaire de trois heures moins deux heures vingt-cinq minutes, ou de trente-cinq minutes. Ainsi en mettant dans la formule l'arc de l'équateur qui répond à trente-cinq minutes de temps, on aura au résultat l'angle que la ligne de neuf heures du lieu doit faire avec la soustylaire, en sorte que l'*arc de l'équateur qu'il faut faire entrer dans la formule* (§ XII) *pour avoir les heures du matin du cadran déclinant à l'orient, est toujours la différence qu'il y a entre l'arc de l'équateur qui répond à l'heure cherchée à raison de* 15° *par seconde et l'arc de l'équateur qui exprime la différence des méridiens du lieu et du plan. Lorsque le premier de ces arcs est moindre que l'autre, la ligne qui doit marquer l'heure sera vers l'orient relativement à la soustylaire; elle sera au contraire vers l'occident si le premier de ces deux arcs est le plus grand.*

Supposons maintenant que la déclinaison est occidentale et de deux heures vingt-cinq minutes : elle sera éloignée de deux heures vingt-cinq minutes du méridien du lieu quand il sera midi pour le plan ; ainsi en faisant entrer dans la formule (§ XII) l'arc de l'équateur qui convient à deux heures vingt-cinq minutes ou 36° 15′, c'est-à-dire la différence des méridiens, on aura au résultat l'angle que la ligne de midi du lieu doit faire avec la soustylaire.

A onze heures du matin le soleil sera éloigné du méridien du lieu de 15° degrés

ou d'une heure, ainsi il sera éloigné du méridien du plan d'une heure, plus deux heures vingt-cinq minutes, ou de trois heures vingt-cinq minutes; ainsi en faisant entrer dans la formule (§ XII) l'arc de l'équateur qui convient à trois heures vingt-cinq minutes, on déterminera l'angle que la ligne de onze heures, pour le lieu, doit faire avec la soustylaire du plan.

Et généralement pour les heures du matin à tracer sur un plan tourné vers l'occident, il faut faire entrer dans la formule (§ XII) *l'arc de l'équateur qui répond à la somme faite de la différence des méridiens, et de l'arc qui répond à l'heure cherchée.*

On trouvera par un raisonnement semblable que l'*arc de l'équateur qu'il faut faire entrer dans la formule pour avoir les heures du soir dans un cadran déclinant à l'occident, est toujours la différence qu'il y a entre l'arc de l'équateur qui répond à l'heure cherchée à raison de 15° pour une heure, et l'arc de l'équateur qui exprime la différence des méridiens.* Lorsque le premier de ces arcs est moindre que l'autre, la ligne qui doit marquer l'heure sera vers l'occident relativement à la soustylaire; elle sera au contraire vers l'orient s'il est plus grand.

§ XX.

Nous venons de voir que la soustylaire du plan étant donnée, il n'entre dans la formule de la construction des cadrans, que la différence des méridiens lorsqu'ils sont déclinants, la hauteur du pôle sur le plan, et enfin l'arc de l'équateur qui répond à l'heure cherchée, et qui est donné en convertissant l'heure en degrés, à raison de 15° pour une heure. Or nous avons dit comment on pouvait tracer la soustylaire (§ V et VIII); nous avons dit aussi comment on pouvait trouver l'élévation du pôle sur le plan (§ VII), ainsi il nous resterait seulement à déterminer la différence des méridiens pour les plans différemment situés, mais nous donnerons encore d'autres moyens de connaître la hauteur du pôle sur le plan, parce que celui que nous avons indiqué est sujet à beaucoup d'inexactitudes.

Fig. 12.

§ XXI.

Soit AB une méridienne tracée sur un plan horizontal, si ayant mené EF perpendiculairement à AB, on imagine que cette ligne est la section d'un plan vertical ou d'un plan incliné d'une manière quelconque, coupé par le plan horizontal, on concevra sans peine que le méridien du plan horizontal qui est celui du lieu étant perpendiculaire à la section EF sera aussi perpendiculaire au plan supposé, élevé sur EF, soit verticalement, soit d'une manière inclinée, et qu'ainsi le

méridien du lieu sera en même temps le méridien du plan ou vertical ou incliné. Ainsi les plans dont la section avec l'horizon est perpendiculaire à la méridienne du lieu, c'est-à-dire les plans non déclinants, ont le même méridien que le lieu même.

§ XXII.

Mais si la section MN du plan supposé coupé par le plan horizontal est inclinée sur la méridienne du lieu AB. Alors la méridienne du lieu sera oblique sur ce plan, et ce plan aura son méridien plus ou moins éloigné du méridien du lieu, suivant que l'angle MBE ou NBF, qui marque la déclinaison du plan, sera plus ou moins grand.

La déclinaison est orientale ou occidentale, suivant que la perpendiculaire BB, menée sur la ligne MN, se rapproche de l'orient ou de l'occident.

§ XXIII.

Plans verticaux déclinants.

Soit VL un plan horizontal, dont AB soit la méridienne à laquelle on a mené la perpendiculaire ZT, KX un plan vertical qui coupe le plan horizontal suivant la ligne VX, en sorte que l'angle VBZ ou TBX exprime sa déclinaison. Si l'on fait l'angle BAO égal à la latitude du lieu ou à la hauteur du pôle au-dessus du plan horizontal, et qu'on imagine le triangle ABO relevé perpendiculairement sur la méridienne AB, la ligne AO se trouvera placé suivant l'axe du monde et représentera cet axe ; elle rencontrera le plan vertical en un point C, tel que la verticale BC se confondra avec la ligne BO. Fig. 12.

Si l'on imagine ensuite, par l'axe AC, un plan perpendiculaire au plan vertical KX, ce plan coupera le plan horizontal suivant une ligne AE partant du point A et menée perpendiculairement à VX, puisqu'elle sera la section commune de deux plans qui sont l'un et l'autre perpendiculaires au plan vertical auquel appartient la ligne VX, et le même plan passant par l'axe supposé perpendiculaire au plan vertical, le coupera évidemment suivant la ligne EC, en sorte que cette ligne sera la soustylaire du plan vertical.

La ligne AE étant perpendiculaire au plan vertical, l'angle CAE sera droit, et puisque le triangle CEA se trouve dans le méridien de ce plan, que AC représente l'axe du monde, il s'ensuit que l'angle ACE marque l'élévation du pôle sur ce plan.

Soit mené par le point B la ligne BP perpendiculaire à la soustylaire CE; puis imaginons un plan perpendiculaire à l'axe AC, mené par le point B : ce plan, qui représente l'équateur, coupera le plan horizontal suivant la ligne ZT perpendiculaire à AB, et le plan vertical KX suivant la ligne BP perpendiculaire à la soustylaire CE; puisque les lignes AB et CE sont celles que ce plan rencontre dans les méridiens, il coupera le méridien du lieu suivant la ligne BR menée du point B perpendiculaire sur l'axe, et le méridien du plan suivant la ligne qu'on peut imaginer tirée du point P au point R, et qui est ainsi évidemment perpendiculaire à l'axe. Il suit de là que le point R étant dans l'axe du monde et les deux lignes RB, RP dans l'équateur, l'une dans le méridien du lieu, et l'autre dans le méridien du plan, l'angle BRP, compris entre ces deux lignes, exprime la différence de ces deux méridiens. Cela posé, nous allons chercher l'expression de la hauteur du pôle ACE sur le plan, et celle de la différence des méridiens BRP, l'une et l'autre étant nécessaires pour la construction du cadran vertical, où l'on ne suppose d'autres données que la soustylaire CE et l'angle BCE qu'elle fait avec la verticale BC.

§ XXIV.

Dans le triangle ABC, on a :

$$AB : BC = BC :: \cos \text{lat.} : \sin \text{lat.}$$

donc :

$$BC = \frac{AB \times \sin \text{lat.}}{\cos \text{lat.}}$$

Dans le même triangle :

$$AB : AO = AC :: \cos \text{lat.} : R$$

donc :

$$AC = \frac{AB \times R}{\cos \text{lat.}}$$

Dans le triangle rectangle BCE :

$$BC : CE :: \cos BCE : R$$

donc :

$$CE = \frac{BC \times R}{\cos BCE} = \frac{AB \times \sin \text{lat.} \times R}{\cos \text{lat.} \times \cos BCE}$$

Enfin, dans le triangle rectangle AEC :

$$CE : AC :: \cos ACE : R$$

donc ;

$$\cos ACE = \frac{CE \times R}{AC} = \frac{R \times \sin \text{lat.}}{\cos BCE}$$

C'est-à-dire que *le cosinus de l'angle qui exprime la hauteur du pôle sur un plan vertical déclinant est égal au produit du rayon par le sinus de la latitude du lieu, divisé par le cosinus de l'angle que la soustylaire fait avec la verticale.* Hauteur du pôle sur le plan vertical déclinant par la soustylaire.

§ XXV.

La ligne RP, que nous imaginons tirée du point R au point P sera perpendiculaire à la ligne BP; car la ligne BP, qui est perpendiculaire au méridien ACE du plan, puisqu'elle est la section commune de deux plans perpendiculaires à ce méridien, savoir, le plan de l'équateur et le plan vertical, la ligne BP, dis-je, sera perpendiculaire à toutes les lignes telles que PR, qu'elle rencontrera dans le plan du méridien. Cela posé, dans le triangle rectangle BCP, on a :

$$BC : BP :: R : \sin BCP$$

donc :

$$BP = \frac{BC \times \sin BCP}{R} = (\S\ XXIV)\ \frac{AB \times \sin \text{lat.} \times BCP}{\cos \text{lat.} \times R}$$

dans le triangle ABR, on a :

$$AB : BR :: R : \sin \text{lat.}$$

donc

$$BR = \frac{AB \times \sin \text{lat.}}{R}$$

Enfin, dans le triangle rectangle BRP, on a :

$$BR : BP :: R : \sin BRP$$

donc

$$\sin BRP = \frac{BP \times R}{BR}$$

ou, en prenant les valeurs des lignes qui entrent dans cette double expression, on a :

$$\sin BRP\text{, c'est-à-dire } \sin \text{diff. des mérid.} = \frac{R \times \sin BCP}{\cos \text{lat.}}$$

Le sinus de la différence des méridiens du lieu et du plan vertical déclinant est donc égal au produit fait du rayon par le sinus de l'angle que la soustylaire fait avec la verticale, divisé par le cosinus de la latitude ou de la hauteur de pôle du lieu. Différence des méridiens pour un plan vertical déclinant par la soustylaire.

§ XXVI.

Dans le triangle CBE rectangle en B, on a :

$$BC : BE :: R : \text{tang } BEC$$

donc :

$$BE = \frac{BC \times \text{tang } BCE}{R} = (\S\,XXIV)\ \frac{AB \times \sin \text{lat.} \times \text{tang } BCE}{\cos \text{lat.} \times R}$$

Mais dans le triangle rectangle BEA, on a :

$$AB : BE :: R : \sin BAE = \frac{BE \times R}{AB}$$

ou, en mettant pour BE sa valeur :

$$\sin BAE = \frac{\sin \text{lat.} \times \text{tang } BCE}{\cos \text{lat.}}$$

ou parce que :

$$\frac{\sin \text{lat.}}{\cos \text{lat.}} = \frac{\text{tang lat.}}{R},\ \text{on a} : \sin BAE = \frac{\text{tang lat.} \times \text{tang } BCE}{R}$$

Déclinaison connue par la soustylaire du plan vertical déclinant.

C'est-à-dire que *le sinus de l'angle de déclinaison du plan vertical est égal au produit de la tangente de la hauteur du pôle du lieu par la tangente de l'angle que la soustylaire fait avec la verticale, divisé par le rayon.*

§ XXVII.

Nous avons supposé, dans les trois problèmes précédents, que l'on connaissait la soustylaire du plan vertical, et nous avons avec cela trouvé la hauteur du pôle sur le plan et la différence des méridiens. Mais si la soustylaire n'était pas donnée, et que l'on connût la déclinaison du plan vertical, soit par le moyen de la boussole, soit par un autre moyen quelconque (§ XXVIII), on pourrait également calculer d'après cela les choses nécessaires à connaître pour construire le cadran sur le plan vertical déclinant.

§ XXVIII.

Fig. 14. Connaître la déclinaison par l'observation.

Soit P le pied d'un gnomon placé sur un mur vertical, déclinant de manière que la distance perpendiculaire de ce point au trou de la plaque, ou au point qui porte l'ombre soit représentée par PG. Si au moyen d'une bonne montre ou d'un cadran voisin, on marque le point S où l'ombre du gnomon se porte à midi, et qu'ayant mené par ce point une ligne verticale SD, on mène aussi par le point P une ligne horizontale PO qui coupe la verticale au point O, et qu'on forme avec les deux côtés PG et PO le triangle rectangle GPO, on aura l'angle PGO égal à la déclinaison du plan, car ce triangle existe dans un plan horizontal, et est semblable au triangle ABE (*fig.* 13), parce que les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre; ainsi, l'angle PGO de l'un sera égal à l'angle BAE de l'autre, c'est-à-dire égal à la déclinaison du plan.

XXIX.

L'angle BAC exprimant la latitude ou la hauteur du pôle du lieu, on aura : Connaissant la déclinaison du plan vertical trouver la position de la soustylaire relativement à la ligne verticale.

$$\text{R} : \text{tang lat.} :: \text{AB} : \text{BC} = \frac{\text{AB} \times \text{tang lat.}}{\text{R}}$$

Mais

$$\text{AB} : \text{BE} :: \text{R} : \text{sin décl.}\,; \quad \text{donc,} \quad \text{BE} = \frac{\text{AB} \times \text{sin décl.}}{\text{R}}$$

Enfin dans le triangle CBE, on a : Fig. 13.

$$\text{BC} : \text{BE} :: \text{R} : \text{tang BCE}$$

d'où l'on tire :

$$\text{tang BCE} = \frac{\text{BE} \times \text{R}}{\text{BC}}$$

ou en mettant les valeurs de BE et de BC :

$$\text{tang BCE} = \frac{\text{R} \times \text{sin décl.}}{\text{tang. lat.}}$$

C'est-à-dire que *la tangente de l'angle que la soustylaire fait avec la ligne verticale est égale au produit du rayon par le sinus de la déclinaison du plan supposé vertical, divisé par la tangente de la latitude du lieu.*

§ XXX.

Dans le triangle BAO, on a : Connaître la hauteur du pôle sur le plan vertical par le moyen de sa déclinaison.

$$\text{AB} : \text{AO} :: \text{cos lat.} : \text{R}\,; \quad \text{donc:} \quad \text{AO} \quad \text{ou} \quad \text{AC} = \frac{\text{AB} \times \text{R}}{\text{cos lat.}}$$

Dans le triangle rectangle ABE où l'angle BAE exprime la déclinaison du plan, on a :

$$\text{AB} : \text{AE} :: \text{R} : \text{cos décl.}\,; \quad \text{donc :} \quad \text{AE} = \frac{\text{AB} \times \text{cos décl.}}{\text{R}}$$

Enfin dans le triangle rectangle ACE où CE est la soustylaire, AC l'axe, et où par conséquent l'angle ACE exprime la hauteur du pôle sur le plan, on a :

$$\text{AC} : \text{AE} :: \text{R} : \text{sin ACE} = \frac{\text{AE} \times \text{R}}{\text{AC}}$$

ou en mettant pour AE et AC leurs valeurs :

$$\text{sin ACE} = \frac{\text{cos décl.} \times \text{cos lat.}}{\text{R}}$$

C'est-à-dire que *le sinus de la hauteur du pôle sur un plan vertical déclinant est égal au produit du cosinus de la déclinaison du plan par le cosinus de la latitude du lieu, divisé par le rayon.* Fig. 13.

§ XXXI.

Connaissant la déclinaison d'un plan vertical, trouver la différence des méridiens du lieu et de ce plan.

Fig. 13.

En faisant les mêmes suppositions que l'on a faites précédemment (§ XXIII), l'angle BRP exprimera la différence des méridiens; or dans le triangle rectangle CPB on a :

$$CP : BP :: R : \text{tang } BCE$$

Ainsi :

$$BP = \frac{CP \times \text{tang } BCE}{R}$$

Dans le triangle CPR rectangle en R, on a :

$$CP : PR :: R : \sin RCP; \text{ donc : } PR = \frac{CP \times \sin RCP}{R}$$

Enfin dans le triangle rectangle RPB, on a :

$$RP : PB :: R : \text{tang } BRP$$

Ainsi :

$$\text{tang } BRP = \frac{BP \times R}{RP} = \frac{CP \times \text{tang } BCE \times R}{CP \times \sin RCP}$$

et mettant pour tang BCE sa valeur

$$\frac{R \times \sin \text{décl.}}{\text{tang lat.}} \text{ (§ XXIX)}$$

et pour sin RCP = sin ACE sa valeur

$$\frac{\cos \text{décl.} \times \cos \text{lat.}}{R} \text{ (§ XXX)}$$

On aura :

$$\text{tang } BRP = \frac{R^3 \times \sin \text{décl.}}{\text{tang lat.} \times \cos \text{décl.} \times \cos \text{lat.}}$$

ou en mettant pour $\frac{\sin \text{décl.}}{\cos \text{décl.}}$ sa valeur $\frac{\text{tang décl.}}{R}$, et pour

$$\text{tang lat.} \times \cos \text{lat.} \text{ sa valeur } R \times \sin \text{lat.}$$

On aura finalement :

$$\text{tang } BRP = \frac{R \times \text{tang décl.}}{\sin \text{lat.}}$$

C'est-à-dire que *la tangente de l'angle, qui exprime la différence des méridiens du lieu et du plan vertical déclinant, est égal au produit du rayon par la tangente de la déclinaison du plan, divisé par le sinus de la latitude du lieu.*

§ XXXII.

Si la déclinaison était supposée nulle dans la formule qui exprime l'angle de la soustylaire avec la verticale (§ XXIX), la valeur de cet angle serait nulle, c'est-à-dire que la soustylaire se confondrait avec la verticale.

La même supposition étant faite dans la formule qui (§ XXX) exprime la hauteur du pôle sur le plan, on trouverait cette hauteur égale au complément de la latitude du lieu, puisque dans ce cas le cosinus de la déclinaison devient égal au rayon.

Enfin la même supposition étant introduite dans la formule qui exprime la différence des méridiens (§ XXXI), cette différence se réduirait à zéro.

Plans méridionaux et septentrionaux.

Or cette supposition convient aux plans parfaitement méridionaux ou septentrionaux; ainsi dans ces plans la verticale elle-même est la soustylaire, ils ont le même méridien que le lieu où ils sont, et la hauteur du pôle sur ces plans est égale au complément de la latitude du lieu. Il faut remarquer seulement que c'est le pôle méridional que l'on emploie pour les plans méridionaux, et au contraire le pôle septentrional pour les plans septentrionaux, ce qui fait que dans les premiers la soustylaire est dirigée du haut au bas du plan, et dans le second elle est au contraire dirigée du bas vers le haut du plan.

Cette remarque s'étend aussi sur tous les points verticaux déclinants.

§ XXXIII.

Si dans les mêmes formules (§§ XXIX, XXX, XXXI) dont nous venons de parler on suppose la déclinaison de 90°, ce qui rend : sin décl. $=$ R et cos décl. $= 0$.

On trouvera :

1° La tangente de l'angle que la soustylaire fait avec la verticale

$$= \frac{R \times R}{\text{tang lat.}} = \text{cot lat.}$$

c'est-à-dire que cet angle est alors égal au complément de la latitude du lieu.

2° Le sinus de la hauteur du pôle sur le plan sera égal à zéro; ainsi l'axe doit être ou dans ce plan, ou parallèle à ce plan.

3° L'angle qui exprime la différence des méridiens a une tangente infiniment grande, puisque dans cette supposition la tangente de la déclinaison est infiniment grande, ce qui prouve que la différence des méridiens est de 90°.

Plans orientaux et occidentaux.

Or cette supposition convient aux plans orientaux et aux plans septentrionaux; ainsi dans cette espèce de plans, l'angle que la soustylaire fait avec la verticale est égal au complément de la latitude du lieu. L'axe doit être dans un plan paral-

lèle à ces plans eux-mêmes, et la différence de leurs méridiens avec le méridien du lieu est de 90° ; tout cela est d'ailleurs bien évident.

En revenant aux formules qui servent à tracer le cadran (§ XII), on trouvera que la tangente de l'angle qu'une ligne horaire fait avec la soustylaire se réduit à zéro, parce que dans ce cas-ci la hauteur du pôle sur le plan est nulle, en sorte que les lignes horaires deviennent parallèles à la soustylaire, et le tracé du cadran soumet alors à marquer sur une ligne perpendiculaire à la soustylaire les triangles BM, BN, BO, etc., et des arcs de l'équateur WBF qui répondent aux différentes heures; et l'on voit sans peine qu'alors la méridienne du lieu ne peut pas être marquée sur le plan, puisque la tangente de l'angle droit BEF qui lui répond est infinie.

Quant à la situation de l'axe pour ces cadrans, nous avons vu qu'ils sont parallèles à la soustylaire; ainsi on les établit dans cette position au moyen de deux supports égaux élevés perpendiculairement sur cette soustylaire.

§ XXXIV.

Des plans inclinés.

Soit VW la section d'un plan incliné, coupé par un plan horizontal dont AB est la méridienne, en sorte qu'en menant AE perpendiculairement à VW, l'angle BAE exprime la déclinaison du plan incliné supposé.

Fig. 15, 19, 22 et 25.

Soit imaginé au point B une verticale BX telle que la ligne AX étant menée il en résultât l'angle BAX égal à la hauteur du pôle ou à la latitude du lieu, et que AX représentât l'axe du monde.

Soit imaginé prolongé cet axe AX jusqu'à ce qu'il rencontre le plan incliné en un point C, et ayant mené par ce point C l'horizontale CX, on la recoupera par la verticale BK, c'est-à-dire par une verticale BK perpendiculaire à la section commune VW.

Soient H et Q les projections verticales des points C et R sur le plan horizontal, et soient tirées les lignes BH : l'angle QBH sera égal à l'angle BAE ou à la déclinaison du plan.

Imaginons encore que CP représente la soustylaire du plan incliné sur laquelle on a mené par le point B la perpendiculaire BP; puis supposant par ce point B un plan perpendiculaire à l'axe, ce plan qui représente l'équateur coupera le plan horizontal suivant la ligne ZBT perpendiculaire à AB, et le plan incliné suivant une ligne BP qui sera perpendiculaire à la soustylaire, puisqu'elle est la section commune du plan incliné et de l'équateur, qui sont l'un et l'autre perpendiculaires au méridien du plan dont CP est une ligne rencontrée par BP.

Le plan de l'équateur coupera aussi le méridien du lieu suivant la ligne menée du point B perpendiculairement sur l'axe (voyez les figures indiquées en marge), dans lesquelles AH représente la section du plan horizontal, BO la section du plan incliné par le méridien du lieu, et AO exprime l'axe du monde, de manière qu'en transportant cette figure sur la ligne AB de la figure correspondante (16 sur 15, 20 sur 19, 22 sur 21 et 26 sur 25) perpendiculairement sur cette ligne, les points A, B, H de l'un couvriraient les points qui ont la même dénomination dans l'autre, et le point O tomberait sur le point C; le plan de l'équateur coupera aussi le méridien du plan suivant la ligne que l'on peut imaginer tirée du point R au point P, car ces deux points sont les seuls qui appartiennent à l'un ou à l'autre de ces deux plans; il suit de là que l'angle BRP formé par les deux lignes BR et RP exprimera la différence des méridiens du lieu et du plan. Nous allons en chercher l'expression, en supposant que l'on connaît la soustylaire CS et l'angle BSP que cette ligne fait avec la verticale. Fig. 16, 20, 22 et 26.

§ XXXV.

Aux suppositions que nous venons de faire, nous ajouterons une ligne menée du point X au point S où la verticale coupe la soustylaire, cette ligne se trouvera en même temps dans le plan vertical perpendiculaire au plan incliné et dans le méridien, de façon qu'elle sera leur section commune, et par conséquent perpendiculaire au plan incliné et aux deux lignes CP et BK qu'elle rencontre dans ce plan.

Trouver la différence des méridiens par le moyen de la soustylaire.

Fig. 15 et 16, 19 et 20, 22 et 23, 25 et 26

Cela posé, la ligne BK étant perpendiculaire à l'horizontale VW, qui est la section du plan incliné coupé par le plan horizontal, on aura :

$$BK : BQ :: \text{le rayon} : \sin \text{incl.}$$

Mais le triangle BXS est évidemment semblable au triangle KBQ. Ainsi :

$$BX : BS :: \text{le rayon} : \sin \text{décl.}; \quad \text{et dès lors on a} : BS = \frac{BX \times \sin \text{incl.}}{R}$$

Or, dans le triangle rectangle rectangle BSP, on a :

$$BS : BP :: R : \sin BSP$$

Ainsi :

$$BP = \frac{BS \times \sin BSP}{R} = \frac{BX \times \sin \text{incl.} \times \sin BSP}{R \times R}$$

On a d'ailleurs dans le triangle BXR :

$$BX : BR :: R : \cos \text{lat}; \quad \text{d'où} : BR = \frac{BX \times \cos \text{lat.}}{R}$$

et dans le triangle BRP aussi rectangle, on a :

$$BR : BP :: R : \sin BRP = \frac{R \times BP}{BR}$$

Donc en mettant les valeurs trouvées pour BP et pour BR, on aura enfin :

$$\sin BRP = \frac{\sin \text{incl.} \times \sin BSP}{\cos \text{lat.}}$$

C'est-à-dire que *le sinus de l'angle, qui exprime la différence des méridiens du lieu et du plan incliné, est égal au produit du sinus de l'inclinaison du plan par le sinus de l'angle que la soustylaire fait avec la verticale, divisé par le cosinus de la latitude du lieu.*

§ XXXVI.

L'angle de la soustylaire avec la verticale étant connu, l'on peut trouver la déclinaison du plan, mais il faut beaucoup d'exactitude en relevant cet angle, car une petite erreur de ce côté-là en produit une plus sensible dans la déclinaison. Nous verrons néanmoins comment on peut trouver la déclinaison par ce moyen (§ XLIII). Voyons auparavant comment on peut la trouver directement.

§ XXXVII.

Si l'on marque à midi sur un plan incliné l'ombre d'un fil à plomb, cette ligne représentera la ligne BC des figures dont nous nous sommes servi ; ainsi, l'observation supposée fera connaître l'angle KBC que cette ligne fait avec la verticale, mais dans le triangle KBC, on a :

$$BK : CK :: R : \text{tang } KBC; \text{ d'où : } CK = \frac{BK \times \text{tang } KBC}{R}$$

On a d'ailleurs :

$$BK : BQ :: R : \cos \text{incl.}; \text{ d'où : } BQ = \frac{BK \times \cos \text{incl.}}{R}$$

et dans le triangle BQH où l'angle QBH exprime la déclinaison et où QH = CK, on a :

$$BQ : CK :: R : \text{tang décl.}$$

Ainsi :

$$\text{tang décl.} = \frac{R \times CK}{BQ} = \frac{R \times \text{tang } KBC}{\cos \text{incl.}}$$

C'est-à-dire que *la tangente de la déclinaison du plan est égale au produit du rayon par la tangente de l'angle que la méridienne du lieu fait sur ce plan avec la ligne verticale, divisé par le cosinus de l'inclinaison de ce plan.*

Mais cette méthode a l'inconvénient dont il a été parlé dans le paragraphe précédent.

§ XXXVIII.

On tire de la formule précédente :

$$\text{tang KBC} = \frac{\text{tang décl.} \times \text{cos incl.}}{R}$$

Connaître la position de la méridienne du lieu sur le plan par la déclinaison.

C'est-à-dire que *la tangente de l'angle que la méridienne du lieu fait sur le plan incliné avec la verticale est égale au produit fait de la tangente de la déclinaison par le cosinus de l'inclinaison du plan, divisé par le rayon.*

§ XXXIX.

Connaître la déclinaison par observation. Fig. 18.

On peut aussi trouver la déclinaison du plan par une méthode semblable à celle qui a été donnée pour les cadrans verticaux (§ XXVIII).

Pour cela, ayant suspendu un fil GF à plomb au trou G du gnomon, on en marquera l'ombre BC à l'instant de midi au moyen d'une montre ou d'un cadran voisin, puis par le pied P du gnomon, on mènera la verticale BK; on marquera sur cette ligne le point K qui répond horizontalement au trou G du gnomon, ensuite on tirera par ce point K jusqu'à la ligne BC une ligne horizontale KC. Il est clair que cette ligne KC et la distance GK du trou du gnomon au point K formant l'angle droit d'un triangle qui, étant achevé en menant l'hypoténuse GC, l'angle KGC compris entre cette hypoténuse et le deuxième côté KG exprimera la déclinaison que l'on prendra au rapporteur, et que l'on calculera pour plus d'exactitude d'après les côtés connus GK et KC.

§ XL.

Connaissant la déclinaison d'un plan incliné, trouver la position de la soustylaire relativement à la verticale.

En se rappelant l'explication (§ XXXIV et XXXV) donnée pour l'intelligence des figures 15, 19, 22 et 25.

Nommons :	KQ ou CH	a
—	Sinus inclinaison.	I
—	Cosinus inclinaison.	i
—	Sinus déclinaison.	D
—	Cosinus déclinaison.	d
—	Sinus latitude.	L
—	Cosinus latitude.	l
—	Le rayon.	R

On aura :

$$I . i :: a : BQ = \frac{ai}{I}; \quad \text{et,} \quad I : R :: a : BK = \frac{aR}{I}$$

et

$$BQ : BH :: d : R;\ \text{d'où}\ BH = \frac{BQ \times R}{d} = \frac{ai \times R}{Id}$$

mais

$$BH = XD \quad \text{et} \quad XD : DO :: l : L$$

Ainsi :

$$DO = \frac{BH \times L}{l} \quad \text{ou} \quad DO = \frac{aiRL}{Idl}.$$

Or

$$BX = OH \mp DO;\ \text{donc}\ BX = a \pm \frac{aiRL}{Idl} = \frac{aIdl \pm aiRL}{Idl}.$$

$$BX : BS :: R : I;\ \text{d'où}: BS = \frac{BX \times I}{R} = \frac{aIIdl \pm aiIRL}{RIdl}$$

et puisque SK = BK — BS, on aura :

$$SK = \frac{aR}{I} - \frac{aIIdl \mp aiIRL}{RIdl} \quad \text{ou} \quad SK = \frac{aRRdl - aIIdl \mp aiIRL}{RIdl}$$

ou bien à cause que : $RR - II = ii$, on aura :

$$SK = \frac{aiidl \mp aiIRL}{RIdl}.$$

Nous avons d'ailleurs :

$$BQ : QH :: d : D;\ \text{donc}: QH = CK = \frac{BQ \times D}{d} \quad \text{ou} \quad CK = \frac{aiD}{Id}.$$

Enfin, l'on a :

$$SK : CK :: R : \text{tang } CSK$$

d'où :

$$\text{tang } CSK = \frac{CK \times R}{SK};\ \text{ou}:\ \text{tang } CSK = \frac{aiDR}{Id} \times \frac{RIdl}{aiidl \mp aiIRL} = \frac{RRDl}{idl \mp IRL}$$

Fig. 22, 23 et 24 / 25, 26 et 27 / 15, 16 et 17 / 19, 20 et 21

C'est-à-dire que *la tangente de l'angle que la soustylaire du plan fait avec la verticale est exprimée par une fraction qui a pour numérateur le produit du carré du rayon par le sinus de la déclinaison et par le cosinus de la latitude du lieu, et pour dénominateur la différence ou la somme de deux termes, dont le premier est le produit du cosinus de l'inclinaison par le cosinus de la déclinaison du plan et par le cosinus de la latitude du lieu; le deuxième est le produit du rayon par le sinus de l'inclinaison du plan et par le sinus de la latitude du lieu. Ces deux termes sont ajoutés ensemble lorsque l'inclinaison du plan est dans le même sens que l'inclinaison de l'axe. On prend leur différence quand ces inclinaisons sont en sens contraire.*

Remarque. Dans la fig. 20, où le plan est plus incliné que l'axe, mais dans le même sens, on a :

$$BX = DO - HO = \frac{aiRL}{Idl} - a = \frac{aiRL - aIdl}{Idl}$$

et BS est, par conséquent, égale à :

$$\frac{aiIRL - aIIdl}{RIdl}, \text{ et l'on a : } SK = BK + BS$$

ou

$$SK = \frac{aR}{I} + \frac{aiIRL - aIIdl}{RIdl} \quad \text{qui se réduit à} \quad \frac{aiidl + aiIRL}{RIdl}$$

comme dans le cas de l'inclinaison du même sens avec l'axe. Ainsi ce cas ne fait pas d'exception ; seulement, etc., etc.

§ XLI.

Connaître par la déclinaison du plan incliné la hauteur du pôle sur ce plan.

Nous avons trouvé (§ XL) :

$$BQ = \frac{ai}{I}$$

$$BH = XD = \frac{aiR}{Id}$$

et l'on voit aisément que XD : XO :: l : R. Ainsi

$$XC = \frac{XN \times R}{d}$$

$$XC \text{ ou } XO = \frac{aiRR}{Idl}$$

On a aussi trouvé :

$$BX = \frac{aIdl \pm aiRL}{Ide} \quad (\S\ XL)$$

et il est clair que BX : XS :: R : i, et conséquemment :

$$XS = \frac{BX \times i}{R}$$

ou

$$XS = \frac{aiIdl \pm aiiRL}{RIdl}$$

Mais, dans le triangle XCS, l'on a : $\sin XCS = \frac{R \times XS}{XC}$

donc, sin XCS, c'est-à-dire sinus de la hauteur du pôle sur le plan, égale :

$$\frac{aiIdl \pm aiiRL}{Idl} \times \frac{Idl}{aiRR} = \frac{Idl}{RR} \pm \frac{iL}{R}$$

c'est-à-dire que *le sinus de la hauteur du pôle sur le plan est exprimé par la somme ou par la différence de deux termes dont l'un est le produit du sinus de l'inclinaison du plan multiplié par le cosinus de sa déclinaison et par le cosinus de la latitude du lieu,*

divisé par le carré du rayon ; l'autre est le produit du cosinus de l'inclinaison du plan par le sinus de la latitude du lieu divisé par le rayon ; la somme, quand l'inclinaison du plan et celle de l'axe sont en sens contraire ; la différence, lorsque ces inclinaisons sont du même côté.

REMARQUE. Dans la figure on trouvera :

$$\sin XCS = \frac{iL}{R} - \frac{Idl}{RR}\ .$$

ainsi cela est conforme à l'énoncé général ci-avant.

§ XLII.

Trouver la différence des méridiens par le moyen de la déclinaison.
Fig. 15, 16 et 17 19, 20 et 21 22, 23 et 24 25, 26 et 27

Suivant ce que nous avons établi ci-dessus (§§ XXXIV et suivants), l'angle compris entre les deux lignes RB et RP, qui sont, l'une dans le méridien du lieu, l'autre dans le méridien du plan, et qui d'ailleurs sont toutes deux dans le sens perpendiculaire à l'axe du monde, cet angle, dis-je, exprime la différence des méridiens du lieu et du plan, et ce plan perpendiculaire à l'axe du monde coupe le plan horizontal suivant TZ. Maintenant, si l'on prolonge la ligne HQ parallèle à VW jusqu'à sa rencontre Z avec la ligne TZ, et que l'on imagine par ce point Z et par la ligne ZL parallèle à BH, un plan parallèle au méridien du lieu, la section de ce plan et de l'équateur sera évidemment représentée par une ligne égale à la ligne HI (*fig.* 16) menée du point H perpendiculairement à l'axe. Ainsi, si l'on fait (*fig.* 17) $bz = BZ$, et qu'à une des extrémités z de cette ligne, on élève la perpendiculaire zt égale à la partie HG de la ligne HI comprise entre le plan horizontal et le plan incliné ; qu'on tire la ligne bt, cette ligne représentera la section BP, etc. du plan incliné par le plan de l'équateur. En sorte que, faisant $br = BR$ et perpendiculairement à bz, et que l'on mène la ligne rp perpendiculaire à bt, les deux lignes rb et rp seront placées dans cette figure comme elles le sont dans le plan qui représente ici l'équateur, et l'angle brp exprimera les différences des méridiens : or l'angle brp est égal à l'angle zbt. Ainsi ce dernier angle pourra aussi représenter la différence des méridiens dont nous cherchons l'expression.

Cela posé, nous avons comme ci-dessus (§ XL) :

$$BX = \frac{aIdl \pm aiRL}{Idl}$$

$$XO = \frac{aiRR}{Idl}\ (\S\ XLI)$$

$$BX : RX :: R : L \quad \text{ainsi} \quad RX = \frac{BX \times L}{R} = \frac{aIdlL \pm aiRLL}{RIdl}$$

$$BX : BR :: R : l \quad \text{ainsi} \quad BR = \frac{BX \times l}{R} = \frac{aIdl \pm aiRL}{RId}$$

Donc

$$OR = XO \mp RX = \frac{aiRR}{Idl} \mp \frac{aILdl - aiRLL}{RIdl}$$

ou, en réduisant au même dénominateur, et observant que : $aiR^3 - aiRLL = aiRll$,

$$OR = \frac{aiRL \mp aILd}{RId}$$

Nous avons d'ailleurs :

$$OH : OI :: R : L; \qquad \text{ainsi } OI = \frac{aL}{R}$$

on trouvera de même :

$$HI = \frac{al}{R}$$

Et puisque

$$OR : BR :: OI : GI$$

on aura

$$GI = \frac{OI \times BR}{OR}$$

ou en mettant les valeurs trouvées pour. . . . . . CI, BR et CR.

$$GI = \frac{aILdl \pm aiRLL}{RRil \mp RILd}$$

et

$$HG = HI \pm GI = \frac{al}{R} \pm \frac{aILdl + aiRLL}{RRil \mp RILd}$$

qui se réduit à :

$$HG = \frac{aiRR}{Ril \mp ILd}$$

mais à cause des triangles rectangles semblables BQH et ZBH, on a :

$$BZ : BH :: BQ : QH \text{ et } BQ : QH :: d : D \text{ et } BH = \frac{aiR}{Id} \text{ (§ XL)}$$

donc :

$$BZ : \frac{aiR}{Id} :: d : D \quad \text{et par conséquent} \quad BZ = \frac{aiR}{DI}$$

Enfin nous avons vu que $BZ = bz$ et que $zt = HG$; et dans le triangle rectangle bzt, on a :

$$\text{tang } zbt = \frac{R \times zt}{bz}$$

donc :

$$\text{tang } zbt = \frac{R \times HG}{BZ} = \frac{aiR^3}{Ril \mp ILd} \times \frac{DI}{aiR}$$

ou

$$\text{tang } zbt = \frac{RRDI}{Ril \mp ILd}$$

c'est l'expression de la tangente de la différence des méridiens.

Cet énoncé est vrai sans exception pour le cas où l'inclinaison, dans le même sens, se trouverait plus grande que celle de l'axe.

Ainsi : *la tangente de la différence des méridiens du lieu et du plan est donc exprimée par une fraction dont le numérateur est formé par le produit du carré, du rayon, par le sinus de la déclinaison et par le sinus de l'inclinaison du plan, et dont le dénominateur est la différence ou la somme de deux termes ; le premier est le produit du rayon par le cosinus de l'inclinaison du plan et par le cosinus de la latitude du lieu, le second est le produit du sinus de la latitude du lieu par le cosinus de la déclinaison et par le sinus de l'inclinaison du plan. La différence de ces deux termes entre dans l'expression quand l'inclinaison du plan n'est pas dans le même sens que l'inclinaison de l'axe; c'est la somme de ces deux termes qui y entre dans le cas contraire.*

§ XLIII.

Déterminer la déclinaison du plan par la soustylaire.

Les méthodes que nous avons données (§§ XXXVII et XXXIX), pour trouver la déclinaison d'un plan incliné, supposent que l'on s'est assuré d'avance de l'instant où il est midi pour le lieu ; au défaut de cette connaissance on peut dans tous les cas trouver la déclinaison par la soustylaire que l'on est toujours à même de placer sur le plan (§ V); en mesurant ou en calculant l'angle qu'elle fait avec la verticale, c'est-à-dire avec une ligne prise dans ce plan perpendiculairement à l'horizontale, on a :

$$(\S\ XL)\ SK = \frac{aiidl \mp aiIRL}{RIdl}$$

et

$$(\S\ XLI)\ XC = \frac{aiRR}{Idl} \quad \text{et} \quad XS = \frac{aiIdl \pm aiiRL}{RIdl}$$

ainsi :

$$XC^2 = \frac{a^2i^2R^4}{I^2d^2l^2} = \frac{a^2i^2R^6}{R^2I^2d^2l^2}$$

$$XS^2 = \frac{a^2i^2I^2d^2l^2 \pm 2a^2i^3IRLdl + a^2i^4R^2L^2}{R^2I^2d^2l^2}$$

et

$$\overline{CS}^2 = \overline{XC}^2 - \overline{XS}^2 = a^2i^2R^6 - a^2i^2I^2d^2l^2 \mp 2a^2i^3IRLdl - \frac{a^2i^4R^2L^2}{R^2I^2d^2l^2}$$

On aura aussi :

$$\overline{SK}^2 = \frac{a^2i^4d^2l^2 \mp 2a^2i^3RIdl + a^2i^2I^2R^2L^2}{R^2I^2d^2l^2}$$

Mais dans le triangle CSK, on a :

$$\cos \overline{CSK}^2 : R^2 :: \overline{SK}^2 : \overline{CS}^2$$

Ainsi en nommant s le cosinus de l'angle CSK, on aura :

$$R^2 \times \overline{SK}^2 = s^2 \times \overline{CS}^2$$

c'est-à-dire :

$$\frac{R^2 a^2 i^4 d^2 l^2 \mp 2 a^2 i^3 l R^3 L d l + a^2 i^2 l^2 R^4 L^2}{R^2 l^2 d^2 l^2} = a^2 i^2 R^6 s^2 - \frac{a^2 i^2 l^2 d^2 l^2 s^2 \mp 2 a^2 i^3 l R L d l s^2}{R^2 L^2 d^2 l^2} - a^2 i^4 R^2 L^2 s^2$$

Ou, en supprimant le diviseur qui est le même pour les deux termes de cette égalité, et en les divisant l'un et l'autre par le facteur $a^2 i^2$ qui leur est commun, on aura :

$$R^2 i^2 d^2 l^2 \mp 2 i l R^3 L d l + l^2 R^4 L^2 = R^6 s^2 - l^2 d^2 l^2 s^2 \mp 2 i l R L d l s^2 - i^2 R^2 L^2 s^2$$

ou en rassemblant les facteurs de d^2, et de d,

$$d^2 (R^2 i^2 l^2 \times l^2 l^2 s^2) \mp d (2 i l R^3 L l \mp 2 i l R L l s^2) = R^6 s^2 - i^2 R^2 L^2 s^2 - R^4 l^2 L^2$$

En nommant m le facteur de d^2,
n le facteur de d,
p la somme des termes du deuxième membre de l'équation, on aura :

$$d^2 m \mp d n = p$$

d'où l'on tire par la méthode ordinaire :

$$d = \sqrt{\frac{p}{m} + \left(\frac{n}{2m}\right)^2} \pm \frac{n}{2m}$$

c'est-à-dire :

$$d = \sqrt{\frac{R^6 s^2 - i^2 R^2 L^2 s^2 - R^4 s^2 L^2}{R^2 i^2 l^2 + l^2 l^2 s^2} + \left(\frac{i l R^3 L l - i l R L l s^2}{R^2 i^2 l^2 + l^2 l^2 s^2}\right)^2} \pm \frac{i l R^3 L l - i l R L l s^2}{R^2 i^2 l^2 + l^2 l^2 s^2}$$

On peut trouver, par la soustylaire, le cosinus de la déclinaison du plan. Il serait trop long de détailler les termes qui entrent dans cette expression ; il sera très-aisé de substituer aux lettres qui y entrent la valeur que nous leur avons assignée (§ XL), lorsque l'on voudra faire usage de cette formule ; il suffira de remarquer ici que le signe + du second terme a lieu lorsque l'inclinaison du plan est en sens contraire de l'inclinaison de l'axe ; le signe — a lieu dans le cas contraire.

§ XLIV.

Élévation du pôle sur le plan vertical déclinant.

Si, dans la formule trouvée (§ XLI) pour déterminer l'élévation du pôle sur le plan, on suppose l'inclinaison de 90° ou le plan vertical, on aura : $I = R$ et $i = o$. Ainsi le sinus d'élévation du pôle sera $= \frac{dl}{R}$, comme au § XXX.

Sur les plans verticaux, méridionaux ou septentrionaux.

Si dans cette même formule on supposait, outre cela, la déclinaison nulle ou le plan méridional ou septentrional, en sorte que d devînt égal à R, l'on trouverait : sinus élévation du pôle $= l =$ cosinus latitude (§ XXXII); ce qui est d'ailleurs évident.

§ XLV.

Sur des plans inclinés méridionaux ou septentrionaux.

Si dans la même formule :

$$\text{sin élév. du pôle} = \frac{Idl}{RR} \mp \frac{iL}{R}$$

on suppose la déclinaison nulle, on aura :

$$d = R \quad \text{et} \quad \text{sin élév. du pôle} = \frac{Il}{R} \mp \frac{iL}{R}$$

ce qui est l'expression du sinus de l'angle égal à la différence ou à la somme des deux angles I et L; et effectivement cette supposition convient aux plans méridionaux et septentrionaux, pour lesquels l'élévation du pôle est évidemment égale à la somme ou à la différence de l'angle de latitude du lieu et de l'inclinaison du plan : la somme, pour le côté du plan qui regarde le pôle élevé, et la différence pour l'autre.

§ XLVI.

Sur des plans verticaux, orientaux ou occidentaux.

Si, dans la même formule, outre la déclinaison de 90°, on supposait l'inclinaison aussi de 90° ou le plan vertical oriental ou occidental, la formule se réduirait à zéro; ce qui prouve que l'axe est parallèle au plan (§ XXXIII).

§ XLVII.

Élévation du pôle sur un plan incliné oriental ou occidental.

Si dans la même formule :

$$\text{sin élév. du pôle} = \frac{Idl}{RR} \mp \frac{iL}{R}$$

on suppose la déclinaison de 90° ou le plan oriental ou occidental, on aura $d = 0$, et elle deviendra :

$$\text{sin élév. du pôle} = \mp \frac{iL}{R}$$

c'est-à-dire que *l'élévation du pôle sur les plans inclinés orientaux ou occidentaux a son sinus égal au produit du cosinus de l'inclinaison du plan par le sinus de la latitude du lieu, divisé par le rayon.* Le signe $\mp$ annonce seulement que, dans ces deux espèces de plan, l'axe n'est pas semblablement dirigé ; pour les plans orientaux il est dirigé vers le pôle élevé, et pour les plans occidentaux vers le pôle abaissé.

§ XLVIII.

Si la déclinaison était dans la même formule supposée nulle, et l'inclinaison du plan en sens contraire de l'inclinaison de l'axe et égale au complément de la latitude, on aurait : $d = R$, $I = l$ et $i = L$, et la formule deviendrait : Sur un plan équinoxial.

$$\text{sin élév. du pôle} = \frac{ll + LL}{R} = \frac{RR}{R} = R,$$

c'est-à-dire que l'axe serait perpendiculaire au plan. Cette supposition détermine en effet le cas du plan équinoxial ou perpendiculaire à l'axe du monde.

§ XLIX.

Si, dans la formule (§ XLII) qui exprime la tangente de la différence des méridiens, on suppose la déclinaison nulle ou D égal à zéro, la formule entière se réduira à zéro, ce qui prouve que la différence des méridiens est alors nulle, ce qui d'ailleurs est évident. Différence des méridiens pour les plans méridionaux ou septentrionaux inclinés.

§ L.

Si, dans cette même formule, on suppose la déclinaison de 90° ou le plan oriental ou occidental, on aura : $D = R$ et $d = o$. Ainsi elle deviendra : Pour les plans orientaux ou occidentaux.

$$\text{tang diff. des méridiens} = \frac{RRI}{il}$$

ou, en mettant pour $\frac{I}{i}$ sa valeur $\frac{\text{tang incl.}}{R}$, on aura :

$$\text{tang diff. des méridiens} = \frac{R \times \text{tang incl.}}{\text{cos lat.}}$$

c'est-à-dire que *la tangente de la différence des méridiens, pour les plans orientaux ou occidentaux, est égale au produit du rayon par la tangente de l'inclinaison du plan, divisé par le cosinus de la latitude du lieu.* Fig. 10.

§ LI.

Différence des méridiens pour les plans verticaux déclinants.

Si, dans cette même formule, on suppose l'inclinaison du plan de 90° ou le plan vertical, ce qui rend $I = R$ et $i = 0$, on aura :

$$\text{tang diff. des méridiens} = \frac{RRD}{dL}$$

ou, en mettant pour $\frac{D}{d}$ sa valeur $\frac{\text{tang décl.}}{R}$, on aura :

$$\text{tang diff. des méridiens} = \frac{R \times \text{tang décl.}}{\text{sin lat.}} \quad (\S\ XXXI).$$

§ LII.

Application des logarithmes au calcul des formules précédentes.

Les calculs à faire suivant quelques-unes de ces formules seraient fort longs, si l'on n'avait pas le secours des logarithmes; mais comme les tables des logarithmes des nombres ne sont pas fort étendues, et que les sinus, cosinus, etc., sont exprimés par de très-grands nombres, on pourrait se trouver embarrassé si on ignorait les propriétés des logarithmes; mais avec cette connaissance, les calculs deviennent fort simples. Nous allons en faire l'application sur la formule du § XLIII, qui est la plus composée, où l'on a :

$$d = \sqrt{\frac{R^8 i^2 - i^2 R^2 L^2 s^2 - R^4 I^2 L^2}{R^4 i^2 l^2 + I^2 l^2 s^2} + \left(\frac{iIR^3 Ll - iLIRls^2}{R^4 i^2 l^2 + I^2 l^2 s^2}\right)^2} + \frac{iIR^3 Ll - iIRLls^2}{R^4 i^2 l^2 + I^2 l^2 s^2}$$

que nous avons représenté par :

$$d = \sqrt{\frac{p}{m} + \left(\frac{n}{2m}\right)^2} - \frac{n}{2m}$$

Supposons donc un plan dont l'inclinaison soit en sens contraire de l'inclinaison de l'axe :

La première, de 22° 30′;

La deuxième, ou la latitude, de 59° 30′;

L'angle que la soustylaire fait avec la verticale, de 64° 25′;

On aura, en prenant les logarithmes :

log R^6 60,000000
log s^2 19,270612

79,270612 = 75,000000 or 75,000000 est le log de 10^{75}
+ 4,270612 et 4,270612 est le log de 18647.

Ainsi $R^6 \times s^2 = 18647 + 10^{75}$ ou $= 186470 \times 10^{70}$

Log I^2 19,931230
Log R^2 20,000000
Log L^2 19,776682
Log s^2 19,270612

Log $I^2R^2L^2s^2$ 78,978524
$I^2R^2L^2s^2$ . . . . 95175 $\times 10^{74}$
$R^4I^2L^2$ 87570

$I^2R^2L^2s^2 + R^4I^2L^2$ . . . . 182745 $\times 10^{74}$

Log R^2i^2 39,931230
Log l^2 19,604256

Log $R^2i^2l^2$ 59,535486
$R^2i^2l^2$ . . . . 3431510^{55}

Log I^2 19,165680
Log l^2 19,604256
Log s^2 19,270612

Log $I^2l^2s^2$ = ... 58,040548
$I^2l^2s^2$ . . . . = 109786 $\times 10^{53}$
$R^2i^2l^2$ . . . . = 3431500 $\times 10^{53}$

$m = R^2i^2l^2 + I^2l^2s^2$ . . . . . . = 3541286 $\times 10^{53}$
= 3541 $\frac{1}{4} \times 10^{56}$

Log m . . . . = 59,549160

$2 \log \frac{\frac{1}{2}n}{m}$ ou $\log \left(\frac{\frac{1}{2}n}{m}\right)^2$ . . . = 19,200272

$\left(\frac{\frac{1}{2}n}{m}\right)^2$ . . . . = 15859 $\times 10^{15}$
= 158590 $\times 10^{14}$

$\frac{p}{m}$ . . . . = 10519 $\times 10^{14}$

$\frac{p}{m} \times \left(\frac{\frac{1}{2}n}{m}\right)^2$ . . . . = 169109 $\times 10^{14}$

Log $\left[\frac{p}{m} \times \left(\frac{\frac{1}{2}n}{m}\right)^2\right]$ . . . . = 19,228166

Log $\sqrt{\frac{p}{m} \times \left(\frac{\frac{1}{2}n}{m}\right)^2}$ . . . = 9,614083

$\sqrt{\frac{p}{m} + \left(\frac{\frac{1}{2}n}{m}\right)^2}$ . . . = 4112 $\times 10^6$
= 41120 $\times 10^5$

$\frac{\frac{1}{2}n}{m}$ . . . . = 39822 $\times 10^5$

$\sqrt{\frac{p}{m} + \left(\frac{\frac{1}{2}n}{m}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}n}{m}$ . . = 80942 $\times 10^5$

Log R^4 40,000000
Log I^2 19,165680
Log L^2 19,776682

Log $R^4I^2L^2$ 78,942362
$R^4I^2L^2$ . . . . 87570 $\times 10^{74}$

186470 $\times 10^{74}$
182745

$p = R^6s^2 - i^2R^2L^2s^2 - R^4I^2L^2 =$ 3725 $\times 10^{74}$
Log de cette quantité = 3,571126 + 74,000000
ou log p. . . . . = 77,571126
Log m 59,549160

Log $\frac{p}{m}$ 18,021966
= 14,000000 + 4,021966

$\frac{p}{m}$ . . . . = 10519 $\times 10^{74}$

Log i 9,965615
Log R^3I 39,582840
Log L. 9,888341
Log l. 9,802128

Log iR^3ILl. . . . . = 69,238924
iR^3ILl. . . . . = 17335 $\times 10^{65}$
ou = 173350 $\times 10^{64}$

Log I. 9,965615
Log L. 9,888341
Log IR. 19,582840
Log l. 9,802128
Log s^2. 19,270612

Log $iLRIls^2$. = 68,509536
$iLRLs^2$. = 32325 $\times 10^{64}$ … 32325 $\times 10^{64}$

$\frac{1}{2}n = iR^3ILl - iLRIs^2 =$ 141025 $\times 10^{64}$
= 1410 $\frac{1}{4} \times 10^{66}$

Log $\frac{1}{2}n$. . . . . = 3,149296 + 66,000000
Log $\frac{1}{2}n$. . . . . = 69,149296
Log m. . . . . . = 59,549160

Log $\frac{\frac{1}{2}n}{m}$. . . . . = 9,600136

$\frac{\frac{1}{2}n}{m}$. . . . . = 39822 $\times 10^5$

dont le logarithme est 9,908173 qui est le logarithme de *d*, c'est-dire le logarithme du cosinus de la déclinaison du plan, or ce nombre est le cosinus de 35° 58′. Ce qu'il fallait trouver.

§ LIII.

Connaître dans quel sens est l'inclinaison du plan relativement à l'axe, par le moyen de l'angle que la méridienne du lieu sur le plan fait avec la méridienne horizontale

Nous avons vu (§ XL) que $BH = \frac{aiR}{Id}$ lorsque HO est représenté par *a*, mais dans le triangle HBO rectangle en H, on a :

$$HB : HO :: R : \text{tang } HBO$$

Ainsi :

$$\text{tang } HBO = \frac{R \times HO}{BH} = \frac{aRId}{aiR} = \frac{Id}{i}$$

ou en mettant pour $\frac{I}{i}$ sa valeur $\frac{\text{tang incl.}}{R}$, on aura :

$$\text{tang } HBO = \frac{\text{tang incl.} \times \cos \text{décl.}}{R}$$

C'est-à-dire que *la tangente de l'angle que la méridienne du lieu sur le plan fait avec la méridienne horizontale, est égale au produit de la tangente de l'inclinaison par le cosinus de la déclinaison, divisé par le rayon.*

Lorsque cet angle sera plus grand que la latitude du lieu, le point de rencontre *o* de l'axe avec le plan ou le centre du cadran sera vers le haut du plan : si au contraire cet angle est plus petit que la latitude HAO du lieu, le point de rencontre qui détermine le centre du cadran sera vers le bas du plan.

Si cet angle était plus grand qu'un droit, l'inclinaison du plan serait en sens contraire de l'inclinaison de l'axe.

§ LIV.

Nous n'avons parlé des cadrans qu'en les considérant sur le côté du plan tourné vers le plan vertical élevé sur la section commune au plan incliné et au plan horizontal, parce qu'il est clair que le cadran tracé sur l'autre face sera parfaitement égal au premier, avec cette différence que le centre du cadran sera placé différemment, c'est-à-dire que, si dans le premier le centre du cadran est vers le haut du plan, il sera vers le bas sur l'autre côté du plan.

§ LV.

Jusqu'ici nous avons supposé que le soleil faisait constamment sa révolution journalière autour de la terre en vingt-quatre heures, mais on a reconnu par observation qu'il emploie quelquefois plus et quelquefois moins de vingt-quatre heures à faire cette révolution, en sorte que le calcul du temps, à raison de vingt-quatre heures par jour, ne cadre pas exactement tous les jours avec le temps vrai, cependant, au bout d'une année, il se trouve que le soleil a fait le même nombre de révolutions que s'il avait employé vingt-quatre heures exactement à faire chacune d'elles. L'année, partagée en jours égaux de vingt-quatre heures, c'est ce que l'on appelle le *temps moyen*. C'est celui d'après lequel sont réglées les horloges, parce qu'il n'est pas possible de les assujettir aux différentes variations que l'inégalité du mouvement du soleil fait subir à la longueur des jours. **Temps moyen.**

Il suit de là qu'une horloge bien réglée marquera ordinairement midi lorsque le cadran solaire marquera une heure différente; et que les cadrans faits comme nous l'avons dit ne donnent que le temps vrai, et ne peuvent pas servir à régler les horloges.

Mais comme on sait par les tables faites d'après l'observation, la différence du temps vrai au temps moyen pour tous les jours de l'année, qui est ce que l'on nomme l'équation du temps; et que l'on sait par conséquent, dans quelque jour que ce soit, à quelle distance du méridien du lieu ou à quel point de l'équateur le soleil se trouve lorsqu'il est midi au temps moyen, on peut, par les règles que nous avons données, déterminer pour un jour quelconque le point où le soleil marquera son ombre lorsqu'il sera midi au temps moyen. La courbe tracée par les points d'ombres ainsi déterminés pour tous les jours de l'année, forme ce qu'on appelle la *méridienne du temps moyen*, parce qu'en effet il sera midi au temps moyen toutes les fois que l'ombre se portera sur cette courbe. **Méridienne du temps moyen.**

On voit, par exemple : dans les tables de l'équation du temps que le 2 novembre il est 11^h 43′ 46″ au temps moyen lorsqu'il est déjà midi au temps vrai, il faudra donc chercher sur la ligne de 11^h 43′ 46″ le point où se porte l'ombre du soleil le 2 novembre (§§ XV, XVI et XVII), ce point appartiendra nécessairement à la méridienne du temps moyen : on trouvera les autres par la même méthode.

La courbe ainsi tracée, à commencer du 24 décembre où le temps moyen s'accorde avec le temps vrai, partira de la ligne qui marque sur le cadran le midi du lieu, elle s'en écartera ensuite progressivement pendant un certain temps et viendra la recouper le 15 avril, puis elle s'écartera de nouveau du côté opposé, et s'en rapprochera de manière à y arriver le 15 juin; de là la courbe repassera au

premier côté de la méridienne, et après s'en être éloigné d'une certaine quantité, elle viendra la recouper le 1er septembre; enfin après s'être écartée de l'autr côté pour la deuxième fois, elle viendra se refermer au point du 24 décembre. En sorte que cette courbe doit avoir à peu près la forme du chiffre 8 traversé à peu près dans son milieu par la méridienne du lieu.

§ LVI.

Nous n'avons, dans le § LV, considéré qu'une seule des faces des plans pour y tracer des cadrans. Il est évident que ceux que l'on tracerait sur la face opposée, sont parfaitement égaux aux premiers, avec cette différence seulement, que si le centre du cadran occupait dans le premier cas la partie haute du cadran, il sera placé dans le second vers la partie basse, et réciproquement : parce qu'ils font alors face à des pôles opposés.

Développement de quelques problèmes de gnomonique par la trigonométrie sphérique.

(Extrait du Mémoire de M. Picart en 1699).

3e PROBLÈME.

Planche IV. *Deux points d'ombre étant donnés par observation, trouver la hauteur du pôle sur le plan, et la ligne soustylaire, supposé comme la déclinaison du soleil.*

Fig. a. On mesurera la hauteur AC du style, et les distances AB, AD du pied du style aux points d'ombre B et D : avec cette hauteur et chacune de ces distances, on formera deux triangles rectangles ; l'angle ACB de l'un et l'angle ACD de l'autre, exprimeront les distances du zénith au soleil dans les instants où les points correspondants B et D ont été observés. On mesurera ou l'on calculera aussi l'angle BAD que font entre elles les deux lignes d'ombre AB et AD.

Fig. b. Cela posé, si l'on représente par ACBK le méridien du plan ; que P soit le pôle du monde, C le zénith du plan, et le soleil supposé aux points E et F dans les moments où l'on a observé les deux points d'ombre : l'arc CE sera exprimé par l'angle ACB, et l'arc CF par l'angle ACB. Avec ces deux côtés, et l'angle ECF qui est celui des deux lignes d'ombre, on calculera dans le triangle ECF la distance EF entre les deux positions du soleil dans les instants où les observations ont été faites : on calculera aussi l'angle EFC.

Si l'on imagine ensuite les arcs PE et PF menés du pôle aux points de position

du soleil, ces arcs étant les compléments de la déclinaison seront connus, mais nous venons de calculer EF, ainsi les trois côtés du triangle PFE seront connus; on pourra donc calculer l'angle PFE. La différence entre cet angle et l'angle calculé EFC fera connaître l'angle PFC du triangle PFC, dans lequel on connaît d'ailleurs les deux côtés PF et CF. On pourra donc calculer le côté PC qui est la distance du pôle au zénith du plan, et par conséquent le complément de la hauteur du pôle sur le plan, première chose cherchée. On calculera aussi l'angle PCF qui est celui que la soustylaire fait avec la ligne d'ombre AD, ainsi la soustylaire sera aussi trouvée; c'est la deuxième partie du problème.

4e PROBLÈME.

La soustylaire et un point d'ombre étant donnés, trouver la hauteur du pôle sur le plan, supposé qu'on sache la déclinaison du soleil au moment où le point d'ombre a été observé.

Au moyen de la longueur de l'ombre observée et de la hauteur du style, on connaîtra comme au problème précédent la distance CF du zénith C du plan au soleil, au moment de l'observation; et la soustylaire étant donnée on prendra l'angle qu'elle fait avec la ligne d'ombre, ce sera l'angle PCF du triangle PCF, dans lequel, outre cet angle et le côté CF, on connaîtra encore le côté PF complément de la déclinaison du soleil; ainsi l'on aura assez de données pour calculer le troisième côté PC qui est le complément de la hauteur du pôle cherchée. Fig. 6.

5e PROBLÈME.

La hauteur du pôle sur le plan, un point d'ombre et la déclinaison du soleil étant donnés, trouver l'angle que fait la soustylaire avec la ligne d'ombre.

L'arc CP est le complément de la hauteur du pôle donnée, on calculera, au moyen du point d'ombre et de la hauteur du style, l'arc CF qui est la distance du zénith du plan au soleil, enfin le côté PF est le complément de la déclinaison donnée du soleil dans le triangle CPF; les trois côtés seront connus, et l'on pourra par conséquent trouver l'angle PCF qui est l'angle que la ligne d'ombre fait avec la soustylaire, ou son supplément. Fig. 6.

6e PROBLÈME.

L'angle de la soustylaire avec la verticale, la hauteur du pôle du lieu et l'inclinaison du plan, s'il y en a, étant donnés, trouver la hauteur du pôle sur le plan, la différence des méridiens, et la déclinaison du plan.

Fig. 6. Soit représenté le méridien du lieu par le cercle PGBR ; soit P le pôle le plus voisin du zénith G du lieu ; PCB le méridien du plan, en sorte que C soit son zénith ; CGR sera le vertical commun et CG la distance du zénith du plan au zénith du lieu.

Or dans le triangle GPC, GP est donné, c'est le complément de la hauteur du pôle du lieu ; GC est aussi donné par l'inclinaison du plan, et l'angle PCG est également connu, puisqu'il représente celui que la soustylaire fait avec la verticale. On pourra donc calculer les autres parties de ce triangle, savoir : le côté CP, complément de la hauteur du pôle, sur le plan ; l'angle CPG, qui est la différence des méridiens du lieu et du plan ; et, enfin, l'arc GP, qui exprime la déclinaison du plan, ou son supplément.

Remarque. Dans le triangle CPG, on a : sin : GC : sin PG :: sin CPG : sin PCG, ainsi sin CPG = sin PCG multiplié par sin : GC, divisé par sin PG, c'est-à-dire que *le sinus de la différence des méridiens est égal au produit de l'angle de la soustylaire avec la verticale par le sinus de l'inclinaison du plan, divisé par le cosinus de la hauteur du pôle du lieu.*

Dans le même triangle, on a :

$$\sin P : \sin G :: \sin CG : \sin PC$$

Ainsi

$$\sin PC = \frac{\sin GC \times \sin G}{\sin P} = \frac{\sin \text{incl.} \times \sin \text{décl.}}{\sin P}$$

mettant pour sinus P sa valeur trouvée ci-dessus, on a :

$$\sin PC = \frac{\sin \text{décl.} \times \cos \text{lat.}}{\sin PCG}$$

C'est-à-dire que *le cosinus de l'élévation du pôle sur le plan est égal au sinus de la déclinaison du plan multiplié par le cosinus de la latitude du lieu, divisé par le sinus de l'angle que la soustylaire fait avec la verticale.*

7e PROBLÈME.

La plus courte ombre ou la hauteur du pôle sur le plan, la hauteur du pôle du lieu et l'inclinaison étant données, trouver la soustylaire, la différence des méridiens et la déclinaison du plan.

Fig. 6. On connaît par les données du problème les trois côtés du triangle CPG, car PG est le complément de la latitude du lieu ou de la hauteur du pôle du lieu, PC est le complément de la hauteur du pôle sur le plan, et CG, la distance du zénith du plan au zénith du lieu, est donné par l'inclinaison donnée ; on pourra donc calculer les trois angles, qui sont les inconnues cherchées dans ce problème

Il faut remarquer que la détermination précédente par l'angle de la soustylaire avec la verticale, est préférable à celle-ci lorsque le plan décline peu, parce qu'alors pour beaucoup de changement à l'angle de la soustylaire avec la verticale, il en arrive peu à la hauteur du pôle sur le plan; mais quand il y a beaucoup de déclinaison du plan, c'est tout le contraire.

Ce problème et le précédent sont, dans la pratique, toujours préférables au 4ᵉ et au 5ᵉ.

8ᵉ PROBLÈME.

Un point d'ombre, la déclinaison du soleil, la hauteur du pôle, du lieu, et l'inclinaison du plan étant donnés, trouver la hauteur du pôle sur le plan.

P étant supposé au pôle, G au zénith du lieu, et C au zénith du plan, et le soleil placé en S au moment de l'observation, le point d'ombre donné fera connaître la longueur de l'ombre, et par la hauteur du style la distance du soleil au zénith du plan : c'est l'arc CS; la distance CG entre les deux zéniths est donnée par l'inclinaison du plan; enfin l'angle CGS compris entre ces deux côtés est égal à l'angle qu'une verticale du plan fait avec la ligne d'ombre; ainsi dans ce triangle on pourra calculer SG, qui est la distance du soleil au zénith du lieu, ainsi que l'angle CSG. Fig. d.

Mais dans le triangle PSG nous venons de trouver SG; PS est le complément de la déclinaison du soleil, PG le complément de la hauteur du pôle du lieu; on pourra donc, dans ce triangle, calculer l'angle GSP; la différence de cet angle et de l'angle CSG trouvé dans le premier triangle donnera l'angle CSP, en sorte que dans le triangle PCS, outre cet angle, on connaît les côtés PS et CS entre lesquels il est compris, on trouvera donc CP, qui est le complément de la hauteur du pôle sur le plan. Ce qu'il fallait trouver.

Si le point d'ombre était pris sur la verticale du plan, le problème aurait une solution plus prompte et plus simple; en effet le soleil se trouverait alors en un point S du vertical commun, et l'on connaît CS par la longueur de l'ombre et par la hauteur du style, CG est connu par l'inclinaison du plan; ainsi on connaîtra GS par une simple soustraction, de manière que les trois côtés du triangle GSP seront connus; ainsi on pourra calculer l'angle PSG, son supplément sera l'angle PSC du triangle PSC, dans lequel on connaît d'ailleurs les côtés PS et CS; on trouvera donc CP, complément de la hauteur cherchée. Fig. e.

9ᵉ PROBLÈME.

Le mêmes choses que dans le 8ᵉ problème étant données, trouver la déclinaison du plan.

On connaîtra GS et l'angle CGS comme dans le problème précédent, on cher- Fig. d.

chera dans le triangle SPG, où les côtés sont connus, l'angle PGS ; la différence de cet angle avec l'angle CGS donnera l'angle PGC, qui est la déclinaison du plan ou son supplément.

10° PROBLÈME.

Par l'observation du soleil qui est faite lorsqu'il rase le plan, trouver la déclinaison du plan, supposé que l'on sache la déclinaison du soleil, la hauteur du pôle du lieu et l'inclinaison du plan.

Pour connaître par observation quand le soleil rase le plan, c'est-à-dire quand il est dans le plan du cadran, il faut avoir une grande règle sur le plat de laquelle il y ait deux pinnules dressées aux deux bouts, dont l'une soit percée au centre pour laisser passer les rayons du soleil, et l'autre disposée de manière à les recevoir sur un cercle dont le centre soit correspondant au trou de la première pinule; cette règle, ainsi préparée, sera appliquée de plat contre le plan, et pointée continuellement vers le soleil, jusqu'à ce que l'image du soleil tombe justement dans le cercle de la deuxième pinnule; alors sans déplacer la règle on tracera une ligne qui représentera le rayon du soleil au moment où il aura rasé le plan, supposé que le côté de la règle soit bien parallèle à la ligne des centres des pinnules.

On mesurera ensuite l'angle que la ligne ainsi tracée fera avec la verticale.

Fig. *f*, *g* et *h*. Soit AD le grand cercle de la sphère parallèle au plan du cadran ; C son zénith ; P le pôle élevé sur le plan ; G le zénith du lieu qui sera dans le plan du cadran s'il n'y a point d'inclinaison (*fig. f*) ; S le centre du soleil placé dans le plan du cadran au moment de l'observation ; H le point d'intersection du même plan avec la verticale commune CG. L'arc SH sera mesuré par l'angle formé par la verticale du plan et par le rayon mené du pied du style au soleil au moment où il rase le plan.

Ainsi dans le triangle SPG (*fig. f*), lorsque le point G se confond avec le point H à cause de l'inclinaison nulle, on connaîtra SH et SG par l'angle de la verticale avec la ligne tracée dans l'observation, PS complément de la déclinaison du soleil, et PG, complément de la hauteur du pôle du lieu ; on pourra donc calculer l'angle SGP dont le complément CGP sera la déclinaison du plan.

Si le plan est incliné, le zénith G du lieu se trouvera hors du plan. Mais le triangle GSH sera rectangle et l'on y connaîtra SH comme au cas précédent, et GH par l'inclinaison du plan : on trouvera donc SG et l'angle SGH ; en sorte que dans le triangle SGP, où PS et PG sont donnés par la déclinaison du soleil et par la latitude du lieu, on connaîtra les trois côtés avec lesquels on calculera l'angle

SGP; ainsi en prenant la somme ou la différence de cet angle et de l'angle SGH, on aura l'angle PGC qui détermine la déclinaison.

11ᵉ PROBLÈME.

La déclinaison du plan étant donnée, trouver la hauteur du pôle sur le plan, la ligne soustylaire et la différence des méridiens, supposé la hauteur du pôle du lieu et l'inclinaison du plan.

Par les données on connaît dans le triangle PCG, CG distance du zénith du plan au zénith du lieu, connue par l'inclinaison du plan, PG complément de la hauteur du pôle du lieu, et l'angle PGC connu par la déclinaison; on pourra donc calculer toutes les autres parties de ce triangle; le côté PC sera le complément de la hauteur du pôle sur le plan; l'angle PCG, qui est celui que la soustylaire fait avec la verticale, et enfin l'angle CPG, qui est la différence des méridiens du lieu et du plan. Fig. e.

12ᵉ PROBLÈME.

La déclinaison du plan et son inclinaison étant donnée, trouver l'obliquité de la ligne méridienne.

Dans les fig. *f*, *g* et *h*, la ligne méridienne du lieu sera dirigée du pied du style au point où le méridien du lieu PG est coupé par le plan du cadran; or dans la fig. *f*, où l'inclinaison est supposée nulle, le méridien du lieu ne rencontre le plan du cadran qu'au zénith G; ainsi dans ce cas la méridienne du lieu est verticale dans le plan du cadran.

Dans les fig. *g* et *h*, la méridienne du lieu va du pied du style au point où le méridien du lieu PG est coupé par le plan du cadran; or dans la fig. *f*, où l'inclinaison est supposée nulle, le méridien du lieu ne rencontre le plan du cadran qu'au zénith G; ainsi, dans ce cas, la méridienne du lieu est verticale dans le plan du cadran.

Dans les fig. *g* et *h* la méridienne du lieu va du pied du style au point I, et la verticale du plan va au point H, où ce point coupe la circonférence CG du vertical commun; ainsi l'arc HI sera la mesure de l'obliquité de la ligne méridienne; mais dans le triangle GHI, GH est connu par l'inclinaison; l'angle IHG est droit, et l'angle IGH est la déclinaison donnée du plan; on pourra donc calculer l'angle ou l'arc cherché GI.

Remarque. Dans le triangle rectangle GHI on a :

$$\text{tang HI} = \frac{\text{tang HGI} \times \sin \text{GH}}{\text{R}}$$

c'est-à-dire que *la tangente de l'angle que la méridienne du lieu fait avec la verticale du plan, est égale à la tangente de la déclinaison du plan multiplié par le cosinus de son inclinaison, divisée ensuite par le rayon.*

13e PROBLÈME.

La différence des méridiens étant donnée, trouver l'heure de la soustylaire.

On réduira cette différence en temps à raison de 15° pour une heure, et le produit en sera compté depuis midi si le plan est vers l'occident; si au contraire le plan tourne à l'orient, ce produit sera retranché de 12 heures, le reste sera l'heure de la soustylaire.

14e PROBLÈME.

Fig. 1. *La hauteur du pôle étant donnée, trouver la moitié du plus grand jour.*

Soit HL l'horizon parallèle au plan du cadran, AQ l'équateur, P le pôle, S le point de l'écliptique où le soleil a la plus grande déclinaison. Si l'on imagine l'arc PS mené par le pôle au soleil prolongé jusqu'à l'équateur qu'il rencontre en D, l'angle D sera droit et l'arc OD marquera l'excès de la moitié de l'arc diurne du plus grand jour sur la moitié AO de l'arc diurne équinoxial, c'est-à-dire son excès sur six heures. Or dans le triangle rectangle OSD on connaît DS, qui est égal à la plus grande déclinaison du soleil ou à l'obliquité de l'écliptique; on connaît aussi l'angle O, qui est l'élévation de l'équateur, et par conséquent le complément de la hauteur du pôle du lieu; on connaîtra donc l'arc OD, que l'on réduira en temps pour l'ajouter à six heures et avoir pour leur somme la moitié du plus grand jour.

Or : $\sin OD = \frac{\cot O \times \text{tang } DS}{R}$, ainsi *le sinus de l'arc qu'il faut ajouter à 90° pour la moitié du plus grand jour, est égal au produit de la tangente de la hauteur du pôle du lieu par la hauteur de l'obliquité de l'écliptique, divisée par le rayon.*

15e PROBLÈME.

Déterminer les heures qui doivent être marquées sur un plan donné.

Si le plan est horizontal, le problème se trouvera résolu en déterminant les heures du plus long jour.

Si le plan regarde le même pôle que le plan horizontal, il faudra chercher l'heure de la soustylaire, en retrancher la moitié du plus grand jour du plan pour avoir l'heure du lever relativement au plan, et ajouter à cette heure de la soustylaire la moitié du plus grand jour du plan pour avoir l'heure du coucher pour

ce plan : mais il faut savoir si le soleil, aux heures trouvées, sera sur l'horizon du lieu; ce qui est facile, en employant l'heure du lever ou celle du coucher au plus grand jour du lieu.

Pour les plans méridionaux dans un lieu septentrional, au contraire il faut trouver l'heure à laquelle le soleil se couche où se lève à l'égard du plan proposé; ce qui suppose la hauteur du pôle du lieu et la déclinaison du plan : on fera donc (la proportion), *comme le rayon est au sinus de la hauteur du pôle du lieu, ainsi la tangente de la déclinaison du plan est à la tangente d'un arc, qu'il faudra ôter de 90° ou de six heures si le plan est oriental, ou bien qu'il faudra ajouter à six heures si le plan est occidental. L'heure ainsi trouvée sera la première ou la dernière qu'il faudra marquer sur le plan.*

Cette partie soulignée de la solution du problème est copiée littéralement sur le mémoire de M. Picart; mais il paraît que la proportion qui fait connaître la quantité qu'il faut combiner avec six heures est fausse, car dans le cas dont il est ici question, le plan du cadran et le plan horizontal font face à des pôles opposés. Ainsi, quand les arcs diurnes croissent pour l'un, ils décroissent pour l'autre, et le plus grand jour pour l'un et pour l'autre, en supposant qu'ils puissent se porter empêchement respectivement par leurs horizons, sera celui où le soleil se lèvera ou se couchera au point d'intersection de ces horizons; et ce plus grand jour qui a lieu pour le plan, parce qu'en effet il reçoit empêchement par l'horizon du lieu, ne sera jamais de plus de douze heures, parce que les deux horizons se coupent en des points communs avec l'équateur et le partagent en deux parties égales : ce plus grand jour sera donc au temps de l'équinoxe. Or, le soleil étant dans l'équateur, la différence entre les origines des arcs diurnes pour le plan horizontal et pour un plan vertical déclinant est évidemment égale à la différence de leurs méridiens; et quelle que soit l'inclinaison du plan supposé, son horizon coupe l'horizon du lieu aux mêmes points où celui-ci est coupé par l'horizon du plan vertical, de même déclinaison que le plan supposé. Ainsi, quelle que soit la situation du plan supposé, la différence de l'origine de son arc diurne avec l'origine de l'arc diurne du lieu sera égale à la différence des méridiens du plan horizontal et du plan vertical de même déclinaison que le plan supposé : c'est-à-dire que, s'il est oriental, le lever pour le plan devancera six heures d'une quantité égale à cette différence des méridiens, et s'il est occidental il retardera au contraire de cette quantité. L'inverse aura lieu pour le coucher.

Mais (§ XXXI) la différence des méridiens du plan horizontal et d'un plan vertical déclinant est égale au produit de la tangente de la déclinaison multipliée par le rayon, divisé par le sinus de la hauteur du pôle du lieu. Ainsi, la proportion ci-dessus est fausse; car elle donnerait cette différence égale au produit de la tangente de la déclinaison multipliée par le sinus de la hauteur du pôle divisé

par le rayon. Donc la même formule qui sert à trouver la susdite différence des méridiens servira à la solution de ce problème.

Tracé graphique des cadrans sur toutes sortes de plans.

Du gnomon et de la soustylaire.

1. Une plaque opaque, percée d'un trou évidé pour laisser passer librement un rayon de lumière, étant soutenue au-dessus d'un plan au moyen d'un ou plusieurs supports, forme un gnomon. Le point qui répond dans le plan perpendiculairement au trou de la plaque est le pied du gnomon. Si du pied du gnomon on trace un arc de cercle sur le plan, et que l'on marque sur cet arc les deux points où la lumière du soleil se portera en passant au travers du gnomon, et que l'on divise la partie de cet arc comprise entre les deux points observés, par une ligne menée du pied du gnomon, cette ligne sera la soustylaire du plan.

De la déclinaison.

2. Si l'on imagine un plan quelconque coupé par un plan horizontal sur lequel on a tracé, comme nous venons de le dire, une soustylaire ou une méridienne; l'angle que la méridienne fera avec la section de ces deux plans marquera la déclinaison du plan qui n'est pas horizontal.

Méridienne.

3. La soustylaire se confond ou, pour mieux dire, devient elle-même la méridienne du lieu où l'on est, lorsque la déclinaison du plan sur lequel elle est située est nulle.

Ce qu'il faut connaître pour faire un cadran sur un plan donné.

4. Il suffit de connaître la soustylaire d'un plan ou sa déclinaison pour y pouvoir tracer un cadran, pourvu que l'on connaisse aussi la latitude du lieu et la situation du plan relativement à l'horizon du lieu.

Fig. I. Équinoxial.

5. Soit tirée la ligne *ab* (*fig.* I) pour représenter une méridienne et ayant fait l'angle *bac* égal à la latitude du lieu, soit menée par un point quelconque *c* de la ligne *ac* la perpendiculaire *cb* (*) : le point *b* ainsi déterminé fixera la position de la ligne équinoxiale *fg*, que l'on mènera par ce point *b* perpendiculairement à la méridienne.

Limites de l'ombre.

Si l'on fait chacun des angles *bce*, *bcd*, de 23° 28′, les points *e* et *d* ainsi déterminés seront les limites de l'ombre du point *c* du style *ac* sur la méridienne; ainsi l'ombre du style entier occupera la longueur *ad*. Mais si, au lieu d'un style on n'emploie qu'un seul point *c*, comme le trou d'une plaque, alors il suffira de donner au cadran la longueur *ed*, pour que l'ombre soit toujours à midi sur le plan.

Grandeur du cadran, ou hauteur du point portant l'ombre.

6. Lorsque l'on emploie un style, il n'importe guère que l'ombre soit terminée sur le plan : mais c'est d'après ce que nous venons de dire que l'on peut toujours juger de la grandeur que doit avoir un cadran, lorsque le style en donne la

(*) *cb* est perpendiculaire à *ac*. T. O.

grandeur ; ou de la hauteur que doit avoir le point *c* au-dessus du plan, si c'est la grandeur du cadran qui est donnée.

7. La méridienne AB d'un plan horizontal étant donnée, tracer le cadran de manière que les heures soient marquées par un style. Fig. II.

On déterminera l'équinoxiale GF (n° 1) ; puis, ayant pris sur AB, à commencer du point B d'un côté ou de l'autre, la ligne BH $=$ *bc* (*fig.* I), on décrira du point H, comme centre, la demi-circonférence IRK à laquelle GF sera tangente ; ensuite on divisera cette demi-circonférence en douze parties égales aux points 1, 2, 3, 4, etc. ; on mènera, par ces points de division, des rayons prolongés jusqu'à l'équinoxiale GF, et du point A on mènera aux points où cette ligne aura été coupée des lignes qui marqueront les heures comprises entre six heures du matin et six heures du soir. La ligne VI—A—VI, menée par le point A perpendiculairement à la méridienne, sera la ligne de six heures tant du matin que du soir. Les lignes qui doivent marquer les heures, avant ou après, sont déterminées par le prolongement de leurs correspondantes déjà tracées ; en sorte qu'en prolongeant, par exemple, la ligne de cinq heures du soir, on aura, de l'autre côté du point A, la ligne de cinq heures du matin ; ainsi des autres. Les lignes horaires étant tracées, il ne reste plus qu'à placer le style *ac* (*fig.* I) dans le plan vertical élevé sur la méridienne, le point *a* sur le point A et de manière qu'il fasse avec AB un angle égal à l'angle *bac* (*fig.* I).

Si l'on voulait avoir des lignes pour les demi ou les quarts d'heures, etc., il n'y aurait qu'à subdiviser proportionnellement les arcs 12-1, 1-2, 2-3, etc., qui ont servi pour trouver les lignes des heures entières, et achever la construction comme pour les heures.

8. Si au lieu d'un style on voulait employer un gnomon, il faudrait faire AO $=$ *ao* (*fig.* I), et placer le gnomon de manière que le trou de sa plaque fût élevé perpendiculairement au-dessus du point O et éloigné de ce point d'une quantité égale à *co* (*fig.* I). Fig. II et III.

Si le gnomon était placé d'avance sur le plan, le point O serait donné et le point A indéterminé. On porterait alors la hauteur connue *oc* du gnomon sur un côté *on* d'un angle droit *mon*, et par le point *c* ainsi déterminé, on mènerait la ligne *ca* qui, faisant avec *co* l'angle *aco* égal au complément de la latitude du lieu, fixerait sur l'autre côté de l'angle droit la longueur *ao*, que l'on porterait de O en A (*fig.* II) le point A ainsi trouvé, on construirait le cadran comme il a été dit ci-dessus. Fig. III.

9. Pour marquer le point où doit se porter l'ombre d'un point déterminé *c* du style (*fig.* I), où la lumière passant par le trou *c* d'une plaque dans un instant donné, dans lequel on connaît la déclinaison du soleil, il faudrait revenir aux lignes qui ont servi à la construction. Fixer le point où se porte l'ombre dans un instant donné.

Fig. II et IV.

Ayant fait ar = à la partie AR de la ligne horaire qui répond à l'instant donné, comprise entre le point A et l'équinoxial, on décrira sur cette ligne une demi-circonférence sur laquelle on marquera le point c, en faisant ac = à la partie du style comprise entre le point donné c et l'origine A du style, ou égale à la distance du trou de la plaque au point A, et l'on tirera la ligne cr; on fera ensuite l'angle rcs égal à la déclinaison du soleil, ce qui déterminera le point s en dehors de l'angle acr, depuis l'équinoxe du printemps jusqu'à l'équinoxe d'automne, et en dedans le reste de l'année; on portera ensuite rs sur AR, de R en S, et l'on aura ainsi le point S que l'on cherche.

Méridienne du temps moyen.

10. On tracera par cette méthode une méridienne du temps moyen, en marquant l'ombre du point c pour tous les jours de l'année, ou au moins de cinq en cinq jours, à l'instant où il est midi au temps moyen, ce que l'on connaît par les tables que l'on trouve dans certains almanachs. Si l'on sait, par exemple, que le 2 novembre il est midi au cadran tandis qu'il n'est encore que onze heures quarante-quatre minutes au temps moyen, c'est-à-dire que l'équation du temps est de seize minutes, on cherchera l'ombre du point c sur la ligne de onze heures quarante-quatre minutes, en employant l'angle rcs pris en dedans de 14° 48′, qui est la déclinaison du soleil le 2 novembre. On trouverait de même les autres points de la courbe que l'on nomme la méridienne du temps moyen.

Cadran vertical déclinant, la soustylaire étant donnée.

Fig. V et VI.

11. Pour tracer un cadran vertical déclinant dont on a la soustylaire, on choisira un point c de cette ligne pour être le centre du cadran; de ce point on abaissera la verticale indéfinie CM, sur laquelle on prendra CB à volonté, puis ayant élevé sur une ligne indéfinie ab (*fig.* VI) la perpendiculaire bc = CB, on fera l'angle bca égal au complément de la latitude, ce qui terminera la ligne ab; on tirera par le point B une ligne horizontale qui coupera la soustylaire au point E, et à ce dernier point on mènera une verticale indéfinie que l'on recoupera en un point A, en décrivant un arc du point B comme centre, et avec ab pour rayon.

On fera ensuite EF perpendiculaire à la soustylaire et égale à EA, et l'on tirera la ligne CF sur laquelle on mènera, par le point F, la perpendiculaire FK qui déterminera sur la soustylaire le point K de l'équinoxiale GH qui doit être perpendiculaire à la soustylaire. On prendra sur la soustylaire, à commencer du point K, KL = KF; ce sera le rayon du cercle qui doit servir à trouver les lignes horaires dans ce cadran, comme dans un cadran horizontal (n° 7). Mais, au lieu de commencer la division de la circonférence au point tangent K, il faudra la commencer au point N de cette circonférence déterminé par la droite menée du point central L au point M, où la verticale CB, abaissée du centre du cadran, coupe l'équinoxiale GH, parce que cette ligne verticale est celle qui doit marquer midi pour le lieu.

On placera le style dans le plan élevé sur la soustylaire CE perpendiculairement au plan vertical, de manière que l'origine du style soit au point *c*, et qu'il fasse avec la soustylaire un angle égal à l'angle ECF.

12. Si l'on voulait, au lieu d'un style, employer un gnomon, on porterait dans l'angle ECF, perpendiculairement à CE, la hauteur SQ que l'on voudrait donner à ce gnomon, et on le placerait perpendiculairement au plan au-dessus du point Q ainsi déterminé. Fig. V.

13. Si le gnomon était placé d'avance sur le plan ; si, par exemple, on voulait employer à marquer les heures celui qui aurait déjà servi à trouver la soustylaire (n° 1), son pied Q serait donné sur la soustylaire, et sa hauteur SQ serait déterminée. Pour achever le cadran, on mènera par un point quelconque C de la soustylaire une verticale CB, et l'on déterminera, comme ci-dessus (n° 11), la position de la ligne AB, au moyen de l'horizontale BE prise à volonté; puis ayant mené par le point Q une ligne horizontale QT indéfinie et une ligne verticale QR égale à QS, on mènera par le point R la ligne QT parallèle à AB, qui, par son intersection avec l'horizontale QT, fixera le point T par lequel on mènera une ligne verticale TX, qui coupera la soustylaire en un point X qui sera le centre du cadran. On tirera la ligne SX en se servant de cette ligne et de la ligne SQ perpendiculaire à la soustylaire, comme on a fait (n° 11) des lignes CF, FE (n° 5). Fig. V et VII.

14. L'angle BAE, déterminé comme nous l'avons dit (n° 11), exprime la déclinaison du plan. **Déclinaison du plan déterminée par la soustylaire.**

15. L'angle KLM est la différence des méridiens du lieu et du plan du cadran. Quand l'angle se portera sur CM, il sera midi pour le lieu, et quand elle se portera sur la soustylaire CE, il sera midi pour le plan ou pour l'horizon de la terre qui est parallèle à ce plan. **Différence des méridiens.**

16. Ce que nous avons dit (n°s 1 et 2), pour ce qui concerne la grandeur des cadrans relativement à la hauteur du gnomon, peut s'appliquer ici, en raisonnant sur le triangle CSQ (*fig.* V), comme nous l'avons fait sur le triangle *aco* (*fig.* I). Il en est de même pour tout ce qui a été dit concernant la méridienne du temps moyen (n°s 9 et 10). Fig. V.

17. Pour faire un cadran sur un plan vertical déclinant par le moyen de la déclinaison connue de ce plan, on fera l'angle *mon* égal à cette déclinaison, puis, ayant mené dans le plan une verticale indéfinie CZ pour servir de ligne de midi du lieu, et pris à volonté le point C de cette ligne pour être le centre du cadran, on mènera par un autre point B de cette ligne, pris à volonté, l'horizontale indéfinie BK, dont on déterminera la longueur en faisant l'angle BCK égal au complément de la latitude du lieu. On portera la ligne BK sur un des côtés de l'angle *mon* (*fig.* VIII) en *or*, et par le point *r* ainsi déterminé, on mènera *rp* per- Fig. VIII et XIX.

pendiculairement sur l'autre côté du même angle, ce qui donnera la ligne rp que l'on portera de B en E sur l'horizontale BK ; la ligne CE, tirée du point C au point B, sera la soustylaire du plan avec laquelle on tracera le cadran comme il a été dit (n° 11).

Cadrans sur des plans déclinants septentrionaux.

18. Les cadrans dont on vient de parler sont supposés tracés sur la face des plans verticaux qui est tournée vers le midi ; mais le cadran tracé sur l'autre face est parfaitement égal à celui dont nous avons parlé, avec la seule différence qu'il est dans une position renversée : le centre qui, dans les cadrans dont nous avons parlé, était placé vers le haut du cadran, sera placé pour les autres dans la partie inférieure ; et tout ce que nous avons dit pour la construction des premiers convient parfaitement aux seconds.

Cadrans méridionaux ou septentrionaux.

19. Si le plan vertical n'avait point du tout de déclinaison, on le construirait comme un cadran horizontal en employant, au lieu de la latitude du lieu, le complément de cette latitude.

Cadrans orientaux ou occidentaux.

Fig. X.

20. Si le plan vertical déclinait de 90°, c'est-à-dire s'il était parfaitement oriental ou occidental, la soustylaire CE ferait, avec la verticale CZ, un angle égal au complément de la latitude du lieu. Le cadran n'aurait point de centre, le style n'aurait pas de hauteur ; MN ou MQ, hauteur prise à volonté, se placerait avec des supports dans le plan élevé perpendiculairement sur la soustylaire, et dans une position parallèle à cette ligne. Toutes les lignes horaires seraient parallèles à la soustylaire ; et pour les placer on ferait PF perpendiculaire à la soustylaire, et ayant pris sur la soustylaire, à commencer du point B où elle est coupée par la perpendiculaire PF, un rayon AB = MP ou = NQ, on décrirait une demi-circonférence que l'on diviserait, en commençant au point B, à raison de 15° pour chaque heure ; les rayons menés par les points de division prolongés jusqu'à la tangente PF détermineront sur cette ligne un point pour chaque ligne d'heures. Ainsi, en menant par ces points des lignes parallèles à la soustylaire, on aurait les lignes horaires du cadran ; la soustylaire marquerait six heures du matin ou six heures du soir, suivant que le plan serait oriental ou occidental. Les heures du matin ne seraient que dans le premier, en allant du haut en bas du cadran, et les heures du soir, dans le second, seulement elles y seraient placées en allant du bas au haut du cadran.

Cadran équinoxial. Cadrans sur des plans inclinés.

21. Un simple cercle, divisé par des rayons de 15° en 15° pour les heures et proportionnellement pour des fractions d'heure, étant traversé perpendiculairement par un axe, servirait de cadran, en le plaçant de manière que cet axe fût dans le plan vertical élevé sur une méridienne horizontale, et qu'il fît avec elle un angle égal à la latitude du lieu.

22. Le plan peut être incliné du même côté que l'axe du monde et avoir moins

d'inclinaison que cet axe, c'est le premier cas (*fig.* XI, XII, XIII et XIV); ou être plus incliné que l'axe, c'est le deuxième cas (*fig.* XV, XVI, XVII et XVIII).

Les deux autres cas supposent l'inclinaison en sens contraire de l'axe.

Mais, en comparant ainsi l'inclinaison de l'axe à celle du plan, on suppose les angles d'inclinaison vus dans le même plan. La construction est la même pour tous ces cas : nous allons la détailler de manière qu'on puisse la suivre dans les figures qui ont rapport à chacun d'eux. Nous supposerons seulement la déclinaison du plan connue.

Figures: XI, XII, XIII et XIV; XV, XVI, XVII et XVIII; XIX, XX, XXI et XXII; XXIII, XXIV, XXV et XXVI.

Soit fait 1° un triangle rectangle *ade*, dans lequel l'angle *ead* marque la latitude du lieu (*fig.* XI, XV, XIX, XXIII).

2° Un triangle rectangle *gfh*, dans lequel l'angle *fgh* marque l'inclinaison du plan prise dans un plan perpendiculaire aux lignes horizontales de ce plan, c'est-à-dire l'angle que ce plan fait avec un plan horizontal (*fig.* XII, XVI, XX, XXIV).

3° Un triangle *ikl* également rectangle, dans lequel l'angle *ikl* marque la déclinaison du plan (*fig.* XIII, XVII, XXI, XXV).

Cela posé on mènera sur le plan une ligne verticale MN, ou pour mieux dire une ligne perpendiculaire aux lignes telles que *op* horizontales dans ce plan, puis ayant pris sur le côté *ad* du premier triangle, la grandeur *ab* à volonté, à commencer du point *a*, et mené *bc* parallèlement à *de*, on portera cette longueur *ab* sur l'hypothénuse *kl* du troisième triangle de *k* en *q*, et l'on mènera *qr* parallèlement à *il*, ou perpendiculairement à *ki*. Ayant ainsi déterminé la longueur *kr*, on la portera sur le côté *gf* du deuxième triangle de *g* en *s*, du côté opposé à celui vers lequel penche le plan dans les deux premiers cas, et du même côté vers lequel il penche dans les deux autres, en sorte que pour les deux premiers cas, il faudra prolonger *gf*. Dans ce même triangle on élèvera au point *g* sur *gf* la perpendiculaire *gt* égale à *bc* du premier triangle; on tirera ensuite *st*, qui, étant prolongé dans les deux premiers cas, rencontrera le profil *gh* du plan incliné au point *v*; on abaissera de ce point *v* sur *gf* la perpendiculaire *vx*; cela déterminera la longueur *gx* que l'on portera sur le côté *ki* du troisième triangle de *k* en &, et l'on mènera &*z* parallèle à : *il*.

On prendra dans le deuxième triangle *gv*, et on la transportera sur la verticale MN du plan, au-dessus et au-dessous du point B pris à volonté pour représenter sur le plan le point *g* du triangle, suivant que le point *v* se trouvera lui-même au-dessus ou au-dessous du point *g*. Ayant ainsi déterminé la position du point K sur le plan, on mènera par ce point une ligne horizontale KC égale à la ligne &*z* du troisième triangle, à droite ou à gauche du point K, suivant que le plan

aura sa déclinaison occidentale ou orientale. On aura par ce moyen le centre C du cadran.

Du point *t* du deuxième triangle on mènera *tm* perpendiculairement au profil *gv* du plan incliné, et l'on portera la longueur *gm* sur la verticale du plan, de B en S, du côté du point K ; par le point S ainsi déterminé on mènera du centre C la ligne indéfinie CS, qui sera la soustylaire du plan.

Du point S on élèvera sur cette soustylaire la perpendiculaire SQ, égale à la ligne *tm* prise dans le deuxième triangle, et l'on mènera la ligne CQ, sur laquelle ayant pris à volonté CD, pour la longueur du style que l'on veut employer, on mènera par le point D la ligne DE perpendiculairement à CD ; et par le point E, ainsi déterminé sur la soustylaire, on mènera, perpendiculairement à cette ligne, la ligne équinoxiale du plan, qui coupera en un point F la ligne menée du point C par le point B, laquelle doit marquer l'heure de midi pour le lieu ; ensuite en prenant DE pour rayon, on décrira le cercle qui doit servir au tracé des lignes horaires comme dans les cadrans horizontaux ou verticaux, en observant de commencer la division de sa circonférence au point L, déterminé sur sa circonférence par le rayon mené du centre au point F de la ligne de midi.

On placera enfin le style dans le plan perpendiculaire sur la soustylaire, de manière que son origine soit au point C et qu'il fasse avec la soustylaire un angle égal àl' angle ECD.

Si c'est un gnomon dont on veut se servir, on observera dans le triangle CDF ce que nous avons dit qu'il fallait observer dans le triangle *acb* (*fig.* I) des cadrans horizontaux.

23. La construction des cadrans sur des plans inclinés, telle qu'on vient de la voir, suppose la déclinaison du plan connue ; mais il est plus aisé de fixer la position de la soustylaire sur le plan, que de déterminer la déclinaison ; ainsi il est nécessaire de savoir connaître la déclinaison d'après la soustylaire, afin de pouvoir ensuite tracer le cadran suivant la méthode que nous avons donnée.

Figures : XXVII, XXVIII et XXIX ; XXX, XXXI et XXXII ; XXXIII, XXXIV et XXXV ; XXXVI, XXXVII et XXXVIII.

Soit donc SR la soustylaire tracée sur un plan incliné par un point quelconque S de cette ligne ; soit menée une ligne SB perpendiculaire aux lignes horizontales du plan, et par le point B pris à volonté une horizontale BR ; ensuite soit menée du point B la ligne BD perpendiculairement à la soustylaire, et du point D où elle la rencontre, soit menée sur BR la verticale ou perpendiculaire DE, pour déterminer le point E.

Soit *abc* un triangle rectangle en *b*, dans lequel *ab* représente une ligne horizontale, et l'angle *bac* la latitude du lieu.

Soit aussi *gfh* un second triangle rectangle dans lequel *gf* représente une ligne horizontale, et l'angle *fgh* l'inclinaison du plan.

Cela posé, on portera DE sur le côté *gh* du deuxième triangle, de *g* en *m*, et l'on mènera *mn* parallèle à *fh*, qui rencontrera *gf* au point *n*, et l'on transportera la ligne *gn* sur ED, de E en O; puis ayant pris aussi dans le deuxième triangle la ligne *mn*, on la transportera sur la ligne horizontale *ba* du premier triangle, de *b* en *p*, et l'on mènera par ce point *p* la ligne *pq* parallèle à *ac*, ce qui déterminera la grandeur *bq*.

Du point O comme centre, et avec la ligne *bq*, dont nous venons de parler, prise dans le premier triangle pour rayon, on décrira une circonférence de cercle; et ayant tiré la ligne OB, on décrira sur cette ligne, comme diamètre, un second cercle dont la circonférence coupera celle du premier cercle en deux points; enfin par le point B et par celui K des deux points d'intersection des deux cercles, choisis de manière qu'ayant tiré la ligne OK, elle se dirige dans le même sens que la méridienne horizontale du lieu, que l'on connaît au moins à peu près; par ce point K, dis-je, et par le point B, on mènera la ligne BK, qui fera avec BR un angle RBK égal à l'angle de déclinaison que l'on cherche.

On remarque que la ligne OK étant projetée sur le plan horizontal serait parallèle à la méridienne de ce plan horizontal.

24. Nous n'avons considéré qu'une seule des faces des plans inclinés, celle qui regarde le midi quand l'inclinaison du plan est dans le même sens que l'inclinaison de l'axe, et à celle des faces du plan qui, dans la situation contraire, regarde le nord, parce que les autres faces des plans ont très-peu d'heures le soleil dégagé sur leur horizon, et que d'ailleurs les cadrans à tracer sur ces faces sont parfaitement égaux à ceux dont nous avons donné la construction, avec la seule différence dans la position, qui est renversée : ce qui était vers le haut du plan dans les premiers, se trouvera vers le bas dans les autres, et réciproquement.



LIVRE IV.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AUX ENGRENAGES.

Dans son *Traité des machines*, HACHETTE a consacré un chapitre aux engrenages. Il a donné la théorie géométrique des engrenages cylindriques à épicycloïde plane, et des engrenages coniques à épicycloïdes sphériques, ces engrenages étant intérieurs ou extérieurs. Il a aussi donné la théorie des engrenages cylindriques et coniques à lanternes. Il a développé la théorie des crémaillères droites, dans lesquelles les courbes sont des développantes et des cycloïdes.

Mais il n'a point parlé des autres engrenages, car il ne dit qu'un mot sur la vis sans fin, et il cite seulement les engrenages de Withe dont il ignorait la théorie.

Je suppose que l'on connaisse, avant de lire ce quatrième livre, le chapitre écrit par HACHETTE sur les engrenages, et je continue les recherches géométriques sur ce sujet important.

Plusieurs des mémoires contenus dans ce quatrième livre ont déjà été publiés, les uns dans le *Journal de l'École polytechnique*, d'autres dans le *Journal des mathématiques pures et appliquées*, rédigé par M. *Liouville;* plusieurs sont inédits et sont déjà anciens, car ce que je dis : 1° sur les engrenages *cléipsydres*, a été écrit lorsque j'étais élève de l'École polytechnique en 1815; et 2° sur les engrenages à frottement de roulement et à vitesse variable, a été écrit à l'École d'application de Metz en 1817, dans mon mémoire sur le projet de machines, projet que je devais rédiger comme sous-lieutenant élève d'artillerie.

J'ai classé par ordre de matière les divers mémoires dont se compose ce quatrième livre, sans m'inquiéter des dates de leur publication antérieure.

Après avoir lu ce quatrième livre, on devra lire l'ouvrage que j'ai publié en 1842, et qui a pour titre : *Théorie géométrique des engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes situés ou non situés dans un même plan.* Cette théorie est le complément nécessaire de ce quatrième chapitre,

car ce sont les diverses recherches consignées dans ce quatrième chapitre, qui m'ont conduit à la théorie générale exposée dans l'ouvrage publié en 1812, chez M. Bachelier, qui a bien voulu en être le libraire-éditeur et l'imprimeur.

N° 1.

NOUVEAU SYSTÈME PERMETTANT DE TRANSMETTRE UN MOUVEMENT UNIFORME ENTRE DEUX AXES QUI NE SONT PAS SITUÉS DANS UN MÊME PLAN (*).

M. Lefebvre, lieutenant-colonel d'artillerie a publié, dans le deuxième numéro du Mémorial d'artillerie, une note sur les engrenages, et dans laquelle il décrit les procédés qu'il a suivis pour la construction des roues dentées employées à la poudrerie du Bouchet et à celle d'Angoulême.

Il a donné aux dents la forme conique, la directrice de chacun des cônes étant une développante sphérique; et il démontre que cette courbe (la développante sphérique) est préférable à l'épicycloïde sphérique.

Parmi les avantages que présente le système à développantes planes : 1° développantes planes pour les engrenages cylindriques dans le cas des axes parallèles; et 2° développantes sphériques pour les engrenages coniques dans le cas des axes qui se coupent, on doit remarquer celui de pouvoir à volonté changer de pignon, et par là de pouvoir rapprocher ou éloigner les deux axes de l'engrenage, en augmentant ou diminuant la vitesse de l'axe du pignon.

La transmission du mouvement uniforme entre deux axes, et au moyen des développantes, était connu depuis longtemps, mais personne, jusqu'à présent, n'avait complétement décrit les propriétés dont jouit cet engrenage, et n'avait surtout fait remarquer qu'il permettait de rapprocher ou d'éloigner les axes en faisant varier le diamètre des pignons (**).

(*) Extrait du *Bulletin de la société d'encouragement pour l'industrie nationale* (année 1829).

(**) On peut éloigner ou rapprocher les axes, soit dans l'engrenage cylindrique, soit dans l'engrenage conique, sans avoir besoin de changer le diamètre du pignon. Seulement dans le cas où l'on conserve les mêmes roues de l'engrenage, on diminue le *jeu* entre les dents quand on rapproche les axes, et l'on augmente le *jeu* entre les dents quand on éloigne les axes. Cet engrenage (par développantes), qu'il soit cylindrique ou qu'il soit conique, a donc un grand avantage, c'est de permettre de maintenir le *jeu* constant entre les dents à mesure que le frottement usant les dents tend à augmenter le *jeu*.

A ce sujet M. Lefebvre s'exprime ainsi :

« Il peut arriver que l'on ait à transmettre le mouvement d'une roue à une » autre, en se réservant de faire varier la distance de leurs axes; alors les don- » nées primitives étant changées, la forme des dents ne satisfait plus aux condi- » tions exigées et ne convient plus dans beaucoup de machines, surtout dans » celles qui doivent fonctionner avec une grande précision, telles, par exemple, » que les machines à tailler les vis.

» On y fait varier les vitesses angulaires en employant des pignons de diamè- » tres différents qui engrènent avec la même roue; or un seul de ces pignons » engrène exactement, les autres ne peuvent être tracés rigoureusement, puis- » qu'en construisant ce premier pignon on a arrêté la forme des dents de la roue, » et que cette forme dépend de son diamètre; d'ailleurs le seul effet du frotte- » ment suffit pour changer cette forme.

» Ces inconvénients indiquent déjà suffisamment que la forme épicycloïdale » n'est pas la plus convenable; la développante du cercle, exempte de ces dé- » fauts, est donc préférable; cette courbe jouit encore d'autres avantages que » nous ferons connaître, etc., etc. (*). »

J'ai remarqué que les engrenages cylindriques (les axes étant parallèles) dont les dents sont terminées par des développantes planes, jouissent encore d'une propriété remarquable, et dont les mécaniciens pourront, je crois, tirer un parti avantageux dans diverses circonstances. Au moyen d'un engrenage cylindrique à développantes de cercle il est possible (lorsque cet engrenage est extérieur) de transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes non situés dans un même plan, et comprenant entre eux un angle quelconque, depuis l'angle nul jusqu'à l'angle droit.

Ce problème mécanique n'a jamais été résolu jusqu'à présent, en employant seulement deux roues dentées; on ne connaît encore que le mécanisme nommé *vis sans fin*, qui résolve en partie ce problème.

(*) On doit remarquer que l'on peut cependant, avec la forme épicycloïdale, faire varier les diamètres des pignons sans nuire à la précision du mouvement; mais, alors, au lieu de prendre pour le *flanc* de la dent du pignon, le rayon de ce pignon, on doit prendre l'épicycloïde intérieure engendrée par le cercle qui a servi à décrire l'épicycloïde extérieure qui termine la dent de la roue.

Ainsi, quant à la facilité du changement de pignon, M. Lefebvre est dans l'erreur, ce changement peut s'opérer dans les engrenages tracés avec des épicycloïdes, tout aussi bien que dans ceux qui sont tracés avec des développantes, et cela, que l'engrenage soit cylindrique ou conique.

Mais ce qui doit faire donner la préférence à la développante, c'est que dans les engrenages ainsi tracés on peut rapprocher les axes, ce qui n'est pas possible dans les engrenages épicycloïdaux, et de plus c'est que, dans les engrenages à développantes, le pignon peut indifféremment conduire ou être conduit, ce qui ne peut avoir lieu sans arcqueboutement dans les engrenages épicycloïdaux.

Cette propriété remarquable, dont jouit un engrenage cylindrique à développante et extérieur, peut permettre de construire un engrenage *oscillant;* ainsi pendant que l'axe de l'une des roues restera immuable en sa position, on pourra faire varier suivant une loi arbitraire la position du second axe par rapport au premier, en ce sens que si l'on prend la plus courte distance entre les deux axes, on pourra faire mouvoir le second axe autour de la plus courte distance et d'une manière variable, pendant que les deux roues dentées se conduiront uniformément.

Et en effet on sait :

1° Que si l'on trace sur un plan deux cercles C et C′ (*fig.* 1), et qu'on leur mène une tangente commune aa', on peut prendre un point arbitraire m sur cette tangente; et que, considérant ma comme un fil, en l'enroulant sur le cercle C, le point m décrira la développante plane d; que, de même, considérant ma' comme un fil et l'enroulant sur le cercle C′, le point m décrira une développante plane d'.

2° Que lorsque le cercle C tournera uniformément autour de son centre o, la développante d conduira la développante d', de telle manière que le cercle C′ tournera aussi uniformément autour de son centre o', le point de contact des deux développantes (qui est primitivement en m) parcourant la tangente aa', et que les deux développantes auront en leur contact m une tangente $\overline{mt}$ perpendiculaire à la droite aa', et que cela aura lieu en les divers points de contact m, m', m''...

Tels sont les éléments du tracé de l'engrenage cylindrique et extérieur, dont les dents sont terminées par des surfaces cylindriques (d) et (d') ayant pour section droite, pour l'une des roues (C), la développante d, et pour l'autre roue (C′), la développante d'.

Dans l'engrenage ainsi construit deux dents sont en contact par une portion de la génératrice droite de contact des deux cylindres (d) et (d'), et le plan tangent commun à ces deux cylindres est perpendiculaire au plan (aa'), qui est tangent à la fois aux deux cylindres (C) et (C′).

Ainsi, ayant un engrenage cylindrique et extérieur dont les deux axes (o) et (o') sont parallèles, si on le coupe par un plan perpendiculaire aux deux axes, et partageant l'épaisseur des deux roues en deux parties égales, on obtiendra pour section la fig. 4. (Je nomme ce plan, *plan milieu.*)

Cela posé, on voit sur-le-champ que si, supposant que la roue (C) reste horizontale, on fait tourner la roue (C′) autour de la ligne aa', il arrivera ce qui suit :

1° Le centre o' du cercle C′ (*fig.* 2) décrira un cercle γ, dont le plan sera perpendiculaire à la droite aa', dont le centre sera le point a' contact du cercle C′

et de la droite aa'; et dont le rayon sera égal à celui du cercle C', et l'axe (o') prendra une position (o''); la développante d' prendra une position d'', et la roue dentée (C') prendra une position (C'').

2° L'axe (o'') de la roue (C'') ne sera plus contenu dans un même plan avec l'axe (o) de la roue dentée (C).

3° Les deux cylindres (d) et (d'') ne seront plus en contact par une portion de génératrice droite, mais seulement par un point m, qui sera celui du contact angulaire des deux développantes d et d' tracées dans le *plan milieu*.

4° Les deux développantes d et d'' n'auront plus au point de contact m mêmes tangentes, mais des tangentes distinctes mt et mt'', qui comprendront entre elles un angle égal à celui que font actuellement (après le mouvement de rotation autour de la droite aa') les deux axes (o) et (o''), et qui détermineront un plan perpendiculaire à la droite aa'; et ce plan sera un plan tangent commun aux deux cylindres (d) et (d'').

Et 5° la roue (C) transmettra toujours son mouvement de rotation uniforme à la roue (C''), quel que soit l'angle compris entre les deux axes (o) et (o''); et même pendant que l'axe (o'') s'inclinerait successivement par rapport à l'axe (o), et quelle que fût d'ailleurs la loi de son mouvement de rotation autour de la droite aa', et cela pendant que la roue (C'') tournera autour de son axe (o''), conduite qu'elle est par la roue (C).

Aussitôt que les deux axes (o) et (o') ne seront plus parallèles, les dents ne seront plus en contact que par un point, au lieu de l'être par une portion de droite; dès lors toute la pression s'exercera sur ce point : le frottement sera angulaire et non direct, et il sera, par conséquent, plus grand que le frottement direct.

Le nouveau mécanisme proposé semble pouvoir être employé avec avantage dans les machines où l'on ne considérera pas la force dépensée, et où l'on n'emploiera que des forces qui ne seront pas très-grandes.

La fig. 3 représente l'engrenage dans le cas où les deux roues dentées R et R' sont horizontales, leurs axes étant parallèles.

Les développantes qui terminent les dents ont pour cercle générateur, savoir : 1° celles des dents de la roue R', le cercle (oa') (désignant le cercle par son rayon) et 2° celles des dents de la roue R, le cercle (oa).

La ligne droite aa', tangente commune à ces deux cercles, est la ligne parcourue par les contacts successifs des dents, pendant le mouvement de rotation uniforme.

La roue R' est portée par une manivelle coudée M, tellement disposée que l'axe de la poignée est dans le prolongement de la droite aa' des contacts; en sorte que si l'on fait tourner dans son logement la poignée de la manivelle, le système

de la roue R′ prendra un mouvement de rotation autour de la ligne droite *aa′*; dès lors les deux axes des roues R et R′ ne seront plus situés dans un même plan.

La fig. 4 représente l'engrenage dans le cas où, ayant imprimé un mouvement de rotation à la manivelle coudée qui porte la roue R′, le plan de cette roue R′ serait devenu oblique par rapport à celui de la roue R, lequel est resté horizontal.

D'après les fig. 3 et 4, on voit que l'on peut donner, au moyen de la manivelle M et à l'axe de la roue R′, toutes les inclinaisons possibles; et que, par conséquent, les deux axes des roues de l'engrenage peuvent comprendre entre eux un angle quelconque, depuis l'angle nul jusqu'à l'angle droit.

Nota. On doit faire remarquer que le tracé tel qu'il est représenté par la fig. 3 n'a été adopté que pour mieux concevoir le système. Les dents y sont trop longues et le contact se fait trop avant et trop après la *ligne des centres*, ce qui est défectueux.

Le mouvement de rotation de l'axe (o') de la roue R′ autour de la ligne *aa′* des contacts peut s'obtenir par d'autres mécanismes que la manivelle M; l'on devra donc chercher le mécanisme le plus convenable, suivant le travail de la machine à laquelle on ferait l'application du système nouveau et décrit succinctement dans cette note.

Il me semble que ce nouveau système d'engrenage peut recevoir le nom d'*engrenage extérieur oscillant.*

N° 2.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES RAYONS DE COURBURE DES ÉPICYCLOÏDES SPHÉRIQUES A LA CONSTRUCTION DES ENGRENAGES CONIQUES (*).

Lorsque l'on veut transmettre à un axe la force appliquée à un autre axe, on emploie des roues dentées, et l'on donne au système le nom d'*engrenage.*

Les axes peuvent affecter l'un par rapport à l'autre trois positions :

1° Ils peuvent être parallèles; 2° ils peuvent se couper; 3° ils peuvent faire un angle entre eux sans se rencontrer.

(*) Extrait du mémoire publié dans le 23ᵉ cahier du Journal de l'École polytechnique. C'est la seconde partie de ce mémoire que je publie de nouveau ici.

Voyez les *Compléments de géométrie descriptive*, chap. II, où le mémoire n° 2 contient la 1ʳᵉ partie.

On donne le nom d'*engrenage cylindrique* au système de deux roues dentées qui servent à transmettre le mouvement de rotation, entre deux axes parallèles, parce que ordinairement on emploie des surfaces cylindriques pour terminer les dents.

On donne le nom d'*engrenage conique* au système de deux roues dentées qui servent à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes qui se coupent, parce que ordinairement on emploie des surfaces coniques pour terminer les dents.

La base des surfaces cylindriques ou coniques qui terminenent les dents peut être arbitraire, en ce sens que celle de la dent qui conduit étant déterminée, on conclut celle de la dent qui est conduite, de manière à ce que la condition suivante soit satisfaite, savoir : que les vitesses des deux axes soient dans un rapport donné, *constant* ou *variable* suivant une loi donnée.

Dans les machines il est presque toujours indispensable que le rapport des vitesses des axes soit constant ; et il serait à désirer que l'on pût, par le tracé seul, introduire une nouvelle condition, celle de l'uniformité de mouvement; mais les frottements s'y opposent, et cette condition ne peut s'obtenir qu'au moyen d'un *volant.*

Les mécaniciens emploient deux formes de dents pour les engrenages; dans les uns les dents sont terminées par des *épicycloïdes*, dans les autres par des *développantes*, parce que avec l'une et l'autre forme le rapport entre la puissance et la résistance est constant; mais avec l'une et l'autre forme, le travail du frottement est variable; en sorte que, pour que l'uniformité de mouvement subsiste, il faut nécessairement employer des *volants* pour régulariser le mouvement de rotation.

Dans les engrenages à *épicycloïdes* la pression entre les dents est variable, tandis que la pression est constante dans les engrenages à *développantes.*

En sorte que les dents se déforment par le travail, suivant des *développantes* dans le second engrenage, et non suivant des *épicycloïdes* dans le premier engrenage.

Cette propriété des engrenages à *développantes* doit les faire préférer avec raison par les mécaniciens.

Cependant une légère variation dans le frottement ou dans le rapport entre la résistance et la puissance pendant le temps employé par une dent pour conduire son homologue, ne peut être nuisible dans les grandes machines, et cette considération permet de simplifier le tracé des engrenages cylindriques et coniques en substituant aux arcs d'*épicycloïdes* ou de *développantes*, qui doivent servir de bases aux surfaces cylindriques ou coniques qui terminent les dents, leurs cercles osculateurs (sauf à établir des volants pour régulariser le mouvement de la machine).

Jusqu'à présent, les mécaniciens ont employé des arcs de cercles pour terminer

les dents des engrenages ; mais le centre de ces cercles, ainsi que leurs rayons étaient mal choisis, car ces cercles n'étaient point les cercles osculateurs des arcs de courbes qu'ils devaient remplacer. Aussi est-on obligé de donner un grand jeu entre les dents de l'engrenage. Aussi remarque-t-on que lorsque deux ou trois dents sont en prise, elles ne fonctionnent pas toutes en même temps, mais alternativement; ce qui produit des chocs et des intermittences qui sont nuisibles à la durée de l'engrenage, et de plus donnent naissance à des vibrations qui, à la longue, déboîtent et déchaussent les assemblages des diverses parties de la machine; et de plus encore, les vibrations dues à ce *tic-tac* perpétuel consomment une partie de la force motrice.

Il n'est donc pas sans quelque importance de connaître une méthode géométrique simple au moyen de laquelle on puisse construire promptement le centre de courbure d'un arc d'épicycloïde plane ou sphérique, puisque l'on pourra en faire des applications utiles aux tracés des engrenages cylindriques et coniques.

J'ai dit plus haut que l'invariabilité de la pression entre les dents devait faire préférer les développantes planes et sphériques pour le tracé des engrenages cylindriques et coniques; mais il existe encore une autre raison non moins importante et qui est évidente, c'est que l'on est forcé de placer rigoureusement les axes dans la position déterminée en vertu du tracé, lorsque l'on emploie des épicycloïdes (et cela a lieu pour les engrenages intérieurs et extérieurs), tandis que l'on peut, pour l'engrenage extérieur seulement (mais dans les machines on se sert plus d'engrenages extérieurs que d'engrenages intérieurs), éloigner ou rapprocher les axes, en les laissant parallèles dans les engrenages cylindriques, ou en les faisant se couper et toujours au même point, dans les engrenages coniques, lorsque l'on emploie *des développantes.*

De sorte que l'emploi des développantes facilite la pose de l'engrenage extérieur ; et de plus, lorsque les dents s'usent, on peut rapprocher les axes, pour diminuer le jeu entre les dents; et ce rapprochement des axes s'effectue sans troubler le rapport existant entre leurs vitesses, ce que l'on ne peut faire lorsque l'on emploie *des épicycloïdes.*

Ajoutons encore que le tracé de l'engrenage conique est très-difficile lorsque l'on veut le construire rigoureusement avec des épicycloïdes, et que c'est ce motif qui engagea M. Poncelet à chercher une méthode approximative suffisante pour *la pratique*, tandis que le tracé rigoureux de l'engrenage conique avec des développantes sphériques est presque aussi simple que le tracé de l'engrenage cylindrique avec des développantes planes.

Et à ce sujet je vais entrer dans quelques détails; mais avant je terminerai ces considérations générales, en disant quelques mots touchant la troisième position

que les axes peuvent affecter, celle où ils ne sont pas situés dans un même plan.

On n'avait encore pu, au moyen d'un engrenage composé seulement de deux roues, transmettre le mouvement de rotation entre deux axes ainsi situés, excepté dans le cas où ils étaient perpendiculaires entre eux, car alors on connaissait la *vis sans fin*, mécanisme qui ne pouvait cependant être employé que lorsque l'axe portant la roue dentée devait se mouvoir très-lentement.

En 1831, j'ai fait exécuter un modèle fonctionnant, qui est dans le cabinet de l'École polytechnique (et, avant, la Société d'encouragement en avait fait exécuter un, à ses frais, du même genre), qui montre que le problème, insoluble jusque alors, peut être résolu très-facilement. L'une des roues est à dents cylindriques ayant pour base des développantes de cercles; l'autre roue a ses dents terminées par des surfaces *héliçoïdes développables* (*).

Des engrenages cylindriques à développantes planes.

L'engrenage cylindrique peut être extérieur ou intérieur.

De l'engrenage extérieur. Dans une note publiée dans le *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale* (octobre 1829), j'ai montré les diverses propriétés dont jouissait l'engrenage extérieur, savoir (**):

1° De permettre de rapprocher ou d'éloigner les axes; 2° de permettre de faire tourner l'une des roues dentées autour de la droite parcourue par le point de contact de deux dents, et d'obtenir ainsi le moyen de transmettre le mouvement de rotation entre deux axes non situés dans un même plan.

Je fis alors remarquer que l'engrenage qui pouvait être employé comme engrenage de force, lors du parallélisme des axes (puisque les dents étaient en contact par une droite dont la longueur variait suivant la hauteur du cylindre qui les terminait, et que, dès lors, l'effort était réparti sur les divers points de cette droite de contact), ne pouvait plus être considéré que comme engrenage de précision, lorsque les axes faisaient entre eux un certain angle, parce que alors les dents, pendant le mouvement de rotation, n'étaient plus en contact que par un point.

Je fis remarquer aussi que, pendant le mouvement de rotation, l'angle des axes pouvait varier à volonté, soit d'une manière intermittente, soit d'une ma-

(*) Voyez dans l'ouvrage que j'ai publié (en 1842 chez M. Bachelier, libraire éditeur), sous le titre : *Théorie géométrique des engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes situés ou non situés dans un même plan*, le chap. II, p. 24 et suivantes.

(**) Voyez ci-dessus le mémoire n° 1.

nière continue; et enfin je fis observer que, lorsque les axes n'étaient plus parallèles, l'engrenage ne pouvait être à retour, c'est-à-dire, qu'on ne pouvait indistinctement faire tourner à droite ou à gauche la roue qui conduisait ou qui était conduite.

Je ne m'occupais point dans cette note de l'engrenage intérieur, dont les propriétés diffèrent en plusieurs points de celles de l'engrenage extérieur.

De l'engrenage intérieur. Soient C et C' (*fig.* 5) deux cercles tangents en *m* (le cercle C' enveloppant le cercle C); soit TT' la tangente commune à ces deux cercles, regardés comme les cercles primitifs, et ayant dès lors leurs rayons dans le rapport inverse des vitesses que doivent avoir les axes A et B parallèles entre eux et passant par leurs centres.

Si l'on trace les deux développantes *mr* et *mv* du cercle C et les deux développantes *mr'* et *mv'* du cercle C', on voit que si l'engrenage tourne de gauche à droite, la développante *mv* conduira la développante *mv'*, les contacts parcourant la tangente commune *m*T.

Et que si, au contraire, l'engrenage tourne de droite à gauche, ce sera la développante *mr* qui conduira la développante *mr'*, le contact parcourant la tangente commune *m*T'.

On voit aussi sur-le-champ : 1° Que l'engrenage est à retour, mais que le contact des dents parcourt toujours la même droite TT', que l'engrenage tourne dans un sens ou dans un autre, tandis que dans l'engrenage extérieur le contact parcourait une des tangentes aux cercles primitifs, lorsque la rotation avait lieu dans un sens, et parcourait la seconde tangente aux mêmes cercles, lorsque la rotation avait lieu en sens inverse;

2° Que la position des axes doit être invariable; on ne peut les éloigner ni les rapprocher comme dans l'engrenage extérieur; ce qui rend la pose de ces engrenages intérieurs plus délicate que celle des engrenages extérieurs;

3° Que le tracé est très-simple et très-facile, et beaucoup plus simple et plus facile que pour l'engrenage extérieur, pour lequel il faut nécessairement que les deux tangentes aux cercles primitifs se coupent sous un angle obtus; et, de plus, pour lequel un tâtonnement est nécessaire lorsqu'on vient à déterminer la course de la dent et le jeu à conserver entre les dents. (On peut voir à ce sujet le mémoire publié par M. Lefebvre, colonel d'artillerie, dans le deuxième numéro du *Mémorial d'artillerie*. Dans ce mémoire M. Lefebvre ne s'est occupé que de l'engrenage cylindrique et conique extérieur.)

4° Enfin que la puissance doit toujours être appliquée à l'axe de la roue intérieure, si l'on veut que les dents se conduisent à partir de la ligne des centres, et non avant cette ligne.

Je donne deux tracés. Dans la fig. 5, les dents ne sont point séparées par un creux ou intervalle. Aussi ce tracé ne serait applicable que pour de petites roues employées dans des machines de précision, la pointe aiguë des dents pouvant être promptement émoussée ou brisée, si l'on employait ces roues dans des machines de force.

De plus, comme il n'y a pas de jeu entre les dents, l'engrenage tournera dans un sens ou dans un autre sans perte de temps; mais il faut alors que la dilatation des dents soit pour ainsi dire nulle avec les variations de température.

Dans la fig. 6, les dents ont une certaine épaisseur à leur extrémité, et sont dès lors séparées les unes des autres, sur chaque roue, par un creux ou intervalle. On peut de plus ménager un jeu avec la plus grande facilité, et rendre ce jeu aussi grand ou aussi petit que l'on voudra. Il suffit pour cela de rogner chaque dent de l'une des roues, au moyen de la développante KK', distante de la développante primitive Ad', de la quantité voulue pour le jeu. Ce tracé doit être appliqué aux engrenages de force, et le jeu permettra aux dents de se dilater par les changements de température, sans que la marche de l'engrenage se trouve entravée.

Si je suppose que l'axe B (*fig.* 5 et 6) restant fixe, la roue C tourne autour de la tangente commune TT', comme charnière, alors l'axe A viendra couper l'axe B, et sous des angles différents, suivant la quantité angulaire dont la roue C aura tourné autour de la charnière TT'.

Mais on conçoit que si les dents sont terminées pour l'une et l'autre roue par des surfaces cylindriques, parallèles à l'axe B avant le mouvement de rotation autour de TT', ce mouvement de rotation ne pourra s'exécuter, puisque l'une des surfaces cylindriques est concave et l'autre convexe.

Il faudra donc terminer la dent convexe de la roue intérieure par une surface canale, et la dent concave de la roue extérieure par une surface cylindrique; mais alors les dents ne seront en contact que par un point, quelle que soit l'inclinaison de l'axe A par rapport à l'axe B.

Cette construction permettrait de construire des engrenages de précision, mais non de force, et tels que l'un des axes pourrait prendre, d'une manière intermittente ou continue, toutes les inclinaisons possibles avec l'autre axe, depuis le parallélisme jusqu'à l'angle droit.

Les deux axes pourraient aussi, tout en tournant sur eux-mêmes, prendre ensemble un mouvement d'oscillation dans le plan qui les contient.

Remarquons que pour l'engrenage intérieur, le retour sera toujours possible, c'est-à-dire que les deux roues pourront à volonté tourner dans un sens ou dans un autre, quel que soit l'angle sous lequel les deux axes A et B se coupent, en

supposant que, pendant le mouvement des roues autour de leurs axes, les plans-milieux de ces roues tournent aussi eux-mêmes autour de la tangente commune TT′ : propriété remarquable dont ne jouit pas l'engrenage extérieur.

Des engrenagés coniques à développantes sphériques.

L'engrenage conique peut être extérieur ou intérieur.

Engrenage extérieur. Concevons deux cônes de révolution (*fig.* 7), ayant même sommet en S, et pour base, l'un le cercle C, l'autre le cercle C′, les apothêmes S*m* et S*m*′ de l'un et l'autre étant égaux.

On pourra toujours construire deux plans tangents communs à ces deux cônes, et dans chaque plan tangent tracer un cercle ayant son centre au sommet S, et pour rayon l'apothème S*m* ou S*m*′ de l'un ou l'autre des cônes.

Ainsi, l'on aura deux cercles ayant pour centre commun le point S, dont les plans se couperont suivant la droite SP, et tels que le cercle D sera tangent en *m* à la base C, et en *m*′ à la base C′, et tels encore que le cercle D′ sera tangent en *n* à la base C, et en *n*′ à la base C′.

Cela posé :

Supposons que le cercle D roule sur le cercle C et ensuite sur le cercle C′. Un point du cercle D décrira, par ce double mouvement, d'abord une développante sphérique δ pour le cône (S, C) et ensuite une développante sphérique δ' pour le cône (S, C′).

De sorte que si l'on suppose que les cônes tournent autour de leurs axes, les développantes δ et δ' se conduiront l'une l'autre, leur point de contact parcourant le cercle D et les vitesses angulaires des axes étant dans un rapport constant.

Il en sera de même en considérant le cercle D′.

On pourra donc placer sur le cône (S, C) une dent conique, ayant pour *base*, savoir : pour la *face droite*, un arc de développante décrit par un point du cercle D, et pour la *face gauche*, un arc de développante décrit par un point du cercle D′, et ayant pour *sommet* le point S.

On pourra faire la même construction pour le cône (S, C′), et l'on voit sur-le-champ que la construction de cet engrenage conique offrira des difficultés analogues à celles signalées pour la construction de l'engrenage cylindrique, lorsqu'il s'agira de calculer le jeu entre les dents et la course d'une dent.

Dans son mémoire, M. Lefebyre propose de construire l'engrenage conique, à développante sphérique, de la manière suivante :

(Extrait du deuxième numéro du *Mémorial d'artillerie*, page 342.)

« Ayant des roues coniques à construire, on les tracera sur une sphère d'un » diamètre médiocre et exactement déterminé; on se servira avec avantage d'une

» équerre sphérique du même diamètre pour tracer des arcs de grands cercles » tangents à des circonférences, etc. ; les développantes sphériques seront tra- » cées avec le compas par la méthode indiquée; on peut même les décrire aussi » avec un fil, car s'il est constamment tendu sur une surface sphérique lisse, il » sera toujours dans le plan d'un grand cercle. Connaissant le tracé des dents » sur cette sphère, on en rapportera toutes les dimensions au rayon que l'on » veut avoir, au moyen d'une échelle de lignes proportionnelles; on aura ainsi le » tracé extérieur; on achèvera la dent en menant par les points de ce tracé des » lignes au point du centre, ce qui formera un cône dont on prendra une portion » égale à la longueur que l'on veut donner à la dent. »

Il m'a semblé que l'on pourrait avec avantage remplacer la méthode proposée par M. Lefebvre par la suivante :

Ayant déterminé d'abord (*fig.* 8) l'épaisseur *ab* à la racine de la dent sur le cercle inférieur D du tronc conique *noyau* ou *primitif* qui doit porter les dents coniques, et ensuite le creux ou intervalle *ba'* qui doit séparer deux dents sur ce même cercle; en un mot, ayant opéré la *division* de la roue dentée, on tracera les courbes *ag*, *bg'* intersection du cône ayant son sommet au sommet du tronc conique noyau, et pour base les arcs de développantes sphériques, avec le plan même du cercle D, et l'on emploiera à cet effet la construction géométrique indiquée dans le mémoire sur les développantes sphériques (*) ; et l'on se rappelle que ces courbes *ag* et *bg* se tracent avec la plus grande facilité sans avoir besoin de connaître les développantes sphériques.

On remarquera ensuite que si l'on coupe la dent conique par le plan du cercle supérieur D' du tronc conique noyau, on obtiendra deux courbes AG' et BG, semblables aux courbes *ag* et *bg* par rapport au centre *o* qui sera le pôle ou centre de similitude des courbes; de sorte que, connaissant la courbe *ag*, il sera facile de construire par *points* la courbe semblable AG. En effet, on mènera les rayons *oa*, *om*, *og*, etc., et l'on prendra les distances *a*A, *m*M, *g*G, etc., égales entre elles et à la différence des rayons des deux cercles D et D' bases du tronc conique noyau, on obtiendra ainsi autant de points A, M, G, etc., que l'on voudra de la courbe AG.

Ce tracé exécuté, et il est presque aussi simple que celui exigé pour la construction de l'engrenage cylindrique, on le rapportera sur un tronc cylindrique capable de contenir et le tronc conique noyau et les dents qui doivent être distribuées sur sa surface convexe.

Pour cela faire, on appliquera (*fig.* 10) le tracé fait pour le cercle D sur le

(*) Voyez dans les *Développements de géométrie descriptive*, le chap. II, mémoire n° 2.

plan P de la base inférieure du tronc cylindrique, et le tracé fait pour le cercle D' sur le plan P' de la base supérieure du tronc cylindrique, ayant soin que les rayons homologues $o'Q'$ et oQ aient leurs extrémités Q' et Q sur une génératrice QQ' du tronc cylindrique.

Il suffira ensuite d'avoir numéroté des points 1', 2', 3', 4', etc., et 1, 2, 3, 4, etc., respectivement homologues, sur les courbes AG et *ag*, et au moyen d'un rabot (ou de tout autre outil), d'exécuter les génératrice 1'. 1—2'.2—3'.3—4'.4 — etc. de la dent conique.

Ayant ainsi exécuté séparément les deux roues dentées, il arrivera, lorsqu'on les mettra en présence, que, du côté des grandes bases, les dents feront une saillie en dehors. Il sera *bien* d'enlever cette saillie, qui donnerait mauvaise grâce à l'engrenage; pour cela (*fig.* 9) on placera chaque roue sur le tour et l'on enlèvera l'excédant *rga* en la partie inférieure de la dent, en dirigeant l'outil normalement à la génératrice *a*A du tronc conique noyau. On pourrait en faire autant pour la partie supérieure de la dent et enlever aussi l'excédant *dr'*A.

Les engrenages coniques extérieurs à développantes sphériques jouissent des propriétés suivantes, savoir :

1° Les pressions sont constantes en chaque point de la même développante sphérique, ce qui n'établit pas que le *travail* du frottement soit constant, mais ce qui démontre que l'*usure* des dents sera uniforme. Ainsi les dents se déformeront sans cesse, mais toujours suivant des cônes ayant pour base des développantes sphériques;

2° On peut éloigner ou rapprocher les axes, pourvu qu'ils se coupent toujours au même point; mais on ne peut pas faire varier la position des axes, en ce sens qu'ils cessent de se couper, ainsi que cela a pu se faire pour les engrenages cylindriques, puisque l'on peut ne pas les rendre parallèles.

On doit remarquer que, de même que pour les engrenages cylindriques extérieurs, il fallait que les deux plans tangents aux cylindres *noyaux* ou *primitifs* se coupassent sous un angle obtus, et que, plus cet angle était grand, plus le tracé devenait facile; de même aussi il faut pour les engrenages coniques extérieurs que les deux plans tangents aux cônes *noyaux* ou *primitifs* se coupent sous un angle obtus.

On pourrait cependant ne pas s'astreindre à cette condition; mais alors il faudrait supprimer les dents adjacentes de celle qui est en prise, lesquelles arriveraient à se rencontrer sans se mettre en contact. En un mot, il faudrait supprimer toutes les dents qui, en vertu du tracé, ne permettraient pas à l'engrenage de subsister, les dents tendant dans le mouvement de rotation à s'intercepter le passage. De sorte que deux dents se mettant en prise, deux nouvelles dents ne

viendraient pas se mettre en contact aussitôt que les deux premières cesseraient de se conduire; et alors il faudrait, pour que le mouvement de rotation se continuât, placer sur le même axe plusieurs étages de roues dentées juxtaposées, et tellement disposées que, lorsque deux dents cesseraient d'être en contact pour le premier étage, deux dents de l'étage supérieur arriveraient au contact, et ainsi de suite. Ce mode de construction permettrait de faire des dents très-longues ou très-courtes, à volonté, et simplifierait le tracé, puisque l'on n'aurait plus à combiner le nombre des dents, de manière à ce que deux dents soient toujours en prise.

Ce fut en 1816 que je vis pour la première fois une machine dont l'engrenage cylindrique était construit d'après ce principe. Cette machine était disposée pour étirer les tuyaux de lunettes et avait été exécutée par Savart père, dans les ateliers de construction de l'École d'application de Metz. Ce fut en l'examinant que je fus alors conduit à la démonstration géométrique des engrenages de Withe, de ces engrenages qui jouissent en même temps des deux propriétés suivantes, savoir : 1° vitesse angulaire constante; 2° frottement de roulement : propriétés qui avaient toujours été regardées, depuis Euler, comme incompatibles; et ce ne fut qu'en 1825, lorsque je présentai les mémoires que j'avais écrit sur ce sujet à l'Institut de France, que cette incompatibilité cessa d'être une vérité en mécanique.

Engrenage intérieur. Dans le cas des engrenages intérieurs (*fig.* 11), les deux cônes noyaux ou primitifs sont en contact par une génératrice, et n'ont qu'un seul plan tangent commun.

La construction est la même que celle employée pour les engrenages extérieurs. Les propriétés dont jouissent les engrenages intérieurs sont aussi les mêmes que celles dont jouissent les engrenages extérieurs, excepté toutefois que l'on ne peut éloigner ou rapprocher les axes à volonté; leurs positions sont invariablement déterminées en vertu du tracé.

Construction approximative des engrenages coniques.

Je ne parlerai ici que de la construction approximative des engrenages coniques à développantes sphériques, M. Poncelet ayant donné un tracé approximatif pour les engrenages coniques à épicycloïdes sphériques.

Le tracé rigoureux de l'engrenage conique à développantes sphériques est assez simple par le procédé que j'ai indiqué, pour que l'on puisse se dispenser d'avoir recours à un tracé approximatif. Cependant on pourrait substituer aux dents rigoureuses, des dents approximatives qui seraient terminées par des cônes de révolution osculateurs aux surfaces coniques ayant pour bases les développantes sphériques.

La construction des dents approximatives est facile, soit dans le tracé graphique, soit dans la construction en relief des modèles propres au moulage, lorsque les roues dentées doivent être coulées en fonte ou en cuivre.

Rappelons-nous ce qui a été dit (*) au sujet de la construction géométrique du centre de courbure pour un point d'une développante sphérique.

Je suppose que le cercle D (*fig.* 12) est la base du cône noyau ou primitif de l'une des roues dentées, et que l'on ait tracé sur son plan les courbes *ag* et *bg*, intersection du cône à développantes sphériques qui termine une dent rigoureuse.

Sur *ag* et *bg* je prendrai les points milieux *m* et *n*. Je mènerai par *m* et *n* deux tangentes *mq* et *np* au cercle D.

Les droites *mq* et *np* seront les rayons de courbure des développantes sphériques engendrées par les points *m* et *n*; et si par *mq* et *np* je mène des plans perpendiculaires aux génératrices du cône noyau dont les projections, sur le plan du cercle D, sont *oq* et *po*, on aura les plans des cercles osculateurs des développantes sphériques engendrées par les points *m* et *n*.

Il sera dès lors facile de construire en relief (*fig.* 13) la dent conique approximative, ayant son sommet au sommet du cône noyau, et ayant pour base, des arcs de ces deux cercles osculateurs.

Car, si l'on suppose un cylindre AB capable de contenir la roue dentée, ce solide étant terminé par deux faces parallèles AR et BT, on tracera sur la face supérieure le cercle D′, et sur la face inférieure le cercle D, leurs centres *o*′ et *o* étant sur une perpendiculaire aux plans parallèles AR, BT (ainsi qu'on a opéré dans la *fig.* 10).

Sur le cercle D on fixe les points *p* et *q* tels qu'ils sont placés dans la fig. 12. On trace les tangentes *pr*, *qr* se coupant au point *r*.

On exécute deux plans passant par ces tangentes et perpendiculairement aux génératrices G et G′ du noyau; ces deux plans se couperont suivant une droite *ry* qui tendra à aller couper l'axe du cône noyau en un point *x*. Dans chacun de ces plans on tracera des points *p* et *q* comme centre et avec le même rayon que ceux employés (*fig.* 12), des cercles qui se couperont en un même point *y* de la droite *ry*.

Chacun des plans normaux aux génératrices G et G′ coupera le cône noyau suivant une section conique; chacun des cercles osculateurs tracés dans les plans normaux viendra couper la section conique en un point *v*. Dès lors la dent approximative sera composée de deux cônes de révolution ayant pour sommet commun le sommet du cône noyau, et pour base, l'un l'arc de cercle C, l'autre l'arc de cercle C′; ces deux cônes se couperont suivant une arête K, et le premier

---

(*) Voyez dans les *Développements de géométrie descriptive*, le chap. II, mémoire n° 2.

coupera le cône noyau suivant la génératrice H, et le second coupera ce même cône noyau suivant la génératrice H'.

Dans la *pratique* il sera préférable d'employer la méthode suivante lorsqu'on voudra construire un modèle en bois pour couler une roue dentée.

On construira d'abord le tronc conique noyau (*fig.* 14), on le divisera suivant le nombre de dents qui devront être appliquées sur la surface convexe ; les génératrices G, G', G'', etc., passant par les points de division seront les milieux des dents. Ainsi la génératrice G (*fig.* 14) passera par le point *l* (*fig.* 12).

Remarquant que le tronc conique noyau (*fig.* 15) a pour demi-angle au sommet l'angle α que l'on peut calculer, puisque l'on connaît la hauteur du tronc et la différence des rayons des deux bases ; remarquant que le plan du cercle osculateur base du cône de révolution dont une partie doit former la demi-dent approximative, doit être perpendiculaire à une génératrice du cône, on voit que le plan X du cercle base inférieure du tronc fait, avec le plan C du cercle base de la dent, un angle α ; de plus, le demi-angle γ au sommet du cône osculateur pourra facilement être calculé, puisque l'on pourra calculer la longueur *totale* de la génératrice G du noyau, et que l'on connaît le rayon du cercle osculateur.

On pourra donc (*fig.* 16) construire un tronc conique MN, ayant pour base le cercle C tracé avec le rayon *qm* (*fig.* 12), et ayant pour demi-angle au sommet un angle γ.

On prendra un point arbitraire *k* sur le cercle C ; on tracera *kr* passant par le centre *q* ; et *qr* étant pris égal à *qr* de la fig. 12, on mènera *ro* perpendiculaire à *kr* ; par la droite *kr* on fera passer un plan X faisant avec le plan C un angle égal au supplément de l'angle α ; ce plan coupera le cône suivant un arc *dk* de section conique ; dans ce plan X on tracera *oq* perpendiculaire à *kr*, et l'on prendra le point *o* sur la droite *oq* suffisamment prolongée, de telle sorte que *oq* soit égal au rayon de la base inférieure du tronc conique noyau ; on tracera sur le plan X le cercle D du point *o* comme centre et avec *oq* pour rayon, ce cercle coupera l'arc *dk* au point *d* ; on tracera la génératrice S*d* du tronc de la dent, puis on joindra *o* et *r* par une droite qui coupera le cercle D en *l* ; on exécutera la portion de surface conique concave (SD), laquelle s'appliquera sur la surface convexe du tronc noyau ; la droite S*l* s'appliquera sur la droite G (*fig.* 14) ; on exécutera le plan S*lr*U, qui, lorsque la demi-dent sera placée, S*l* étant sur G (*fig.* 14), passera par l'axe du tronc noyau et par la ligne milieu G ; on exécutera la demi-dent symétrique de la même manière, et l'on pourra ainsi exécuter et rapporter sur le noyau les dents qui doivent être distribuées sur son pourtour.

Il est inutile d'entrer dans plus de détails à ce sujet, car ce que j'ai dit doit suffire à ceux qui savent la Géométrie descriptive et qui sont habitués à s'en

servir et à appliquer le trait sur le bois, pour concevoir de suite la marche à suivre dans l'exécution en relief des modèles qui devront servir au moulage. Il leur sera facile de suppléer à ce qu'il y a d'incomplet dans ce qui précède; je n'ai point voulu entrer dans tous les détails d'exécution, car j'aurais dépassé les bornes imposées à un mémoire dans lequel j'avais plus en vue d'exposer la théorie et ses applications à la *pratique*, que d'entrer dans tous les détails de la *pratique*.

N° 3.

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES SUR LES ENGRENAGES DE WITHE (*).

§ I.

Le mécanicien Withe, lors du concours pour les prix décennaux, en 1810, soumit à l'examen de l'Institut des engrenages cylindriques et coniques d'une construction nouvelle, et dit en les présentant qu'ils jouissaient des deux propriétés regardées jusque alors comme incompatibles, savoir : 1° vitesses angulaires dans un rapport constant, et 2° frottement de roulement; et qu'ainsi : 1° le pignon décrivant des arcs égaux faisait parcourir à la roue dentée des espaces angulaires aussi égaux, et 2° les courbes par lesquelles les dents étaient en contact se roulaient à la manière de deux cercles tracés sur un même plan.

Withe n'était pas géomètre, aussi ne put-il démontrer rigoureusement l'existence des propriétés qu'il annonçait appartenir à ses engrenages. On voyait bien qu'en effet les vitesses angulaires étaient dans un rapport constant, on sentait bien que le frottement était très-doux, mais cependant le frottement pouvait être de glissemement. Jusqu'à présent la question est restée indécise.

En examinant les procédés pratiques que Withe employait pour la construction de ses engrenages, procédés qu'il a décrits dans une petite brochure que je n'ai pu me procurer qu'à la bibliothèque de l'École royale de l'artillerie et du génie à Metz, on voit qu'on peut *traduire géométriquement* les procédés de mécanique pratique, par une construction géométrique qui consiste : 1° à faire passer un plan M (*fig.* 17) par les deux axes parallèles entre eux, savoir : P de la roue dentée et Q du pignon; 2° à tracer dans ce plan une droite R parallèle aux axes, et dont les

---

(*) Ce mémoire qui fut présenté à l'Institut de France (Académie royale des sciences) le 5 décembre 1825, a été publié *plus tard*, dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville.

distances p à P et q à Q seront dans le rapport inverse des vitesses des axes, puis 3° construire deux triangles abc et $a'b'c'$, le premier coupant la ligne R par son côté ab au point m, et le second ayant son sommet a' placé en ce point m, les deux triangles n'ayant d'ailleurs aucun autre point commun; 4° faire mouvoir le triangle abc autour de l'axe P, tous les points du côté ab décrivant des hélices de même pas, que j'appellerai H, nommant S l'hélice décrite par le point m; 5° faire mouvoir le triangle $a'b'c'$ autour de l'axe Q', le point a' décrivant une hélice s dont le pas sera h, et l'on devra avoir l'équation $\frac{H}{h}=\frac{p}{q}$, c'est-à-dire que les pas des hélices S et s seront dans le même rapport que les rayons des deux cylindres sur lesquels elles sont tracées. Ainsi les dents sont formées par des filets de vis, et ne se mettent successivement en contact que par les courbes S et s.

Si les axes P et Q se coupent, la droite R passe alors par leur point d'intersection et elle divise l'angle compris entre P et Q en deux, dont les sinus sont dans le rapport inverse des vitesses des axes, et les courbes S et s sont des spirales coniques d'Archimède dont les pas sont aussi dans le rapport direct des rayons des roues coniques sur lesquelles elles sont tracées.

Les dents ainsi construites se conduisent-elles en effet par un frottement de roulement, et le rapport des vitesses angulaires est-il constant?

Telle est la première question que je me propose de résoudre dans ce mémoire.

Examinons d'abord les engrenages cylindriques.

Par la droite R (*fig.* 18), je mène un plan M' perpendiculaire au plan M qui contient les axes. Je trace sur ce plan M' une droite g passant par le point m situé sur la droite R. (Au lieu d'une droite, l'on pourrait tracer une courbe arbitraire, mais dans les arts l'on doit préférer la droite parce qu'elle donne sur le cylindre une hélice, courbe que l'on peut tracer facilement par un mouvement continu, ce mouvement continu étant procuré par un mécanisme simple.) Puis j'enroule ce plan M' sur le cylindre dont R est une génératrice, p le rayon de la base et P l'axe; la droite g se déformera suivant une hélice S dont le pas H sera l'un des côtés de l'angle droit du triangle mxy, construit dans le plan M'; la ligne mx étant horizontale et la droite my étant une partie de la droite g, et mx étant égale au développement de la circonférence du cercle dont p est le rayon; H sera dès lors égal à xy. Si ensuite j'enroule le plan M' sur le cylindre dont R est une génératrice, q le rayon de la base et Q l'axe, la droite g se déformera suivant une hélice s, dont le pas h sera égal à $x'y'$, le côté mx' étant égal au développement de la circonférence du cercle dont q est le rayon, et l'on aura

l'équation $\frac{H}{h} = \frac{q}{p}$. Cela posé : si je fais rouler le cylindre (q, Q) sur le plan tangent M', la courbe s se développera sur la droite g. De même si je fais rouler le cylindre (p,P) sur le même plan tangent M', la courbe S se développera sur la même droite g. Ainsi au point m les courbes s et S sont en contact, ayant en ce point pour tangente commune la droite g. Si donc le cylindre (p, P) prenant un mouvement de rotation autour de son axe P, entraîne par le frottement de roulement le cylindre (q, Q), les deux courbes s et S rouleront l'une sur l'autre et auront une tangente commune en chacun de leurs points de contact successif, et le point de contact parcourra la droite R.

Maintenant je trace dans le plan M, qui contient les axes P et Q, une droite arbitraire G passant par le point m de contact des deux hélices s et S, puis je décris deux courbes arbitraires φ et φ' ayant pour tangente commune au point m la droite G; l'une de ces courbes φ étant au-dessus, l'autre φ' étant au-dessous de la droite G et toutes deux situées dans le plan M.

Cela posé : j'imprime au plan M un mouvement de rotation autour de l'axe P, de manière que la courbe φ se meuve le long de la courbe S; on obtiendra par ce moyen une surface hélicoïde Φ. Si de même je fais mouvoir la courbe φ' le long de la courbe s, je formerai une seconde surface hélicoïde Φ', et ces deux surfaces Φ et Φ' seront en contact au point m, car elles auront en ce point même plan tangent, déterminé par les droites g et G, et ces deux surfaces n'auront évidemment que ce seul point commun (*). Dans les engrenages de Withe la courbe φ est une droite, par conséquent la surface Φ est une surface hélicoïde, telle qu'on l'emploie dans les vis à filet triangulaire ou à filet carré. La courbe φ' se réduit à un point; donc la surface Φ' se réduit à une hélice, de sorte que la dent Φ conduira ou sera conduite par la dent Φ' par un frottement de roulement, les vitesses angulaires étant dans un rapport constant.

Ainsi les engrenages construits par Withe satisfont aux deux conditions regardées jusqu'à présent comme incompatibles. Mais pour que ces deux conditions soient en effet remplies à la fois, il faut que les engrenages soient exécutés avec une rare précision. Examinons si l'on n'obtiendrait pas dans des engrenages construits d'après le même principe, un frottement de glissement provenant d'une exactitude dans le rapport des *pas* H et h, frottement de glissement qu'il serait impossible cependant de reconnaître et de détruire entièrement. Prenons l'engrenage exécuté par Withe, c'est-à-dire celui où les courbes φ et φ' sont des triangles. Chacun des points de la droite ab décrit une hélice dont le pas est H;

(*) Voyez à ce sujet, ci-après, le mémoire n° 6.

mais, d'après ce qui précède, l'hélice décrite par le point m est la seule qui puisse se rouler avec l'hélice décrite par le point a' et dont le *pas* est h, si l'équation $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$ est satisfaite.

Les deux hélices S et s ont au point de contact m une tangente commune; et pour tous les points de l'hélice S, la tangente fait avec l'axe P le même angle; il en est de même pour tous les points de l'hélice s. Si les hélices décrites par les points de ab, au lieu d'avoir le *pas* H, avaient un *pas* H' peu différent de H, alors le point a' ne pourrait se mettre en contact avec le point m. Car alors l'hélice S' décrite par le point m n'aurait pas même tangente que l'hélice s décrite par le point a' (les deux axes P et Q étant supposés dans le même plan); et aussi comme les hélices décrites par les divers points de ab, ont des tangentes qui font avec l'axe P des angles de plus en plus petits, à mesure que les points qui les décrivent se rapprochent de cet axe, l'on voit que l'on trouvera en avant ou en arrière du point m, et sur ab, un point m' tel que l'hélice qu'il décrira fera avec l'axe P le même angle que l'hélice s fait avec l'axe Q.

Alors ces deux hélices pourront être mises en contact, elles auront une tangente commune; et nécessairement on aura : p' (distance du point m' à l'axe P) est à q (distance du point a' à l'axe Q) dans le rapport qui existe entre H' et h; car l'hélice décrite par le point m' pourra être formée en pliant sa tangente au point m' sur le cylindre dont le rayon est p'.

Ainsi, en ne considérant que deux dents, si l'une n'est pas construite avec exactitude, si donc les hélices qui composent la surface hélicoïde qui doit conduire ou être conduite par l'hélice s décrite par le point a', n'ont pas rigoureusement leur *pas* égal à H, il sera toujours possible de rapprocher ou d'éloigner les axes P et Q, de manière à ce que le point a' trouve un point m' situé sur ab, lequel décrira une hélice faisant avec l'axe P le même angle que fait l'hélice s avec l'axe Q. Et l'hélice s décrite par le point a' ne pourra être mise en contact qu'avec l'hélice décrite par ce point m', tant que les axes P et Q, ainsi que la droite K lieu des points de contact successifs, seront assujettis à être situés dans un même plan; car toute autre hélice faisant avec l'axe P un angle plus petit ou plus grand, donnerait un point de contact pour lequel les tangentes se croiseraient; par conséquent l'hélice s ne serait pas tangente à la surface hélicoïde, au point considéré : elle la pénétrerait en ce point; les dents ne pourraient donc se conduire. Mais aussi les vitesses des axes P et Q ne seront plus dans le rapport demandé $\frac{q}{p}$, mais dans le rapport $\frac{q}{p'}$, p' étant le rayon de l'hélice S' sur laquelle se roule l'hélice s.

Mais un engrenage ne peut être formé par des roues n'ayant chacune qu'une

seule dent. Il faut forcément placer sur ces roues plusieurs dents et dans des positions telles que le mouvement de rotation puisse se continuer sans être arrêté.

Il faudra donc placer sur le cylindre (q, Q) une suite d'hélices équidistantes, leurs points de départ sur le cercle C tracé par le point a' étant aussi équidistants entre eux, et divisant ce cercle C en arcs égaux; puis faire rouler ce cylindre (q, Q) sur le cylindre (p, P). Toutes les hélices du cylindre (q, Q) laisseront sur le cylindre (p, P) pour *traces* des hélices aussi équidistantes, mais dont les points de départ sur le cercle C' décrit par le point m ne seront équidistants qu'autant que le cercle C, dont le rayon est q, se développera un nombre exact de fois sur le cercle C' dont le rayon est p, c'est-à-dire qu'autant que p et q seront entre eux dans un rapport commensurable; et cette condition doit être évidemment satisfaite pour que le mouvement de rotation ne soit pas interrompu.

Mais supposant le pignon terminé par le cylindre idéal (q, Q) sur lequel se trouvent tracées des hélices équidistantes s, s', s'', etc., dont les *pas* sont tous égaux à h, et les points de départ de ces hélices divisant en parties égales le cercle base du cylindre (q, Q), nous ne pouvons pas supposer que la roue soit terminée par le cylindre idéal (p, P), parce que les dents doivent avoir un excès de longueur pour que l'hélice s conduise son homologue S autrement que par le contact, c'est-à-dire ne puisse pas s'échapper, si la résistance devient plus grande que celle que peut vaincre le frottement de roulement. Le cylindre idéal aura donc pour la roue un rayon p'' plus *grand* que p, et nous appellerons ce cylindre (p'', P) (*fig.* 17).

Puisque nous supposons que le cylindre (q, Q) se développe un nombre exact de fois sur le cylindre (p, P), et que nous supposons en même temps que les surfaces des dents de la roue sont formées par une surface hélicoïde, il s'ensuit que l'on aura sur le cylindre (p'', P) des hélices équidistantes entre elles, et dont les points de départ diviseront le cercle qui lui sert de base et dont le rayon est p'', aussi en parties égales; et les distances de ces hélices, distances mesurées sur les génératrices du cylindre (p'', P), seront toutes égales entre elles et à celles des hélices tracées sur le cylindre (q, Q) du pignon. Dans ce cas, les hélices du pignon ne pourront se mettre en contact qu'avec celles tracées sur le cylindre (p, P), supposant le point de contact dans le plan des deux axes P et Q.

Mais si, par un vice de construction, les hélices composant les surfaces hélicoïdes qui forment les dents de la roue n'avaient pas leur *pas* dans le rapport $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$, il arriverait nécessairement, ou que les points de départ des hélices sur le cercle des bases ne seraient point également distants, les distances des hélices dans le sens des génératrices du cylindre n'ayant point varié, ou que ces distances auraient varié, si les points de départ étaient restés les mêmes, c'est-

à-dire divisant le cercle base en arcs égaux. Dans le deuxième cas, les hélices du pignon et de la roue ne pourraient se mettre en contact, car les dents ne pourraient s'enchâsser les unes dans les autres; et dans le premier cas, le mouvement de rotation ne pourrait être continu. Ainsi l'engrenage de Withe ne peut marcher qu'autant que les hélices sont parfaitement exécutées, toutefois, en supposant, ainsi que nous l'avons fait dans tout ce qui précède, que le point de contact sera dans le plan des axes.

Withe est parvenu à vaincre toutes les difficultés que l'exécution présentait, comme on peut s'en assurer en examinant un modèle d'engrenage cylindrique qui existe dans le cabinet de l'École polytechnique. Les hélices sont construites avec une rare précision, la division des surfaces cylindriques de la roue et du pignon est d'une grande égalité. Mais malgré la perfection de son travail, est-il vrai que ces engrenages, mis en place, jouissent du frottement de roulement?

Nous venons de démontrer que tant que le point de contact des hélices qui se conduisaient était dans le plan des axes, cela avait lieu. Nous avons aussi démontré que la moindre inexactitude dans l'inclinaison *voulue* des hélices, conduisait à des roues et pignons qui ne pouvaient s'engager, si l'on cherchait à mettre le point de contact dans le plan des axes. Mais le pignon ne peut-il pas avoir son contact hors du plan des axes? Et dans ce cas, les vitesses angulaires seraient-elles toujours dans le même rapport, et le frottement ne pourrait-il pas être de glissement? C'est ce que je vais examiner.

Supposons (*fig.* 17) une surface hélicoïde E engendrée par la droite ab tournant autour de l'axe P, puis une hélice s engendrée par le point a' tournant autour de l'axe Q; la tangente à l'hélice s fera, je suppose, avec l'axe Q un angle α.

Sur la surface E je prends un point arbitraire m; par ce point je fais passer un plan tangent T à cette surface. Par le point m passe une hélice S de la surface hélicoïde dont le pas est H. La distance du point m à l'axe P étant p, la tangente à l'hélice S fait avec l'axe P un angle dont la tangente trigonométrique sera $\frac{H}{2\pi p}$.

Par le point m j'élève une parallèle Y à l'axe P, puis je fais passer par ce même point une droite faisant avec cette parallèle l'angle α. Cette droite engendrera par son mouvement de rotation un cône droit dont l'axe sera Y. Le plan T pourra : 1° ne rencontrer le cône qu'en son sommet; 2° toucher ce cône suivant une génératrice; 3° couper le cône suivant deux génératrices.

Dans le premier cas, de quelque manière que l'on place les deux axes P et Q en les supposant toujours dans le même plan, l'hélice s ne pourra être tangente au point m à la surface E : elle la pénétrera toujours.

Dans le deuxième cas, les axes P et Q devront être à une distance déterminée

pour que l'hélice s soit tangente à la surface E, et il n'y aura qu'une position de contact.

Dans le troisième cas, il y aura deux positions de contact.

Voyons, d'après ce qui précède, ce qui doit arriver dans les engrenages de Withe.

La surface E d'une dent de la roue est composée d'hélices dont les *pas* égaux sont avec celui de l'hélice s du pignon dans le rapport $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$, p et q étant les rayons des cercles bases des cylindres sur lesquels sont tracées les hélices S et s, qui se conduisent, et ces cercles se développant un nombre exact de fois l'un sur l'autre, c'est-à-dire que p et q sont commensurables entre eux, et que les hélices S et s ont pour tangentes des lignes qui font avec les axes P et Q des angles égaux.

J'appelle tS la tangente à l'hélice S, et ts la tangente à l'hélice s, m un point quelconque de S, et a' un point quelconque de s, p la distance du point m à l'axe P, et q la distance du point a' à l'axe Q.

Et rappelons-nous que la surface E est engendrée par une droite (qui ne sera autre que le côté ab du triangle générateur employé par Withe), laquelle s'appuie sur l'axe P et l'hélice S, et qui se meut en restant parallèle à une surface conique droite dont P serait l'axe, ou bien en restant parallèle au plan perpendiculaire à l'axe P. Désignons par d la position particulière de cette droite lorsqu'elle passe par le point m.

Si nous prenons sur d un point m' dont la distance p' à l'axe P soit plus grande que p, par ce point m' passera une hélice S' dont la tangente tS' fera avec l'axe P un angle $\alpha' > \alpha$.

Par le point m' faisons passer une droite Y parallèle à P, et dans le plan qui passe par Y et tS', traçons une droite f passant par m' et qui fasse avec l'axe P un angle α.

Si je fais tourner la droite f autour de l'axe Y, elle engendrera une surface conique droite Σ dont Y sera l'axe et f la génératrice, et il pourra arriver deux cas (en se rappelant que la droite ts est comprise dans l'angle formé par les droites Y et tS', puisque $\alpha' > \alpha$), ou que ce cône ne rencontre pas le plan T tangent à la surface E en m', plan qui passe par les droites d et tS', ou qu'il lui soit tangent; car le plan qui passe par les droites Y et tS' n'est point perpendiculaire au plan tangent T. (Cela n'aurait lieu qu'autant que la droite d serait perpendiculaire à l'axe P, c'est-à-dire lorsque la surface E sera engendrée par une droite, s'appuyant sur l'axe P et sur l'hélice S, tout en restant parallèle au plan perpendiculaire à l'axe P; et dans ce dernier cas, le cône Σ ne serait tangent au plan T que lorsque le point m' se confondrait avec le point m.) Si le cône Σ ne rencontre pas le plan tangent T, lorsque l'on mettra l'hélice s en contact avec l'hélice S', et qu'ainsi

les points a' et m' seront seulement superposés, que l'on fasse éloigner ou rapprocher les axes P et Q l'un de l'autre en les faisant tourner autour de la droite Y, dans quelque position, enfin, que l'on place les hélices S' et s l'une par rapport à l'autre, il arrivera toujours que l'hélice s coupera la surface E; par conséquent les deux roues dentées ne pourront être mises en contact par les points a' et m'.

Si le cône est tangent au plan tangent à la surface E, l'hélice s pourra être mise en contact avec cette surface E, et sa position sera celle où sa tangente ts se confondra avec l'arête de contact du plan tangent T avec le cône décrit par la droite f tournant autour de l'axe Y.

Mais alors les deux hélices s et S' n'ayant point les rayons des cylindres sur lesquels elles sont tracées dans le rapport exact et inverse des vitesses des axes P et Q, elles ne rouleront point angulairement l'une sur l'autre, mais glisseront angulairement l'une sur l'autre. J'ai employé l'expression *angulaire*, parce que dans les positions qu'occupent les hélices s et S', l'on voit que leurs tangentes ne se confondent point, mais se croisent au point qui leur est commun, celui en lequel les points a' et m' se confondent.

Mais si nous considérons le point m appartenant à l'hélice S, et si nous établissons que les points a' et m se superposent, alors la tangente ts pourra prendre deux positions sur le plan tangent à la surface E, lequel plan passe par les droites d et tS. Car le plan qui passera par la droite tS et sera parallèle à l'axe P, ne sera point perpendiculaire au plan tangent au point m à la surface E, à moins que la droite d ne soit perpendiculaire à l'axe P; et dans ce dernier cas la tangente ts ne pourra prendre qu'une seule position, et ce sera celle où elle se confond avec la tangente tS. Dans le premier cas les hélices s et S pourront avoir un frottement de roulement direct ou angulaire, et dans le deuxième cas elles auront un frottement de roulement direct seulement. En prenant un point m'' sur la droite d et situé entre l'axe P et le point m, et établissant que le point a' se superpose avec ce point m'', alors la droite ts pourra toujours prendre deux positions sur le plan tangent à la surface E au point m''. Ainsi l'on doit conclure de tout ce qui précède :

Que si la génératrice d de la surface hélicoïde E, qui forme la surface des dents, est inclinée par rapport à l'axe P, lors même que les hélices s et S (qui doivent se développer l'une sur l'autre en roulant) seraient en contact, il pourra arriver, ou que leurs tangentes se confondent ou qu'elles se croisent, sans que l'on puisse en être averti par autre chose que par le calcul que l'on fera de la somme des distances p et q. Si la distance des axes P et Q dans la position de contact égale $(p + q)$, les tangentes se confondront; si elle est plus petite, les tangentes se croiseront. Dans le premier cas le frottement sera direct et de roulement, et dans le deuxième il sera angulaire et de roulement.

Mais comme nous avons vu que l'hélice s peut se mettre en contact dans deux positions différentes ou dans une seule (la droite d étant toujours inclinée par rapport à l'axe P), avec une hélice S' autre que S, il pourra arriver que la distance des axes P et Q soit $>$ ou $<$ $(p+q)$, et que le frottement soit, dès lors, un *frottement angulaire* et de *glissement*. Et l'on ne pourra le reconnaître qu'autant que l'on aura calculé les épaisseurs des roues, de manière que les cercles supérieurs et inférieurs soient dans le même plan, les points a' et m étant en contact, et que le mouvement de rotation soit bien donné par le travail des hélices s et S ; si donc par une *pose* défectueuse de l'engrenage le mouvement de rotation est donné par le travail des hélices s et S', les cercles supérieurs et inférieurs ne seront point dans le même plan (la droite d étant toujours inclinée par rapport à l'axe P). Mais dans le cas où la droite d sera perpendiculaire à l'axe P, quelque position que l'hélice s prenne, les cercles supérieurs et inférieurs qui terminent la roue et le pignon seront toujours dans le même plan, et aussi dans ce cas sera-t-on assuré que l'hélice s est en contact avec l'hélice S lorsque la distance des axes P et Q sera égale à $(p+q)$.

On doit donc préférer pour les engrenages de Withe la génération de la surface hélicoïde E par une droite d perpendiculaire à l'axe P. Mais on voit par tout ce qui précède, que même dans ce cas, on ne pourra affirmer que le frottement est direct et de roulement, car les moyens mécaniques manquent pour mesurer avec une exactitude mathématique la distance des deux axes P et Q, de sorte que l'on ne pourra jamais être sûr que le frottement ne soit pas *angulaire* et *de glissement*. Le glissement sera, il est vrai, très-petit, et de plus sera constant, c'est-à-dire que les dents glisseront l'une sur l'autre de la même quantité pour des espaces angulaires parcourus en temps égaux.

On voit d'après ce qui précède que l'on doit reconnaître quatre espèces de frottement, que je désignerai ainsi (*) :

1° Frottement direct	de roulement et de glissement	2° et angulaire	de roulement et de glissement.

Les premiers auront lieu lorsque les courbes en contact auront même tangente au point de contact, les seconds lorsque leurs tangentes se croiseront au point commun. Mais, dans les engrenages de Withe, il ne pourra exister que trois de ces quatre frottements :

1° *Frottement direct et de roulement*; lorsque les hélices qui sont en contact ont même inclinaison, et que le point de contact est dans le plan des axes ;

(*) Voyez, ci-après, le mémoire sur la *nature géométrique des frottements*, etc.

2° *Frottement angulaire et de roulement*, lorsque les hélices qui sont en contact, ont même inclinaison et que le point de contact n'est pas dans le plan des axes;

3° *Enfin, frottement angulaire et de glissement*, lorsque les hélices qui sont en contact n'ont pas la même inclinaison, et que le point de contact n'est pas dans le plan des axes.

Pour rendre plus clair tout ce que je viens de dire sur la difficulté que l'on éprouve à mettre *en place* les engrenages de Withe, et pour mieux faire comprendre la nature des divers frottements que je viens d'indiquer, je vais construire géométriquement des courbes qui pendant leur mouvement jouiront de l'un ou de l'autre des deux frottements angulaires remarqués dans les engrenages de Withe. Je supposerai que ces courbes sont tracées sur des cylindres droits dont les bases sont des cercles ou des courbes arbitraires; car ce que nous dirons dans le cas des cercles sera vrai pour le cas des courbes arbitraires.

Fig. 19. Supposons deux cercles de rayons inégaux tracés dans un même plan. Le centre du premier étant le point P, son rayon étant égal à p; le centre du deuxième étant le point Q, et son rayon égal à q. Ces deux cercles se couperont aux points m et n, et supposons deux cylindres verticaux ayant ces cercles horizontaux pour bases.

Nous nommerons P′ l'axe du premier, Q′ l'axe du deuxième, et M et N les génératrices d'intersection, lesquelles passeront respectivement par les points m et n. Supposons par M un plan dans lequel nous tracerons une droite d ou une courbe φ (nous emploierons dans *les arts* la droite d); puis enroulons ce plan, soit sur le cylindre P′, soit sur le cylindre Q′. La droite d laissera pour trace sur le premier cylindre une hélice G, et sur le deuxième cylindre une hélice g, qui se croiseront au point m' situé sur la génératrice d'intersection M; la droite d passant par ce point m', les droites $m'T'$ et $m't'$ tangentes au point m' et respectivement à l'hélice G et à l'hélice g, se projetteront suivant les droites mT et mt tangentes respectives en m aux cercles décrits des rayons p et q.

Si le cylindre P′ tourne autour de son axe, l'hélice G conduira l'hélice g et le frottement sera *angulaire* et de *roulement*, car les points homologues de ces deux hélices se conduiront angulairement les uns par rapport aux autres de la même manière qu'ils se conduiraient directement si le cylindre Q′, prenant un mouvement de rotation autour de la génératrice M, venait se mettre en contact avec le cylindre P′ suivant cette même ligne M, auquel cas les deux hélices G et g auraient une tangente commune et rouleraient directement l'une sur l'autre.

Si donc par les deux tangentes $m'T'$ et $m't'$ je fais passer un plan, il coupera les deux axes P′ et Q′, le premier au point o, le deuxième au point o'. Je joins les points o et m', o' et m' par des droites, puis dans le plan passant par m' et P′ je

trace une courbe L tangente en m' à la droite om', et dans le plan passant par m' et Q' une courbe L' tangente en m' à la droite $o'm'$.

Je fais mouvoir la courbe L le long de l'hélice G, de manière qu'elle soit toujours dans un plan passant par l'axe P', et que la droite $o'm'$, dans ses diverses positions, reste parallèle à une surface conique droite engendrée par $o'm'$ tournant autour de l'axe P', le point o' étant le sommet du cône.

Je fais mouvoir de la même manière la courbe L' autour de l'axe Q' et le long de l'hélice g; j'aurai alors formé deux surfaces hélicoïdales E et e qui seront pendant le mouvement de rotation toujours tangentes l'une à l'autre, et le point de contact se mouvra sur la droite M.

Les deux cercles décrits des rayons p et q se coupent, par conséquent le rayon p étant $> q$, l'arc mbn appartenant au cercle (q) et qui tourne sa concavité vers l'arc $mb'n$ appartenant au cercle (p) sera plus grand que lui. Par conséquent l'hélice g aura un point dont la projection sera en n et qui se trouvera au-dessus de celui de l'hélice G qui a le même point n pour projection horizontale; il faudra donc que l'hélice g conduise en dessous l'hélice G ou soit conduite en dessus par elle. Ainsi la courbe L' sera au-dessous de la courbe L par rapport au plan tangent commun aux deux surfaces E et e (plan tangent qui n'est autre que celui qui passe par les deux tangentes $m'T'$ et $m't'$), et ces deux surfaces e et E se conduiront par un frottement angulaire et de roulement.

Dans le cas des engrenages de Withe, la surface e se réduit à l'hélice g et la courbe L' se réduit à un point de cette hélice, et la courbe L n'est autre que la droite om'.

Mais si au lieu de tracer sur le plan passant par la génératrice M une seule courbe φ ou une droite d, nous traçons deux courbes φ et φ' ou deux droites d et d' passant par le point m' situé sur la droite M (et ce que nous dirons pour les droites d et d' sera vrai pour le cas où l'on aurait les courbes φ et φ'); en roulant ce plan sur le cylindre P', la droite d laissera pour trace sur ce cylindre une hélice G, et la droite d' laissera pour trace ou empreinte sur le cylindre Q' une hélice g'. Ces deux hélices G et g' auront des tangentes qui se croiseront en m', mais si je fais tourner le cylindre Q' autour de la droite M pour venir se mettre en contact avec le cylindre P', suivant cette même génératrice M, alors les deux hélices G et g' auront bien pour plan tangent commun le plan vertical passant par la génératrice M et les tangentes aux hélices G et g'; mais ces tangentes ne se confondront plus en une seule, elles se croiseront. Les deux hélices G et g' dans cette position ne pourront plus se rouler; et pour qu'elles conservent un point commun le long de la génératrice M pendant le mouvement de rotation, elles devront glisser l'une sur l'autre, de sorte que, quoique dans leur position pri-

mitive angulaire, je puisse leur mener un plan tangent commun par leurs tangentes $m'T'$ et $m't'$ (tangentes qui ne sont autres que les droites d et d'), plan qui coupera les deux axes P' et Q', et me permettra de construire deux hélicoïdes E et e' tangents l'un à l'autre au point m', le frottement entre les deux courbes G et g' sera nécessairement angulaire et de glissement, et non de roulement.

Nous n'avons encore dans la construction de ces engrenages à frottement angulaire considéré que deux filets ou deux dents en contact. Mais pour que le mouvement de rotation puisse être continu, il faudra disposer sur chaque roue une série de filets équidistants.

Dans le cas où les rayons p et q seront commensurables entre eux et seront dans le rapport inverse des vitesses des axes, on voit que les hélices tracées sur les cylindres P' et Q' ont des *pas* qui sont dans le rapport des rayons des cercles bases de ces cylindres, c'est-à-dire que l'on a $\frac{H}{h}=\frac{p}{q}$. Ainsi la construction sera absolument la même dans le cas du roulement angulaire et dans celui du roulement direct.

Mais lorsque p et q sont incommensurables entre eux ou ne sont pas dans le rapport inverse des vitesses des axes, si les hélices de l'hélicoïde E ayant pour *pas* H, l'hélice tracée sur le cylindre Q' avait pour *pas* h, de sorte que l'équation $\frac{H}{h}=\frac{p}{q}$ subsiste, on ne pourrait avoir sur ce cylindre des hélices s, s', s'', etc., équidistantes entre elles sur la génératrice M et de la même quantité que les hélices des surfaces E, E', E'', etc., le sont sur cette même génératrice, et de plus divisant par leurs points de départ le cercle base du cylindre Q' en parties égales. Alors il faudra incliner ces hélices, en les faisant pivoter autour de leurs points situés sur la génératrice M, jusqu'à ce que l'on obtienne un *pas* h' tel que les points de départ sur le cercle base du cylindre Q' soient équidistants. Dans ce cas on voit que les hélices s et S ne seront plus également inclinées par rapport à leurs axes respectifs P' et Q', et que l'on aura un frottement angulaire ou de glissement.

Il faut encore remarquer que si l'on avait pour bases des cylindres, des courbes autres que des cercles, fig. 20, il faudra que, pendant le mouvement de rotation, les petits arcs de la courbe γ interceptés par la courbe γ' soient toujours plus petits ou plus grands que ceux que cette courbe γ interceptait sur γ', parce que l'on a vu qu'il fallait, pour que les hélices pussent se conduire, qu'elles n'eussent pas de point commun sur la deuxième génératrice d'intersection désignée par N, mais seulement sur la première, que nous avons désignée par M.

Nous avons démontré que les engrenages de Withe, tels que ce mécanicien les a construits, en supposant que l'hélicoïde E est engendré par une droite, et que la surface e se réduit à une hélice, pouvaient être mis en contact de trois manières

différentes, de sorte que l'on pouvait avoir trois espèces de frottement; mais cela ne tient-il pas à la nature des surfaces E et e que Withe a choisies, et si l'on employait des surfaces E et e dont les courbes génératrices L et L' seraient autres qu'une droite et un point, ces trois positions de contact seraient-elles possibles? Ainsi l'engrenage étant construit avec précision, pour une position de contact, lorsqu'on le mettra en place, ne sera-t-il pas forcé de prendre la position voulue, sans pouvoir en prendre une autre, comme cela arrive à ceux construits par Withe, quelque précision d'ailleurs qu'on apporte à leur exécution?

Je suppose que le point m situé sur la courbe L décrive une hélice dont le *pas* est H, et que la distance de ce point m à l'axe P soit p; que sur la courbe L' j'aie un point a qui décrive une hélice dont le *pas* est h; que la distance de ce point a à l'axe Q soit q, et que l'on ait $\frac{H}{h}=\frac{p}{q}$; dès lors, les deux hélices rouleront l'une sur l'autre, et le plan tangent à la surface E au point m, fera avec la verticale passant par ce point m le même angle que le plan tangent à la surface e au point a, fait avec la verticale passant par le point a. J'appelle cet angle δ.

Supposons maintenant un point m' situé sur la courbe L entre l'axe P et le point m ou au delà du point m, par rapport à l'axe P; le plan tangent à la surface E pour ce point m', fera avec la verticale passant par ce point m' un angle θ. Sur la courbe L' je prends un point a' placé d'une manière quelconque par rapport à l'axe Q et le point a; je mène le plan tangent à la surface e en ce point a' : ce plan fera avec la verticale un angle θ'.

Si les angles θ et θ' sont égaux, je pourrai mettre les deux surfaces E et e en contact par les points m' et a', alors les hélices décrites par ces points m' et a' se croiseront et l'on aura un frottement angulaire de glissement.

On voit donc qu'il faut que tous les plans tangents à la surface E fassent avec l'axe P des angles plus grands ou plus petits que l'angle δ, et que tous les plans tangents à la surface e fassent avec l'axe Q des angles plus petits ou plus grands que cet angle δ, les plans tangents aux surfaces E et e aux points m et a étant les seuls qui fassent avec les axes P et Q un angle égal à δ; et alors les deux surfaces E et e ne pourront être mises en contact que par les seuls points m et a; mais aussi, en satisfaisant à cette condition, l'exécution des surfaces E et e deviendrait plus difficile dans la pratique.

Tout ce que j'ai dit sur les engrenages cylindriques est applicable aux engrenages coniques. Car si l'on mène un plan tangent aux deux surfaces coniques sur lesquelles sont tracées les spirales, ce plan passant par leur arête de contact, on voit que les deux courbes se développeront sur ce plan tangent suivant une même spirale d'Archimède, ayant le sommet commun aux deux cônes pour *pôle* (si toutes

fois les *pas* H et *h* des spirales coniques sont dans le rapport des rayons des cercles bases des cônes) ainsi ces cercles auront pour pôle commun le sommet des cônes, et pour rayon vecteur l'apothème commune.

Ainsi les engrenages coniques de Withe jouissent des mêmes propriétés et des mêmes inconvénients dont nous avons parlé en examinant les engrenages cylindriques.

Dans ce qui précède, j'ai discuté les propriétés qui appartenaient aux engrenages exécutés par Withe; j'ai fait remarquer les inconvénients qui résultaient de la forme que ce mécanicien avait donnée aux dents ; enfin j'ai indiqué les conditions géométriques auxquelles devraient satisfaire les surfaces des dents afin que ces inconvénients n'eussent pas lieu, c'est-à-dire pour qu'on fût toujours assuré que le point de contact était dans le plan des axes, lorsque les roues étaient en place. Mais en même temps j'ai fait sentir que l'exécution mécanique des surfaces hélicoïdes des dents serait sans doute beaucoup plus difficile.

Au lieu donc de surfaces hélicoïdes, je pense que l'on devrait employer des surfaces coniques ayant pour courbes directrices les hélices équidistantes tracées sur l'un des deux cylindres ou sur l'un des deux cônes idéaux que nous avons désignés précédemment par (p,P) ou (q,Q), toutes ces surfaces coniques ayant pour sommet commun un point de l'axe de la roue dentée.

Je vais donner la construction de ces surfaces coniques, et les avantages qui résulteraient de leur emploi par là même deviendront évidents. J'examinerai seulement le cas des engrenages cylindriques, tout ce que j'aurai dit pour eux s'appliquant aux engrenages coniques.

Ayant deux cylindres, dont les axes sont parallèles et mis en contact suivant une génératrice G ; appelant P l'axe du premier et Q celui du deuxième ; nommant p le rayon du cercle base du premier et q celui du deuxième, et supposant que p et q sont commensurables entre eux, on a vu que si l'on traçait sur le premier une hélice φ dont la tangente faisait avec l'axe P un angle α, et sur le deuxième une hélice ζ dont la tangente faisait avec l'axe Q le même angle α, ces deux hélices étant en contact suivant un point m situé sur la génératrice G ; on a vu, dis-je, que ces deux hélices roulaient directement l'une sur l'autre pendant le mouvement de rotation des deux cylindres. Supposons que j'éloigne l'axe Q et qu'il prenne la position Q', en le faisant mouvoir parallèlement à lui-même dans le plan des axes ; le point m glissant sur une droite mo perpendiculaire à l'axe P, (ce point o étant sur cet axe), dès lors le point m prendra une position m' sur la droite mo, et par ce point m' passera une droite m'G' arête du cylindre (q,Q'). Cette arête, en tournant autour de l'axe P, engendrera une surface cylindrique ayant $om'=p'$ pour rayon du cercle qui lui servira de base ; et si l'on imprime un

mouvement de rotation à ce nouveau système, l'hélice ζ aura pour homologue sur le cylindre (p',P) une helice φ' dont la tangente fera avec l'axe P un angle α. En faisant passer successivement le point m par les divers points de la droite mo, et à chaque position nouvelle faisant les constructions précédentes, on voit que par les divers points m, m', m'', m''', etc. de la ligne mo passeront des hélices φ, φ', φ'', φ''', etc., dont les tangentes feront toutes avec l'axe P le même angle α, ces hélices étant tracées sur des cylindres concentriques, dont les cercles bases auront respectivement pour rayons les distances des points m, m', m'', m''', etc. au point o situé sur l'axe P, distances que je désignerai par p, p', p'', p''', etc. et p', p'', p''', etc., étant les unes $>$ et les autres $<$ que p.

La surface formée par les hélices φ, φ', φ'', φ''' étant désignée par E, on voit que suivant la droite mo, qui sera une génératrice de cette surface, il existera un plan tangent unique qui passera par les tangentes aux courbes φ, φ', φ'', φ''', etc., et menées respectivement aux points m, m', m'', m''', etc. de ces hélices. Maintenant démontrons que cette surface E est un cône dont le sommet est au point o.

Pour cela (*fig.* 21), supposons trois cercles concentriques (o,p''), (o,p), (o,p'). Désignant par o leur centre commun et par $p'' < p < p'$ leurs rayons, coupons ces trois cercles par une droite ob passant par le centre. Les points d'intersection étant m'', m, m', supposons que ces trois cercles sont les bases de trois cylindres verticaux, et par chaque génératrice passant respectivement par les points m'', m, m', menons à ces cylindres des plans tangents M'', M, M'. Dans chacun de ces plans traçons des droites parallèles entre elles et passant par les trois points situés sur les cercles de base, ces trois droites faisant avec l'axe commun aux cylindres le même angle α; désignons ces droites par $m''d$, md, $m'd$. Les trois plans tangents couperont le plan horizontal sur lequel sont tracés les trois cercles suivant des tangentes à ces cercles et que nous désignerons par $m''t$, mt, $m't$.

Par le point o menons une droite oc coupant les trois tangentes aux points n'', n, n'; élevant par ces trois points des verticales qui seront respectivement situées dans les trois plans tangents, elles couperont les droites $m''d$, md, $m'd$, en trois points g'', g, g', qui seront sur une droite oG passant par le point o.

Si maintenant j'enroule les trois droites $m''d$, md, $m'd$, sur leurs cylindres respectifs, j'aurai trois hélices φ'', φ, φ', faisant avec l'axe un angle constant α, et chacun des points g'', g, g' se placera sur les hélices correspondantes en des points h'', h, h', qui seront évidemment sur une droite oH passant par le point o. Ainsi toutes les hélices φ'', φ, φ' seront sur un cône dont le sommet sera au point o.

Nous avons jusqu'ici supposé qu'il n'existait sur le pignon (q,Q) qu'une seule hélice ζ. Supposons qu'il existe ∂ hélices équidistantes entre elles [la distance entre deux hélices étant mesurée sur une génératrice du cylindre (q,Q)], ces hé-

lices ζ, ζ', ζ'',... etc. diviseront le cercle base du pignon en δ arcs égaux. Si je fais mouvoir ce cylindre sur celui dont le rayon égale p et dont l'axe est P, alors comme le cylindre (q,Q) se développera exactement sur le cylindre (p,P), on obtiendra $\left(\frac{p}{q}\cdot\delta\right)$ hélices sur ce cylindre, et toutes équidistantes entre elles et de la même quantité qui existe pour deux hélices consécutives ζ, ζ', tracées sur le cylindre (q,Q).

Nommons θ, θ', θ'',... etc. les hélices obtenues sur le cylindre (p,P), nous pourrons les regarder comme les directrices d'une série de cônes ayant tous pour sommet commun le point o.

Nous pourrons couper ces cônes par deux cylindres (p',P) et (p'',P), le rayon p' étant $<$ que p et le rayon $p''>p$, et les zones coniques interceptées formeront les surfaces des dents de la roue ayant pour axe P. Et comme les hélices intersections de la série des cônes et du cylindre (p'',P) seront équidistantes, mais d'une quantité plus grande que celle qui existe entre deux hélices consécutives ζ, ζ' du pignon ; et que celles qui seront l'intersection de la série des mêmes cônes et du cylindre (p',P), le seront d'une quantité plus petite ; il est évident que le cylindre (q,Q) du pignon ne pourra se mettre en contact qu'avec le cylindre (p,P) de la roue, le mouvement de rotation ne pouvant être continu qu'autant que les hélices ζ, ζ', etc. conduiront respectivement les hélices θ, θ', etc. ; et comme les contacts des diverses dents seront situés sur une génératrice du cylindre (p,P), et que par ces points passeront respectivement des génératrices des divers cônes formant la surface des dents en contact, ces génératrices feront avec l'axe P des angles différents, puisqu'elles partent toutes du même point o. Les plans tangents aux points de contact feront donc des angles différents avec l'axe P ; par conséquent le pignon ne pourra pas tourner autour de la ligne qui contient les points successifs de contact, pour prendre une autre position que celle que la construction a déterminée.

On appliquerait facilement les mêmes raisonnements et les mêmes constructions à l'engrenage conique (*).

§ II.

Dans ce paragraphe, je me propose d'exposer en peu de mots toute la théorie

(*) J'ai publié ce mémoire sans y rien changer, ni modifier ; il est conforme au texte du manuscrit présenté à l'Institut, sauf les corrections de style qui arrivent toujours lors de l'impression. J'ai pensé que je devais imprimer ce mémoire textuellement pour que l'on pût s'assurer qu'en effet la question se trouvait résolue dès 1825, et qu'ainsi Withe avait raison. Je crois devoir ajouter que la démonstration exposée dans ce mémoire, avait été trouvée dès 1818, lorsque j'étais élève sous-lieutenant d'artillerie à l'École d'application de Metz, et que je n'ai fait que transcrire ce que j'avais écrit, à cette époque, sur les engrenages de Withe.

géométrique des engrenages de Withe, et de démontrer d'une manière très-simple, qu'en effet, on peut construire des engrenages à la Withe qui jouissent à volonté des trois espèces de frottement, savoir : frottement de roulement, 1° direct ou 2° angulaire, et 3° frottement de glissement angulaire ; pouvant d'ailleurs rendre aussi considérable que l'on voudra, ou aussi petit que l'on voudra, le glissement d'une dent sur l'autre, pendant le temps que ces deux dents emploient à se conduire.

Supposons deux axes parallèles P et Q distants l'un de l'autre d'une quantité k, et supposons que dans le plan de ces axes on ait une droite R parallèle à l'une et l'autre droite P et Q et telle que la distance p de la droite R à l'axe P soit à la distance q de la même droite R à l'axe Q dans le rapport inverse des vitesses des axes P et Q.

Ainsi V étant la vitesse de l'axe P et v celle de l'axe Q, on aura :

$$\frac{p}{q} = \frac{v}{V}$$

La droite R, en tournant autour de l'axe P, engendrera un cylindre (p,P) et en tournant autour de l'axe Q elle engendrera un cylindre (q,Q).

Coupons ces deux cylindres par deux plans parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite R, et désignons par z la distance entre ces deux plans.

Le premier plan coupera le cylindre (p,P) suivant un cercle C, et le second plan coupera suivant un cercle C'.

Le premier plan coupera le cylindre (q,Q) suivant un cercle c, et le second plan coupera suivant un cercle c'.

Supposons ces quatre cercles liés deux à deux respectivement aux axes P et Q, on voit que lorsque l'axe P tournera sur lui-même avec la vitesse V, les cercles C et C' entraîneront respectivement les cercles c et c' et forceront l'axe Q à se mouvoir avec la vitesse v ; les cercles homologues C et c, C' et c' roulant l'un sur l'autre.

Si l'on mène suivant la droite R un plan tangent commun aux deux cylindres (p,P) et (q,Q), et que dans ce plan on mène une droite D, en pliant ce plan sur le cylindre (p,P), la droite D se déformera suivant une hélice S, et, en pliant le même plan sur le cylindre (q,Q), la droite D se déformera suivant une hélice s.

Et si nous désignons par α l'angle sous lequel la droite D coupe la droite R, on aura, en désignant par H le *pas* de l'hélice S et par h le *pas* de l'hélice s :

$$(2\Pi . p) \cot \alpha = H \quad \text{et} \quad (2\Pi . q) \cot \alpha = h$$

On aura donc :

$$\frac{H}{h} = \frac{p}{q} = \frac{v}{V}$$

Ainsi les *pas* des hélices S et s seront dans le rapport inverse des vitesses des axes, ainsi que le sont les rayons des cercles homologues C et c.

Cela posé :

Il est évident que la portion de l'hélice S, ainsi que celle de l'hélice s, comprises entre les deux plans distants entre eux de la quantité z seront égales entre elles, et dès lors pendant le mouvement de rotation, ces deux portions d'hélices rouleront l'une sur l'autre, ayant en chacun de leurs points de contact une tangente commune; et le point de contact décrira la droite R. On aura donc le frottement de roulement direct (1er *cas*).

Si maintenant on fait tourner le cylindre (q,Q) autour de la droite R, sans rien changer à ce qui a été construit précédemment (sinon que la distance des deux axes P et Q sera plus petite que k), les deux hélices S et s se croiseront en un point situé sur la droite R, et pendant le mouvement de rotation, elles se développeront l'une sur l'autre, mais le frottement de roulement sera angulaire, puisque pour chaque point de contact angulaire, leurs tangentes se croisent au lieu de se superposer. On aura donc le frottement de roulement angulaire (2e *cas*).

Mais si l'on prend deux cylindres ayant pour axe l'un P et l'autre Q, ces deux cylindres se coupant suivant deux droites M et N, et si l'on mène deux plans perpendiculaires à la droite M et distants entre eux d'une quantité z; en sorte que le cylindre ayant P pour axe soit coupé par le premier plan, suivant un cercle C_1 du rayon p_1, et par le second plan suivant un cercle C'_1 du même rayon p_1; et que le cylindre ayant Q pour axe soit coupé par le premier plan suivant un cercle c_1 du rayon q_1 et par le second plan suivant un cercle c'_1 du même rayon q_1.

Si les axes P et Q se meuvent avec les vitesses V et v, les cercles homologues C_1 et c_1, C'_1 et c'_1 ne rouleront angulairement l'un sur l'autre qu'autant que l'on aura :

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{v}{V} \qquad (1)$$

Mais si cette équation ne subsiste pas, alors les cercles homologues glisseront angulairement l'un sur l'autre.

Supposons donc que l'équation (1) n'a pas lieu, et menons par la droite M un plan et dans ce plan une droite D coupant la droite M sous l'angle α. Enroulons ce plan sur le cylindre (p_1,P) ; la droite D se déformera suivant une hélice S_1, et en enroulant le même plan sur le cylindre (q_1,Q), la droite D se déformera suivant une hélice s_1.

Et désignant par H_1 le *pas* de l'hélice S_1 et par h_1 celui de l'hélice s_1, on aura :

$$(2\Pi . p_1) \cot \alpha = H_1 \quad \text{et} \quad (2\Pi . q_1) \cot \alpha = h_1$$

on aura donc :

$$\frac{H_1}{h_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

Mais comme l'équation (1) n'est pas satisfaite, les *pas* des hélices S_1 et s_1 ne seront pas dans le rapport inverse des vitesses des axes ; si donc l'on veut que les deux axes P et Q ne changent pas de vitesses, il faudra nécessairement, en supposant que l'hélice S_1 coupe la droite M sous l'angle α, supposer que l'on a une hélice s'_1 autre que s_1 qui soit chargée de conduire l'hélice S_1.

En désignant par h'_1 le *pas* de cette hélice particulière s_1', on devra avoir :

$$\frac{H_1}{h'_1} = \frac{v}{V} \qquad (2)$$

Désignant donc par α' l'angle sous lequel l'hélice s_1' doit couper la droite M, on aura :

$$(2\Pi . p_1) \cot \alpha = H_1 \quad \text{et} \quad (2\Pi . q_1) \cot \alpha' = h'_1$$

et en vertu de ce que l'équation (2) doit être satisfaite, on aura :

$$\frac{p_1 . \cot \alpha}{q_1 . \cot \alpha'} = \frac{v}{V} \qquad (3)$$

Ainsi, cette équation (3) servira à déterminer l'inclinaison α' de l'hélice s_1' nécessaire pour que cette hélice s_1 conduise angulairement l'hélice S_1 et de telle manière que les vitesses des axes soient toujours dans le rapport constant $\frac{v}{V}$.

Mais la position de l'hélice S_1 comprise entre les deux plans distants de la quantité z, ne sera pas égale en longueur à la portion de l'hélice s_1' comprise entre ces deux mêmes plans ; et la différence qui existera entre la longueur rectifiée L de la portion de l'hélice S_1 et la longueur rectifiée l' de la portion de l'hélice s_1', sera aussi grande ou aussi petite que l'on voudra ; pour cela il suffira de faire varier convenablement les rayons p_1 et q_1.

Ainsi plus $\frac{p_1}{q_1}$ différera de $\frac{v}{V}$, plus la différence $(L - l')$ sera grande ; plus au contraire $\frac{p_1}{q_1}$ approchera d'être égal à $\frac{v}{V}$, plus la différence $(L - l')$ sera petite.

On aura donc, dans ce cas, un frottement de glissement angulaire qui pourra devenir aussi petit que possible (3[e] *cas*).

Et remarquons que plus $\frac{p_1}{q_1}$ approche de $\frac{v}{V}$, plus l'angle α' approche d'être égal à l'angle α.

D'après ce qui précède, on voit : 1° que dans les deux premiers cas, les rayons p et q doivent être commensurables entre eux pour que le mouvement de rotation puisse être continu, car il faut que le cercle c se développe un nombre exact de fois sur le cercle C, pour que l'hélice s puisse venir reprendre l'hélice S ; et 2° que, dans le troisième cas, les rayons p_1 et q_1 n'ont pas besoin d'être commensurables entre eux ; ainsi il suffira dans les trois cas de diviser les cercles homologues C et c ou C_1 et c_1 en un nombre d'arcs égaux entre eux et tels que si on en place m sur C ou C_1 et n sur c ou c_1, on aura : $\frac{m}{n} = \frac{v}{V}$. Dès lors, si par les points de division des cercles C ou C_1, on fait passer des hélices telles que S ou S_1, et si par les points de division des cercles c ou c_1, on fait aussi passer des hélices telles que s ou s_1', le mouvement de rotation se continuera sans interruption.

N° 4.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE D'UN ENGRENAGE

DANS LEQUEL

Les axes des deux roues dentées ne sont pas situés dans un même plan et comprennent entre eux un angle plus petit que l'angle droit, les vitesses étant dans un rapport constant et le frottement étant de roulement angulaire (*).

Étant donnés deux axes P et Q qui ne se rencontrent point et qui sont dirigés d'une manière arbitraire dans l'espace, comprenant par conséquent entre eux un angle quelconque α, on demande s'il est possible (d'après les principes géométriques sur lesquels repose la construction des engrenages cylindriques et coniques de Withe), de construire deux roues dentées se conduisant par un frottement de roulement, et les vitesses angulaires de ces axes étant dans un rapport constant.

Jusqu'à présent l'on a cru qu'il n'était pas possible de transmettre le mouvement d'un axe à un autre dans le cas où ces axes n'étaient point dans un même

(*) Ce mémoire, qui fut présenté à l'Institut de France (Académie royale des sciences) en décembre 1825, a été publié dans le *Journal des mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville.

plan, par un engrenage formé de deux roues seulement, excepté lorsque les axes étaient à angle droit, et alors on avait le système connu sous le nom d'*engrenage à vis sans fin*. Mais lorsque l'angle compris entre les deux axes était plus petit ou plus grand qu'un droit, l'on avait recours à une troisième roue doublement dentée, dite supplémentaire, dont l'axe coupait les deux axes donnés, et le mouvement se transmettait par le système de deux engrenages coniques, la roue intermédiaire étant formée de deux roues dentées coniques juxtaposées par leur grande base (*).

Supposons que le plan vertical de projection soit parallèle aux deux axes donnés et que le plan horizontal de projection soit perpendiculaire à l'un des axes P, par exemple, l'autre étant désigné par Q (*fig.* 22). Dès lors l'axe P aura pour projection verticale la ligne *o*V perpendiculaire à la ligne de terre LT, et pour projection horizontale le point *o*. (Nous supposons que l'axe P est situé dans le plan vertical de projection.) L'axe Q aura pour projection verticale la droite *o*H faisant avec *o*V un angle α arbitraire, et pour projection horizontale la droite *n*H' parallèle à la ligne de terre; de sorte que la ligne *on* perpendiculaire à la ligne de terre sera la projection horizontale de la plus courte distance entre les deux axes P et Q, et le point *o* sera la projection verticale de cette plus courte distance.

Les vitesses de rotation des deux axes sont données. Désignant par V la vitesse de l'axe P et par *v* celle de l'axe Q, $\frac{V}{v}$ sera le rapport des vitesses des axes du système.

Si sur la ligne *on* je prends un point *p* tel que l'on ait $op : pn :: v : V$, c'est-à-dire tel que ses distances aux deux axes donnés P et Q soient dans le rapport inverse des vitesses de ces axes, je pourrai regarder le point *n* comme le centre d'un cercle dont le rayon serait égal à *np* et dont le plan serait perpendiculaire à l'axe Q. J'appelle ce cercle *c*.

Je pourrai aussi regarder le point *o* comme le centre d'un cercle dont le rayon serait égal à *op* et dont le plan serait perpendiculaire à l'axe P. J'appelle ce cercle C.

Les plans de ces deux cercles se coupent suivant la droite *on* située sur le plan horizontal, et ces deux cercles ne se coupent que suivant le seul point *p*; si l'on fait mouvoir les deux axes P et Q et que par leur mouvement de rotation ils entraînent avec eux les deux cercles *c* et C, ces deux cercles rouleront l'un sur l'autre, c'est-à-dire qu'un point de l'un d'eux ne se mettra jamais en contact qu'avec un seul point de l'autre cercle. Mais comme au point commun les tan-

(*) Voyez le chapitre II de la *Théorie géométrique des engrenages*, etc., que j'ai publiée en 1842 chez M. Bachelier, libraire-éditeur.

gentes à ces cercles font entre elles un angle, nous avons désigné ce genre de roulement par les mots *roulement angulaire.*

Ainsi le frottement qui existera entre les deux cercles *c* et C ne sera point un frottement de glissement, mais bien de roulement, et qui, dans ce cas, vu la position qu'affectent les deux courbes l'une par rapport à l'autre, n'est point de même nature que lorsque les tangentes au point commun se confondent. Dans ce dernier cas, les courbes ont un contact, et depuis longtemps le frottement de cette espèce est connu et désigné ainsi : frottement de *roulement direct.*

Mais dans le cas que nous examinons les deux cercles se coupent et nous adopterons la dénomination de frottement de *roulement angulaire.*

Si maintenant on construit une ligne D passant par le point dont les projections sont *p* et *o*, et telle que les distances de chacun de ses points aux deux axes P et Q soient dans un rapport constant et inverse de celui des vitesses des axes, cette ligne D engendrera par son mouvement de rotation autour de l'axe P une surface de révolution P_1 et par son mouvement de rotation autour de l'axe Q une deuxième surface de révolution Q_1, qui se couperont suivant la ligne D et une courbe δ. Chacun des points de la ligne D décrira, soit autour de P, soit autour de Q, des cercles qui se couperont deux à deux de la même manière que les cercles *c* et C ; de sorte que si sur la surface P_1 je trace une courbe arbitraire ξ et que je fasse mouvoir cette surface P_1 autour de son axe P, elle entraînera la surface Q_1 sur laquelle la courbe ξ laissera pour empreinte une courbe ξ', et ces deux courbes seront évidemment telles qu'un point de l'une d'elles ne se mettra jamais en contact qu'avec un seul point de l'autre.

Ainsi les deux courbes ξ et ξ' auront un frottement de roulement, et comme il est évident que leurs tangentes au point commun font un angle entre elles (comme on peut s'en assurer en construisant ces tangentes par la méthode de Roberval), ce frottement sera *angulaire.*

Si maintenant, pour une position de rencontre des courbes ξ et ξ', je fais passer un plan T par les deux tangentes à ces courbes, ce plan sera tangent à ces deux courbes ; et si dans ce plan je mène une droite quelconque R passant par le point commun aux deux courbes, et par cette droite un plan N perpendiculaire au plan T, et qu'ensuite dans le plan N je construise deux courbes γ et γ' ayant pour tangente commune la droite R, l'une de ces courbes étant en dessus, l'autre en dessous de la droite R, ou en d'autres termes, deux courbes se tournant leur convexité, et que je fasse mouvoir le plan N de manière qu'il soit toujours perpendiculaire aux différents plans T', T'', T''', etc. passant par les tangentes qui se croisent aux points successifs de rencontre des courbes ξ et ξ', et que la droite R soit toujours l'intersection du plan N avec ces différents plans tangents aux deux courbes ξ et ξ',

les courbes γ et γ' auront formé deux surfaces Σ et Σ' qui seront tangentes l'une à l'autre dans toutes les positions qu'elles prendront par le mouvement de rotation des axes P et Q ; ces deux filets ou dents Σ et Σ' se conduiront par un frottement de roulement *angulaire*, et le rapport des vitesses des deux roues dentées sera constant et égal à celui des axes, c'est-à-dire à $\frac{V}{v}$.

Cherchons maintenant quelle est la nature de la ligne D. Je dis que cette ligne sera une droite dont la projection horizontale sera pg parallèle à la ligne de terre, et dont la projection verticale sera oG partageant l'angle α en deux, dont les sinus seront dans le rapport inverse des vitesses des axes P et Q.

En effet, il faut qu'un point de l'espace dont les projections sont m sur le plan vertical et m' sur le plan horizontal, soit tel que ses distances aux deux axes P et Q se trouvent être dans le rapport inverse des vitesses de ces axes. Si par ce point je mène les droites mh et mq respectivement perpendiculaires aux projections verticales des axes P et Q, elles seront les projections verticales des distances du point de l'espace aux deux axes. La distance du point (m, m') à l'axe P sera donc en véritable grandeur la ligne om', hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés est $m'o' = op$, et l'autre la ligne mh'. La distance du point (m, m') à l'axe Q sera donc en véritable grandeur la ligne $m'r'$, hypoténuse d'un triangle dont l'un des côtés est $m'n' = pn$, et l'autre la ligne $n'r' = mr = mq$. Or il faut que l'on ait :

$$om' : m'r' :: m'o' : m'n' :: op : pn :: v : V.$$

Par conséquent $n'r' = mq$ doit être à $o'o = mh$ dans le même rapport v : V. Ainsi les deux lignes menées du point m perpendiculairement aux projections verticales des axes P et Q seront dans le rapport inverse des vitesses de ces axes ; par conséquent, tous les points de la droite (oG, pg) satisferont à cette condition. Ainsi la ligne D est une droite dont les projections sont oG et pg, la projection verticale oG partageant l'angle α en deux angles β et β' tels que leurs sinus sont dans le rapport inverse des vitesses des axes P et Q ; la projection horizontale pg étant parallèle à la ligne de terre.

Ainsi les deux surfaces P_1 et Q_1 sont deux hyperboloïdes à une nappe et de révolution se coupant suivant une génératrice sur laquelle se mouvra le point de contact des deux dents Σ et Σ'.

Ces deux hyperboloïdes se couperont encore suivant une courbe du troisième degré ; mais on ne doit y faire aucune attention, puisque l'on peut ici faire la même remarque que pour le cas des engrenages cylindriques dans lesquels les surfaces cylindriques idéales, contenant la ligne droite, lieu des contacts successifs des dents, n'étaient point tangentes suivant cette ligne, mais se coupaient

suivant elle ; ainsi les deux filets Σ et Σ' n'ont qu'un seul point commun dans chaque position, et ils ne peuvent point avoir de contact suivant aucun point de la courbe du troisième degré, mais seulement suivant les points de la génératrice d'intersection par rapport à laquelle on a fait les constructions.

Dans la pratique on peut, pour plus de facilité, supposer que les courbes ξ et ξ' sont des spirales tracées sur les hyperboloïdes, réduire la surface Σ' à la courbe ξ' et supposer que la surface Σ est engendrée par une droite au lieu de l'être par la courbe γ.

Dès lors la surface Σ sera un filet de vis hyperboloïdique, et l'on voit que les surfaces hyperboloïdes P_1 et Q_1 sont idéales, c'est-à-dire n'existent que par la pensée. Il n'existe de l'hyperboloïde P_1 que la spirale ξ qui fait partie de la surface Σ du filet de vis, et il n'existe de l'hyperboloïde Q_1 que la spirale ξ'. On pourra construire autant de filets qu'on le voudra, mais pour que le mouvement de rotation puisse se continuer, il faudra que ces filets ou dents soient équidistants sur l'une et l'autre roue.

Ainsi, autant il y aura de spirales telles que ξ', ξ'', etc. qui couperont la génératrice des hyperboloïdes idéaux, autant il y aura de dents par lesquelles les roues seront en contact.

On doit remarquer que, pour le point p situé sur la plus courte distance des axes P et Q, les deux hyperboloïdes sont tangents, et que les deux surfaces Σ et Σ' le seront aussi en ce même point ; que par conséquent, pour ce point, le plan T sera vertical et parallèle aux deux axes P et Q. (Les deux courbes ξ et ξ' étant supposées avoir pour point commun ce point p.

Lorsque les deux surfaces Σ et Σ' par le mouvement de rotation seront en contact suivant un autre point m de la droite (oG, pg), alors le plan $T^{(m)}$ correspondant à ce point commun aux deux courbes ξ et ξ' coupera l'axe P, et l'on prendra pour génératrice de la surface Σ, en supposant que Σ' se réduise à la courbe ξ', la droite qui passera par le point m commun aux deux courbes ξ et ξ' et par celui où le plan $T^{(m)}$ coupera l'axe P.

On voit donc que la surface Σ sera engendrée par une droite qui s'appuiera sur l'axe P et la courbe ξ et qui aura son mouvement réglé par la condition qu'elle soit toujours contenue dans le plan passant par les deux tangentes aux courbes ξ et ξ' au point qui leur est commun. Cette génératrice pour le point p sera parallèle à l'axe P, et pour le point situé à l'infini sur la droite (oG, pg), elle sera horizontale.

On doit encore remarquer que la droite (oG, pg) n'est pas la seule qui satisfasse au problème ; on peut encore, par le point p situé sur la plus courte distance, faire passer une droite (oG$'$, pg) qui soit contenue dans un plan parallèle aux deux

axes P et Q, et qui divise le supplément de l'angle α de ces axes en deux dont les sinus seront dans le rapport inverse de leurs vitesses.

On peut encore, sur la plus courte distance, prendre un point p' tel que l'on ait $p'o : p'n :: v : V$, et par ce point faire passer deux droites respectivement parallèles aux droites (oG, pg), (oG', pg).

Ainsi, l'on peut satisfaire au problème par quatre systèmes différents formant ou deux engrenages intérieurs, ou deux engrenages extérieurs. Si l'on voulait résoudre le problème par l'analyse, on aurait un nombre infini de solutions. Car on trouverait que la surface qui jouit de la propriété d'avoir ses points distants des deux axes P et Q, dans un rapport constant, est une hyperboloïde à une nappe non de révolution et passant par les points p et p' de la plus courte distance; par conséquent l'on peut prendre pour la ligne D une courbe arbitraire tracée sur la surface hyperboloïde que nous venons d'indiquer; mais je n'ai voulu donner ici que les lignes D qui pourraient être déduites par la géométrie.

Dans un mémoire intitulé : *Théorie des engrenages*, etc., j'ai donné (*) la solution analytique et complète de ce problème.

Dans les engrenages hyperboloïdiques dont je viens de donner la construction, l'on n'a point à craindre l'inconvénient que j'ai signalé dans les engrenages cylindriques ou coniques construits par Withe, savoir : que lorsque la génératrice de la surface héliçoïde de la dent était perpendiculaire à la ligne droite sur laquelle se mouvait le point de contact des dents, les roues pouvaient prendre deux positions différentes de contact, et trois positions de contact lorsque la génératrice de la surface était inclinée par rapport à la ligne des contacts des dents.

Cet inconvénient n'existe pas ici, parce que les plans tangents aux divers points où les surfaces des dents coupent la droite (oG, pg), lieu des contacts, ne sont point parallèles entre eux. En effet, supposons une surface courbe Σ et une courbe ξ', Σ et ξ' ayant un point de contact. Nommons $t\xi'$ la tangente à la courbe ξ' au point m, et T le plan tangent au point m à la surface Σ, ce plan T contiendra la droite $t\xi'$. Par le point m, élevons une droite N perpendiculaire au plan T. Si l'on fait tourner la courbe ξ' autour de N comme axe, on engendrera une surface de révolution S tangente à Σ au point m, et la courbe ξ' pourra prendre autour de N une infinité de positions dans lesquelles elle sera toujours tangente à la surface Σ.

Mais si par le point m on mène une droite N' inclinée par rapport au plan T et telle que l'angle formé par les droites N' et $t\xi'$ soit l'angle de la droite N' avec le plan T, alors la courbe ξ' ne pourra plus tourner autour de la droite N' en

---

(*) Voyez les *Développements de géométrie descriptive*, chap. VI, pag. 332, 337 et 346.

restant tangente au point m à la surface Σ; dans toute autre position que celle qu'elle affecte primitivement, elle coupera la surface Σ. Si la ligne N' ne fait point avec $t\xi'$ l'angle le plus petit ou le plus grand qui existe entre elle et le plan T dans la position qu'on lui a donnée, alors on pourra, par le point m, mener dans le plan T une droite t' qui fasse avec N' un angle égal à celui que font entre eux la droite N' et le plan T; et dès lors, si l'on fait tourner la courbe ξ' autour de N', il y aura un moment où la droite $t\xi'$ prendra une position t'', telle que l'angle $t'mt''=tmt'$, et en cette position la courbe ξ' sera encore tangente à la surface Σ; mais dans toute autre position ξ' coupera Σ.

Si donc nous désignons les deux axes par P et Q; si nous nommons R la génératrice suivant laquelle les deux hyperboloïdes se coupent (désignant par HP l'hyperboloïde qui a pour axe P, et par HQ celui qui a pour axe Q); si nous supposons (*fig.* 23) que l'on ait trois dents sur la surface HP et coupant la droite R aux points m', m'', m''', la surface de la première dent étant désignée par Σ', celle de la seconde par Σ'', et celle de la troisième par Σ''', l'on aura sur l'hyperboloïde HQ trois dents correspondant à celles situées sur la surface HP. Ces dents seront terminées par trois courbes ξ', ξ'', ξ''', la première passant par le point m', la deuxième par m'' et la troisième par m'''; sur la surface Σ' existera une courbe $\xi_{,}'$ correspondante de ξ', et telle que ces deux courbes pendant le mouvement de rotation se conduiront par un contact angulaire, les points de contact étant successivement sur les divers points de la droite R et le premier contact étant en m'; de même sur la surface Σ'' on aura la courbe $\xi_{,}''$ passant par le point m'', et sur la surface Σ''' la courbe $\xi_{,}'''$ passant par le point m'''.

La génératrice de la surface Σ' correspondant au point m sera une droite contenue dans le plan qui contient les deux tangentes aux courbes ξ' et $\xi_{,}'$ au point m' et passant par l'axe P. Nous nommerons t' la tangente à ξ', $t_{,}'$ la tangente à $\xi_{,}'$, et g' la génératrice. Nous aurons de même au point m'', les tangentes t'', $t_{,}''$, et la génératrice g'' de la surface Σ''; nous aurons de même au point m''' les trois droites t''', $t_{,}'''$ et g'''.

Les droites g', g'', g''' ne feront point avec l'axe P le même angle, d'après ce que nous avons dit; ainsi le point m' étant le plus près de celui qui est situé sur la plus courte distance des axes P et Q, il arrivera que l'angle δ' formé par l'axe P et la droite g' sera plus petit que l'angle δ'' formé par l'axe P et la droite g'', et plus petit que δ''' formé par l'axe P et la droite g'''.

Par conséquent, les trois points m', m'', m''', en tant qu'appartenant à la surface HQ, ne pourront se placer que sur les points m', m'', m''' des droites g', g'', g'''. Aucuns autres points n', n'', n''', en ligne droite et situés respectivement sur les génératrices g', g'', g''', ne pourront se mettre en contact avec eux; par consé-

quent la position respective des deux hyperboloïdes HP et HQ est déterminée d'une manière invariable. Les roues de l'engrenage ne pourront donc prendre une autre position que celle qui leur est assignée par la construction.

La génération de la surface Σ qui doit terminer la dent de la roue HP pourrait présenter des difficultés dans l'exécution pratique ; je proposerai donc de construire les dents de l'engrenage de la manière suivante :

Étant donnés deux axes P et Q et une droite R telle que tous ses points soient distants des deux axes dans un rapport constant et inverse de celui de leurs vitesses respectives, l'on obtiendra, ainsi que nous l'avous dit plus haut, en faisant tourner la droite R autour de l'axe P une surface de révolution, un hyperboloïde à une nappe HP ; de même en faisant tourner la même droite R autour de l'axe Q, on aura la surface HQ. Ces deux surfaces se couperont suivant la droite R passant par un point de la plus courte distance qui existe entre les axes P et Q, et une courbe du troisième degré γ qui passera aussi par le point où la droite R coupe la plus courte distance.

Cela posé : si l'on divise la droite R en $(n-1)$ parties égales entre elles, par les points m', m'', m'''... $m^{(n)}$, et que par chacun de ces points on mène des plans perpendiculaires à l'axe P, l'on aura pour intersections dans la surface HP des cercles. Désignant l'un de ces cercles par C ; si par l'axe P l'on mène une suite de plans méridiens au nombre de $(n-1)$, ils diviseront le cercle C en $(n-1)$ arcs égaux, ainsi que tous les cercles parallèles à celui-ci, et la courbe qui passera par le premier point situé sur le cercle Cm', par le deuxième point situé sur le cercle Cm'', par le troisième point situé sur le cercle Cm''' et enfin par le dernier point $m^{(n)}$ ou le $(n-1)^e$ situé sur le cercle $Cm^{(n)}$, sera une spirale hyperboloïdique dont le *pas* sera mesuré sur la droite R par la distance comprise entre les points m' et $m^{(n)}$.

Nous nommerons H ce *pas* et ξ la courbe *spirale*. On voit évidemment que cette courbe peut être tracée mécaniquement par un mouvement continu. Si l'on divise de même un cercle C' appartenant à la surface HQ, par une suite de plans méridiens passant par l'axe Q en un certain nombre de parties égales entre elles, ce nombre étant représenté par $(n'-1)$ et tel que le rapport entre $(n-1)$ et $(n'-1)$ soit celui qui existe entre les distances respectives d'un des points de la droite R aux deux axes P et Q, on construira une spirale ξ_1 qui sera la correspondante de ξ ; son *pas* h mesuré sur la droite R sera tel que $\frac{H}{h} = \frac{n-1}{n'-1}$, et ces deux courbes ξ et ξ_1 se conduiront par un frottement de roulement *angulaire*.

Maintenant, par chacun des points de la courbe ξ, l'on fera passer des droites perpendiculaires à l'axe P et qui formeront une surface spirale hyperboloïdique ; cette surface sera nommée Σ. De même par la courbe ξ on fera passer des droites

perpendiculaires à l'axe Q et formant aussi une surface spirale hyperboloïdique Σ'. Ces deux surfaces pendant le mouvement de rotation ne seront en contact que par des points situés respectivement sur les courbes ξ et ξ_1. On ne prolongera les surfaces Σ et Σ', du côté des axes P et Q, et respectivement, qu'autant qu'il sera nécessaire pour que la courbe ξ_1 puisse passer, puisqu'elle pénètre dans l'intérieur de la surface HP, et pour que la courbe ξ puisse aussi passer, puisqu'elle pénètre aussi elle-même dans l'intérieur de la surface HQ. De sorte qu'il y aura un noyau fixé à l'axe P et à la surface duquel la surface Σ s'arrêtera; de même aussi la surface Σ' s'arrêtera à la surface d'un noyau fixé à l'axe Q et assez rapproché de cet axe pour permettre un libre mouvement à la courbe ξ.

Ensuite l'on donnera à la dent une épaisseur suffisante (comme à un filet de vis). On n'aura pas besoin de lui donner un excès de longueur : on pourra la terminer à l'hyperboloïde HP ou HQ, parce que les deux courbes ξ et ξ_1 n'ayant point leur plan tangent commun en chacun de leurs points de contact successifs (excepté pour celui situé sur la plus courte distance), parallèle aux deux axes P et Q, les dents ne pourront s'échapper pendant le mouvement de rotation.

Cette construction pourra s'exécuter facilement sur le tour, et par conséquent l'on peut, je crois, regarder le problème qui fait le sujet de ce mémoire, comme résolu, soit en théorie, soit en pratique.

Il faut cependant démontrer que la surface Σ, dans quelque position que ce soit, ne rencontrera la courbe ξ_1 qu'au seul point de contact angulaire existant entre les deux courbes ξ et ξ_1.

Soient P et Q (*fig.* 24) les deux axes donnés. Soit R la génératrice commune aux deux hyperboloïdes HP et HQ, et en même temps la droite des contacts angulaires successifs des dents de l'engrenage. Soit γ la courbe du troisième degré, seconde ligne d'intersection des deux surfaces HP et HQ. Soit *ab* la plus courte distance entre les axes, le point *d* étant situé sur cette plus courte distance, de telle manière que *ad* et *db* soient dans le rapport inverse des vitesses des axes; la droite R et la courbe γ passeront par le point *d*.

Il est évident que si par un point *m* pris arbitrairement sur la droite R je fais passer deux plans respectivement perpendiculaires aux axes P et Q, l'un coupera la surface HP suivant un cercle C, l'autre coupera la surface HQ suivant un cercle C', tels que le premier coupera la courbe γ en un point m'' et le deuxième en un point m', et que ces deux points seront toujours dans la même position relative, savoir : que m' sera toujours au-dessous de m'', et qu'ainsi, si la droite $m'm''$ représente l'intersection des plans des deux cercles, la partie mm' du cercle C' sera toujours en dessous du plan du cercle C et que la partie mm'' sera toujours au-dessus de ce même plan.

Les deux cercles C et C′ sont des courbes correspondantes, c'est-à-dire qu'elles se roulent angulairement, le point de contact se plaçant toujours au point m : pour deux courbes correspondantes, telles que ξ et $\xi_{,,}$, on aura les mêmes résultats, seulement le point de contact variera de position sur la droite R.

Ainsi (*fig.* 25) les deux courbes correspondantes ξ et $\xi_{,,}$ étant en contact angulaire au point m situé sur la droite R, si je prends sur la courbe ξ un point m'' qui soit le correspondant du point m''' situé sur la courbe $\xi_{,,}$, ces deux points seront tels que les cercles C et C′ passant l'un par m'', et son plan étant perpendiculaire à l'axe P, l'autre par m''', et son plan étant perpendiculaire à l'axe Q, se couperont en un point m' situé sur la droite R. Il est évident que toute la portion mm''' de la courbe $\xi_{,}$ sera au-dessous du plan du cercle C, et que tous les points de l'arc mm''' seront au-dessus de la surface spirale hyperboloïdique formée par les droites perpendiculaires à l'axe P et s'appuyant sur la courbe ξ ; qu'il en sera de même par rapport à la surface spirale ayant Q et $\xi_{,}$ pour directrices, c'est-à-dire que la partie mm'' de la courbe ξ sera au-dessus d'elle.

Ainsi les deux surfaces spirales hyperboloïdiques n'auront jamais, dans quelque position que ce soit, qu'un seul point commun, qui sera celui en lequel les courbes ξ et $\xi_{,}$ ont leur contact angulaire.

Les deux roues dentées étant supposées mises en place, il arrivera, en vertu de la forme géométrique que nous avons donnée aux dents, que la roue qui a pour axe P restant fixe dans sa position, celle qui a pour axe Q, pourra prendre un mouvement de rotation autour de la droite R comme charnière, l'axe Q décrivant un hyperboloïde à une nappe et de révolution autour de R, et que par conséquent les deux roues pourront donner des systèmes différents, dans lesquels les axes P et Q comprendront des angles variables; et comme la ligne R dans chaque système sera la ligne des contacts et que les distances de ses points aux axes P et Q n'auront point changé, il s'ensuivra que le rapport des vitesses sera toujours le même, et que le frottement sera de même nature, c'est-à-dire, de *roulement angulaire*.

Cependant l'axe Q ne pourra pas prendre une infinité de positions par rapport à l'axe P et à la droite R restés invariables, ces positions auront des limites déterminées par la considération suivante, savoir : que l'axe Q dans son mouvement de rotation autour de R, entraîne la courbe $\xi_{,,}$, et que lorsque cette courbe rencontrera la surface hélicoïde Σ qui a pour directrice la courbe ξ, l'axe Q ne pourra dépasser la position qu'il affectera alors. Que de même lorsque la courbe ξ touchera la surface hélicoïde Σ' ayant $\xi_{,}$ pour directrice, l'axe Q ne pourra plus continuer à se mouvoir autour de la droite R ; mais entre ces deux positions extrêmes l'axe Q pourra prendre toutes les positions intermédiaires. On voit aussi que pour ces diverses positions intermédiaires de l'axe Q, la droite R ne passe plus par un

point de la plus courte distance des deux axes. Cette considération du mouvement de l'axe Q autour de la droite R, qui lui permet de prendre une infinité de positions sans que les propriétés du système résultant soient changées, excepté l'angle des deux axes, nous démontre que la surface qui doit jouir de la propriété d'avoir ses points distants des deux axes dans un rapport constant, est nécessairement engendrée par une ligne droite. J'ai dit ci-dessus que l'on savait par l'analyse que cette surface était un hyperboloïde à une nappe et non de révolution.

Dans le système que nous venons de construire, la droite R, en tant qu'appartenant à la surface HQ, ne pourra se placer sur aucune des génératrices du paraboloïde hyperbolique engendré par des droites perpendiculaires à l'axe P et s'appuyant sur l'axe P et sur la droite R, la droite R étant une génératrice de cette surface paraboloïde et supposée appartenir aussi à la surface PH ; parce que comme les dents doivent être équidistantes, les génératrices perpendiculaires à l'axe P couperont bien toutes les génératrices du deuxième système du paraboloïde en parties égales entre elles, mais non égales à celles qui existent sur la droite directrice R. Ainsi l'engrenage ne pourra se mettre en contact que par des points situés sur la droite idéale R dont tous les points sont distants des axes P et Q dans le rapport inverse des vitesses de ces axes, le frottement dès lors sera de roulement *angulaire*, car on ne pourra mettre les roues dentées en présence de manière à avoir un frottement de glissement *angulaire ;* la pose sera donc facile (*).

N° 5.

NOTE SUR LES ENGRENAGES DE WHITE (**).

La démonstration relative aux engrenages de White, que M. Delaunay a publié dans le Journal des mathématiques de M. Liouville, n'est pas nouvelle. Cette démonstration est la première qui se soit présentée à mon esprit

---

(*) La construction géométrique exposée dans ce mémoire a été trouvée en 1817, à l'École d'application de Metz alors que j'étais élève sous-lieutenant d'artillerie ; à cette époque j'avais à faire, comme travail d'étude, un projet de machines ; je donnai alors les dessins d'une machine propre à tailler les dents de l'engrenage précédent. On peut lire à ce sujet une note de Hachette, imprimée dans la deuxième édition de son *Traité des machines*, à la fin du chapitre *sur les engrenages*.

(**) Cette note, accompagnée des pièces justificatives, a été communiquée à la Société philomatique, dans sa séance du 21 mars 1840, et elle a été publiée dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, tome V (1840). T. O.

lorsque j'ai commencé à m'occuper de la théorie des engrenages. Je l'ai communiquée à plusieurs personnes, et en particulier à M. Arago, lorsqu'il était chargé du Cours de machines à l'École polytechnique. Enfin je m'en suis constamment servi dans mes leçons à l'École centrale des arts et manufactures, depuis 1829. On ne peut en effet imaginer rien de plus simple quand il s'agit seulement de faire voir que les engrenages de White ont, en effet, les propriétés que leur attribuait ce mécanicien. C'est à cause de cette simplicité même que je tiens à mon droit de priorité. Ce droit, je l'établirai d'une manière incontestable par l'extrait suivant d'un mémoire que j'ai composé en 1817, à l'École d'application de Metz, et qui a été visé (ainsi que le sont les travaux des élèves sous-lieutenants) par les officiers placés alors à la tête de l'École.

Extrait du mémoire sur le projet de machine (École de Metz).

« La première idée qui conduit à l'engrenage de White est celle-ci.

» Considérons l'engrenage composé d'une crémaillère et d'un pignon.

» Supposons la crémaillère composée de *m* bandes dentées réunies ensemble et de manière à ne former qu'une seule bande dentée; considérons le pignon comme composé aussi de *m* rondelles dentées; donnons à chaque rondelle du pignon un mouvement proportionnel de rotation autour de l'axe et à chaque bande de la crémaillère un mouvement de translation correspondant à celui de la rondelle qui est chargée de la conduire.

» On voit qu'après ce mouvement, les extrémités des dents formeront une série d'hélices sur le cylindre du pignon et des lignes droites parallèles entre elles et obliques sur la crémaillère, et ce système se conduira parfaitement.

» Mais de cette idée on est conduit à cette conséquence, que vu le grand nombre de ces bandes dentées et des rondelles dentées (ou pignons) correspondantes, on peut diminuer la longueur des dents dans chaque système, et la diminuer d'autant plus, que le nombre des bandes sera plus grand; et en effet, la longueur de la dent n'est nécessaire que pour que, vu l'écartement des dents, lorsqu'une dent quitte, une nouvelle puisse prendre, et elle doit se mettre en prise un peu avant, et cela, pour qu'il n'y ait pas d'interruption dans le mouvement de rotation, ni de perte de temps; mais l'on voit que si la première dent de la première bande quitte, et que la deuxième dent de cette même bande ne puisse encore se mettre en prise, la première dent de la deuxième bande n'aura pas encore quitté, et ainsi de suite. De sorte que de proche en proche, on voit que pendant tout le temps du mouvement, on aura des bandes qui, alternativement, conduiront et ne serviront pas à conduire le pignon, *et vice versâ*.

» On sait que la quantité de glissement qui s'opère sur une dent d'une première roue par la dent correspondante de la deuxième roue, peut être rendue aussi petite que l'on veut, en rognant la longueur des dents; par conséquent, plus on augmentera le nombre des bandes, plus on arrivera à avoir un engrenage parfait, un engrenage dans lequel le frottement ira toujours en diminuant.

» Enfin, la surface sur laquelle s'opère le frottement est réduite à un point, au premier point de contact des deux dents en prise, lorsque l'on suppose les bandes en nombre infini.

» Les dents ont donc changé de forme; auparavant, la courbe qui les terminait était contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe du mouvement de rotation; maintenant cette courbe se réduit à la ligne formée par le premier point de chaque dent de ce nombre infini de bandes, en sorte que la forme de la dent a disparu, elle n'est plus nécessaire, puisque son premier point seul suffit pour obtenir la ligne de contact qui seule forme actuellement la dent, et cette ligne est tracée sur la surface extérieure du noyau à denter au moyen de la machine. Pour une crémaillère, cette ligne est une droite; pour une roue elle est une hélice tracée sur le cylindre noyau de la roue ou pignon.

» De plus, on voit que chaque point de la ligne de contact de la première surface a son homologue sur la ligne de contact correspondante de la seconde surface, et que ces points homologues se touchent, pour se quitter immédiatement en tendant à glisser l'un sur l'autre.

» Le frottement est donc ici l'effet d'un roulement des lignes de contact les unes sur les autres, ce qui donne le frottement le plus doux que l'on connaisse dans les arts, celui dit *de deuxième espèce*.

» De cette discussion nous conclurons : que la forme primitive des dents ne doit plus être prise en considération, puisque le premier point de contact de chaque dent est seul nécessaire, le seul considéré et employé;

» Que le mouvement est uniforme, puisque l'on est parti d'un mouvement uniforme qui dépendait alors de la figure de la dent, et qui ne dépend plus maintenant que de ce que les lignes de contact qui forment l'arête extrême des dents, se roulent sans se glisser. Et l'on voit évidemment que cet engrenage, par l'usage continuel, *le travail*, tendra nécessairement à se perfectionner.

» La figure des dents du nouvel engrenage est arbitraire; elle ne dépend plus que de la ténacité de la matière employée, etc..... »

Metz, 19 août 1817.

Si dans les deux mémoires présentés à l'Institut en 1825, je n'ai pas consigné cette démonstration, c'est qu'elle n'est pas assez générale.

J'avais besoin d'un autre mode de démonstration pour bien faire voir que l'on pourrait, d'après les procédés mécaniques de White, construire trois espèces d'engrenages : le premier ayant un frottement de roulement angulaire direct, le second ayant un frottement de roulement, et le troisième ayant un frottement de glissement angulaire. White n'avait pas aperçu les frottements angulaires; je crois être le premier qui ait signalé ce genre de frottement.

La méthode que j'ai employée dans les mémoires présentés à l'Institut, avait non-seulement l'avantage d'être vraiment géométrique et rigoureuse, mais encore celui de bien faire voir, sans aucun doute, que pour les engrenages cylindriques et coniques, le frottement de *roulement direct* existait lorsque la ligne ξ, lieu des contacts successifs de deux dents, était une droite située dans le plan des axes, et que le frottement de *roulement angulaire* existait lorsque cette droite ξ n'était pas située dans le plan des axes; dans l'un et l'autre de ces deux cas, les distances de chacun des points de la droite ξ aux deux axes, étant toujours dans un rapport constant et inverse de celui des vitesses de ces deux axes.

Cette même méthode me permettait aussi de faire voir que le frottement de *glissement angulaire*, non-seulement existait toujours dans les engrenages cylindriques et coniques à la White, lorsque les distances des points de la droite ξ aux deux axes n'étaient pas dans le rapport inverse des vitesses des axes, mais qu'il fallait impérieusement, dans ce cas, que la droite ξ fût hors des plans des axes, pour que l'engrenage fût possible.

D'ailleurs, c'est par la considération des surfaces idéales et de révolution engendrées par la ligne ξ, lieu des contacts successifs de deux dents en prise, que j'ai pu établir le théorème qui, à mon avis, constitue toute la théorie géométrique des engrenages à la White, de ceux dans lesquels les surfaces des dents ne se mettent successivement en contact que par un seul point. Voici ce théorème :

Étant donnés : 1° deux axes A et A′ animés, le premier d'une vitesse v et le second d'une vitesse v'; 2° deux surfaces ζ et ζ' fixées, la première à l'axe A, la seconde à l'axe A′.

Si ces deux surfaces en tournant respectivement autour de l'axe auquel chacune se trouve liée, se mettent successivement en contact par un seul point m, m', m'',... lesquels points forment dans l'espace une courbe ξ dite *lieu des contacts successifs des surfaces de deux dents homologues ou en prise*;

En faisant tourner la courbe ξ autour des axes, on obtiendra deux surfaces de révolution, l'une Φ, fixée à l'axe A; l'autre Φ', fixée à l'axe A′.

Les deux surfaces Φ et ζ se couperont suivant une courbe δ, les deux surfaces Φ' et ζ' se couperont suivant une courbe δ'; et l'on pourra remplacer les surfaces ζ et ζ' par les courbes δ et δ', en ce sens que si l'on regarde ces deux courbes

comme rigides, elles se conduiront l'une par l'autre, ainsi que le faisaient les deux surfaces ζ et ζ'; et le frottement qui se manifestera pour les courbes δ et δ', sera de même nature que celui qui se développerait sur les deux surfaces ζ et ζ'.

Cela posé :

1° Si les distances aux deux axes de tout point m de la courbe ξ sont dans le rapport inverse de celui des vitesses v et v', le rapport de ces vitesses étant supposé être constant, être le même à chaque instant du mouvement, le frottement sera de *roulement;*

2° Si le rapport des distances aux axes n'est pas constant ou n'est pas inverse du rapport constant des vitesses, le frottement sera de *glissement;*

3° Chaque point m de la courbe ξ engendre un cercle en tournant, soit autour de l'axe A, soit autour de l'axe A'; désignant par C et C' les cercles engendrés par le point m, et respectivement autour des axes A et A', il pourra arriver que C et C' soient tangents l'un à l'autre au point m, ou qu'ils se croisent en ce point m. Lorsque les deux cercles sont tangents, le frottement est *direct;* lorsque les deux cercles se croisent, le frottement est *angulaire;* car dans le premier cas, les courbes δ et δ' ont même tangente au point m; dans le second cas, ces courbes se croisent en ce point m;

4° Si les deux cercles C et C' sont tangents, alors le point m et les deux axes sont dans un même plan, dans ce cas les deux axes et la courbe ξ seront dans un même plan; dès lors les deux surfaces Φ et Φ' seront tangentes l'une à l'autre, suivant la courbe ξ. Dans ce cas, on retombe sur les engrenages cylindriques et coniques, et la courbe ξ doit impérieusement être une droite, si l'on veut que le frottement de roulement existe, et dès lors le frottement est de *roulement direct.* On ne peut pas construire un engrenage à la White dans lequel le frottement soit de *glissement direct ;*

5° Si les deux cercles C et C' se croisent, alors les axes peuvent être dans un même plan ou non; le point m est hors du plan des axes dans le premier cas; les deux surfaces Φ et Φ', dans tous les cas, se couperont suivant la courbe ξ.

Le frottement sera donc, dans tous les cas, un frottement *angulaire*, car les courbe δ et δ' se croiseront au point m, et l'on pourra construire deux espèces d'engrenage : dans l'un le frottement sera de *roulement angulaire*, dans l'autre le frottement sera de *glissement angulaire ;* et pour l'un et l'autre, les vitesses des axes seront dans un rapport constant.

Je crois devoir consigner ici une idée que j'ai eue depuis plusieurs années, et que j'ai communiquée à plusieurs personnes.

Il s'agit d'une espèce toute particulière d'engrenages à la White, et auxquels je

donnai le nom d'*engrenages à tire-bouchon*, n'ayant pas trouvé d'expression qui fût mieux en rapport avec la forme de ces sortes d'engrenages.

En se rappelant ce qui a été dit précédemment et ce que j'ai développé dans le § 2 de mon premier mémoire sur les engrenages de White, publié ci-avant sous le n° 3, on voit que l'idée géométrique est de considérer les courbes δ et δ' intersections des surfaces ζ et ζ' de deux dents en présence, par les surfaces de révolution Φ et Φ' engendrées par la révolution de la ligne ξ des points successifs de contact des deux dents autour (et respectivement) des axes A et A' des roues dentées, comme deux lignes rigides, et que l'on peut remplacer les surfaces ζ et ζ' par ces courbes δ et δ'.

Cette idée géométrique me paraît devoir être facile à réaliser en pratique, et cela en prenant des tiges cylindriques que l'on plierait suivant la forme des courbes δ et δ', et dès lors les surfaces ζ et ζ' ne seraient autres que les surfaces de ces tiges ainsi pliées.

Je développe mon idée.

Prenons l'engrenage cylindrique pour lequel les surfaces idéales et de révolution Φ et Φ' engendrées autour des axes seront deux cylindres se coupant suivant deux droites parallèles aux axes, dont l'une sera considérée comme étant la ligne ξ, lieu des contacts des dents. Les courbes δ et δ' seront deux hélices tracées, la première sur le cylindre Φ, la seconde sur le cylindre Φ', et ces deux courbes couperont chacune les génératrices du cylindre sur lequel elle se trouve tracée sous le même angle α.

On sait qu'alors les deux courbes δ et δ' se conduiront uniformément et avec un frottement de roulement angulaire.

Concevons que le premier axe A soit une tige fixée par son extrémité à une rondelle circulaire V, et que cette rondelle V soit divisée en un nombre de parties égales, et que de chaque division s'élance une tige δ cylindrique tout d'abord, mais pliée ensuite sous la forme d'une hélice cylindrique et coupant les génératrices du cylindre sous l'angle α. De sorte que cette tige hélicoïdale soit fixée à la rondelle V par une de ses extrémités, l'autre extrémité étant libre comme dans un tire-bouchon.

Imaginons la même chose pour le deuxième axe; mais lorsque l'on mettra l'engrenage en présence, il sera placé *tête-bêche*, c'est-à-dire que les extrémités libres des tiges hélicoïdales δ seront tournées vers la rondelle V' sur laquelle seront fixées les tiges hélicoïdales δ'; et réciproquement, les extrémités libres des tiges hélicoïdales δ' seront tournées vers la rondelle V sur laquelle seront fixées les tiges hélicoïdales δ.

Si l'on considère deux dents ou tiges hélicoïdales δ et δ' devant s'engrener ou se

conduire, on peut facilement concevoir qu'elles s'agrafent l'une l'autre à la façon de deux anneaux d'une chaîne, de sorte que la tige δ tourne autour de la tige δ', son extrémité libre venant embrasser cette tige δ' près de la rondelle V', pour qu'ensuite, après un certain angle de révolution des axes, l'extrémité libre de δ' se dégage de la tige δ et près de la rondelle V.

On voit tout de suite que les tiges hélicoïdales, formées ainsi que nous l'indiquons, ne donneront point les surfaces géométriques rigoureuses qui se mettraient pendant le mouvement de rotation des axes en contact par des points qui se trouveraient rigoureusement situés sur la droite géométrique ξ.

On aura donc tout d'abord un frottement de glissement angulaire, et de plus les vitesses des axes ne seront pas dans un rapport constant.

Mais le frottement de glissement sera très-petit et les variations dans l'uniformité du mouvement des axes seront aussi très-petites, de sorte que par un travail soutenu pendant quelque temps, les tiges δ et δ' s'useront réciproquement, et l'on arrivera à avoir un engrenage géométrique.

Ce que je viens de dire pour l'engrenage cylindrique s'applique évidemment à l'engrenage conique où les axes se coupent, et à l'engrenage hyperboloïdique où les axes ne sont pas situés dans un même plan.

Ici je dois faire une remarque qui n'est pas sans importance.

Lorsque dans un engrenage le frottement de glissement, qu'il soit direct ou angulaire, a lieu, les dents s'usent l'une par l'autre, se déforment et tendent à prendre la forme qui permettra au frottement de roulement direct ou angulaire, d'exister. Dans les engrenages ordinaires le profil des dents qui donne le frottement de roulement, n'est autre que les cercles primitifs; de sorte que par le travail l'engrenage se détruit sans cesse.

Dans les engrenages à la White, le profil des dents est arbitraire. Il suffit que le point de contact de deux dents se meuve sur la ligne ξ; dès lors l'engrenage par le travail détruit sur les surfaces ζ et ζ' des dents, tout ce qu'il est nécessaire de détruire pour arriver à la ligne ξ.

Cette destruction opérée, l'engrenage n'en subsiste pas moins, en ce sens que les dents existent toujours, quoique leur forme primitive soit altérée par le travail, mais perfectionnée et amenée par ce même travail à la forme géométrique voulue.

On conçoit dès lors que pour ces sortes d'engrenages, il faut que l'exécution primitive laisse peu à faire au travail des dents, s'usant l'une par l'autre, afin que l'engrenage puisse être promptement livré en bon état et satisfaisant à la condition du frottement de roulement.

N° 6.

DE LA FORME QUE DOIT AVOIR LA COURBE GÉNÉRATRICE DE LA SURFACE HÉLICOÏDE QUI TERMINE LA DENT D'UN ENGRENAGE A LA WHITE (*).

§ I.

Nous avons dit dans le mémoire n° 3, ci-dessus, que lorsque l'on avait deux cylindres de révolution tangents l'un à l'autre suivant une génératrice droite M, si l'on traçait sur le premier cylindre une hélice S et sur le deuxième cylindre une hélice S'' en contact par un point *m* situé sur la droite M, nous avons démontré, dis-je, que ces deux hélices S et S' roulaient l'une sur l'autre si elles avaient même inclinaison sur la génératrice M.

Nous avons ensuite ajouté que si l'on menait un plan P par les deux axes des cylindres, et si dans ce plan P et par le point *m* on menait une droite arbitraire, et, ce qui est *mieux* dans la pratique, si l'on menait une droite D perpendiculaire à la génératrice M, et puis que par cette droite D on mena un plan Q (*fig.* 1) perpendiculaire au plan P et dès lors perpendiculaire aux axes des deux cylindres, en traçant dans ce plan Q deux courbes δ et δ' tangentes entre elles au point *m* et ayant en ce point *m* pour tangente commune la droite D, en faisant tourner le plan P d'abord autour de l'axe du premier cylindre, ce plan P entraînant avec lui la courbe δ et le point *m* parcourant l'hélice S, et ensuite autour de l'axe du deuxième cylindre, ce plan P entraînant avec lui la courbe δ' et le point *m* parcourant l'hélice *s*, la courbe δ engendrait une surface hélicoïde Δ, et la courbe δ' engendrait une surface hélicoïde Δ', telles que ces deux surfaces étaient en contact au point *m* et en tous les points *m'*, *m''*, etc., de la droite M, à mesure qu'en vertu du mouvement de rotation les hélices S et S' venaient se mettre en contact, et successivement par ces mêmes points *m'*, *m''*, etc.

Mais ce qui précède ne suffit pas pour que l'engrenage à la White puisse librement fonctionner, car il faut que les deux dents en contact ou en *prise* puissent facilement se dégager l'une de l'autre, le mouvement de rotation venant à se prolonger; et de plus il faut impérieusement que pendant que ces deux dents sont en *prise*, elles ne s'opposent point, par certaines de leurs parties, au mouvement de rotation.

Dès lors les courbes δ et δ' ne peuvent pas être arbitraires.

(*) Communiqué à la Société philomatique de Paris, dans sa séance du 22 mai 1846. Th. O.

§ II.

Si l'on coupe les deux roues de l'engrenage par un plan Q perpendiculaire aux axes, l'on obtiendra pour section dans le premier cylindre le cercle C′ (*fig.* 2), et dans le deuxième cylindre le cercle C; ces deux cercles seront tangents l'un à l'autre en le point *m*. Ce même plan Q coupera la surface hélicoïde qui forme la dent de la seconde roue suivant la courbe δ.

Cela posé : si le deuxième cylindre (C) tourne autour de son axe d'un angle α, le premier cylindre (C′) tournera autour de son axe d'un angle β, et les arcs mn' du cercle C et mn_1 du cercle C′ étant rectifiés seront égaux en longueur.

La courbe δ aura dès lors pris la position δ_1 lorsque la roue (C) aura tourné autour de son axe de la quantité angulaire α.

Or il est évident, pour que les dents des deux roues puissent s'échapper ou ne pas se gêner pendant ce mouvement de rotation, qu'il faut que la courbe δ_1 soit en arrière du point n_1, position que le point *m* est venu prendre sur le cercle C′.

Dès lors il est encore évident que si la courbe δ est telle qu'en tournant autour de l'axe (*o*) de la seconde roue elle puisse conduire uniformément le point *m* supposé tourner autour de l'axe (*o*′) de la première roue, la courbe δ aura la forme *limite*, c'est-à-dire que l'on devra prendre pour la courbe δ une courbe intérieure à cette courbe *limite*.

Mais la forme de cette courbe limite nous est connue, nous savons qu'elle n'est autre que l'épicycloïde plane engendrée par le point *m* du cercle C′ roulant sur le cercle C supposé fixe.

Dès lors pour déterminer les courbes δ et δ' qui doivent être les sections faites à travers deux dents, en *prise*, par le plan Q, ces courbes δ et δ' étant telles qu'elles ne se gêneront pas pendant le mouvement de rotation de l'engrenage, il faudra employer la construction suivante.

§ III.

Les deux cylindres verticaux (*fig.* 3) sur lesquels sont tracées les hélices S et S′ également inclinées à l'horizon, seront coupés par le plan horizontal Q suivant les cercles C et C′.

Si l'on fait rouler le cercle C sur le cercle C′, le point *m* engendrera l'épicycloïde E′; si l'on fait rouler le cercle C′ sur le cercle C, le point *m* engendrera l'épicycloïde E.

Si l'épicycloïde E se meut autour de l'axe du cylindre (C), son point de

rebroussement m parcourant l'hélice S, on aura une surface hélicoïde-épicycloïdale Φ; si l'épicycloïde E' se meut autour de l'axe du cylindre (C'), son point de rebroussement m parcourant l'hélice S', on aura une seconde surface hélicoïde-épicycloïdale Φ'; ces deux surfaces hélicoïdes-épicycloïdales Φ et Φ' seront en contact par le point m. Mais si l'on suppose que le mouvement de rotation est indiqué par les flèches F et F', les deux surfaces Φ et Φ' seront en outre en contact suivant l'hélice S', en sorte que le frottement sera de *roulement* entre les surfaces Φ et Φ', au point en lequel l'hélice S' est coupée par le plan des axes (o) et (o'); mais il sera de *glissement* en tous les autres points de l'hélice S'.

L'engrenage ainsi composé sera donc l'*analogue* de celui que l'on connaît sous le nom de *cames* et *pilons*, où la dent cylindrique a pour section droite une développante de cercle, et dans lequel la dent frotte continuellement sur une même arête droite du *mentonnet du pilon*.

Il faudra donc pour que les deux surfaces Φ et Φ' ne soient pas en contact suivant l'hélice S', que les courbes E et E' soient changées, et il faudra dès lors prendre une courbe δ intérieure à la courbe E et une courbe δ' intérieure à la courbe E'; alors les surfaces hélicoïdes Φ_1 et Φ_1' engendrées respectivement par la courbe δ se mouvant sur l'hélice S, et par la courbe δ' se mouvant sur l'hélice S', ne seront jamais en contact que par le point des contacts sucessifs des hélices S et S', point de contact qui sera toujours dans le plan des axes (o) et (o') et situé sur la droite M génératrice de contact des deux cylindres (C) et (C').

§ IV.

Mais les cylindres (C) et (C') doivent être évidés l'un et l'autre pour donner respectivement passage aux dents en contact (δ) et (δ'), fig. 3.

Dès lors la dent (δ) doit être reliée au cylindre noyau (B) par une surface, et la plus simple sera un paraboloïde ψ engendré par le rayon $\overline{om}$, se mouvant horizontalement sur l'axe (o) et sur l'hélice S; de même la dent (δ') sera reliée au cylindre noyau (B') par un paraboloïde ψ' engendré par le rayon $\overline{o'm}$, se mouvant horizontalement sur l'axe (o') et sur l'hélice S'.

Or les dents terminées, l'une par la surface hélicoïde (δ) et le paraboloïde ψ, l'autre par la surface hélicoïde (δ') et le paraboloïde ψ', se mettront successivement en contact par le point m se mouvant sur la droite M, si dans le plan horizontal Q la droite om ou om' ne rencontre pas en d'autres points que le point m la courbe δ' ou δ et cela pendant le mouvement de rotation.

Or : l'on sait que l'épicycloïde E_1 décrite par le point m du cercle C_1' (construt

sur le rayon $\overline{om}$ du cercle C' pris pour diamètre) roulant sur le cercle C, conduit le rayon $\overline{om}$ et que de même l'épicycloïde E_1' décrite par le même point m du cercle C_1 (construit sur le rayon $\overline{om}$ du cercle C pris pour diamètre) roulant sur le cercle C_1', conduit le rayon $\overline{am}$.

Il faudra donc impérieusement que la courbe δ soit intérieure à l'épicycloïde E_1, et que la courbe δ' soit intérieure à l'épicycloïde E_1', pour que les dents de l'engrenage ne se mettent deux à deux en contact que par un seul point cheminant sur la droite M, et cela pendant le mouvement de rotation.

Tout ce que nous venons de dire aura lieu, que l'engrenage se trouve intérieur ou extérieur; la fig. 3 représente l'engrenage extérieur, il sera facile de faire l'*épure* dans le cas de l'engrenage intérieur (*).

§ V.

Ce qui précède nous révèle certaines propriétés géométriques dont jouissent les surfaces hélicoïdes-épicycloïdales.

Si l'on engendre une surface Φ au moyen d'une épicycloïde E dont le point de rebroussement parcourt une hélice S décrite sur un cylindre Σ de révolution ayant pour section droite un cercle C du rayon R, cette surface sera un hélicoïde, car il est évident que chacun des points de la courbe génératrice E décrira une hélice située sur un cylindre de révolution concentrique au cylindre Σ.

Et si l'on trace sur le plan du cercle C le cercle C' du rayon R', ce cercle C' étant le cercle générateur de l'épicycloïde E, le cylindre Σ' ayant ce cercle C' pour section droite coupera la surface Φ, en vertu de ce qui a été dit ci-devant, suivant une hélice S' ayant même inclinaison que l'hélice S.

La surface hélicoïde-épicycloïdale Φ sera donc coupée suivant des hélices et par des cylindres de révolution de deux manières distinctes :

1° Par des cylindres Σ_1, Σ_2, Σ_3,... de rayons différents et concentriques au cylindre Σ, et les hélices auront des inclinaisons différentes ;

2° Par des cylindres de même rayon Σ', Σ_1', Σ_2'... tous tangents au cylindre Σ', et les hélices auront toutes même inclinaison que l'hélice S directrice du mouvement hélicoïdal du point de rebroussement de l'épicycloïde génératrice E.

(*) Il y a déjà plusieurs années que j'ai communiqué ces considérations géométriques à mes élèves, soit à l'École centrale des arts et manufactures, soit au Conservatoire royal des arts et métiers. T. O.

§ VI.

La propriété énoncée ci-dessus, § V, aura lieu, que l'épicycloïde E soit extérieure ou intérieure au cercle C.

Si donc le cercle C′ a son rayon R′ égal à la moitié du rayon R, l'épicycloïde E ne sera autre que le rayon R du cercle C. Dès lors la surface hélicoïde-épicycloïdale Φ deviendra la surface du *filet de vis carrée*.

La surface du *filet de vis carrée* jouit donc des mêmes propriétés que la surface hélicoïde-épicycloïdale, et elle en jouit non parce qu'elle appartient à la *famille* des surfaces hélicoïdes-rectilignes, mais parce qu'elle appartient à la *famille* des surfaces hélicoïdes-épicycloïdales (*), et ainsi parce qu'elle est une particularité entre les surfaces hélicoïdes-épicycloïdales *intérieures*.

Mais lorsque la surface hélicoïde-épicycloïdale est *extérieure*, le rayon R′ du cercle C′ peut devenir infini; dans ce cas, la surface Φ devient une surface développable, car elle devient une surface hélicoïde développable, puisque l'épicycloïde E devient une développante du cercle C; et en effet, ne sait-on pas que, quel que soit le *pas* de l'hélice S tracée sur le cylindre de révolution (C), le plan Q de section droite de ce cylindre coupera la surface développable formée par les diverses tangentes à cette hélice S suivant une développante du cercle C? Et dans ce cas, les cylindres Σ', Σ_1', Σ_2',... (§ V) ne sont autres que les plans tangents au cylindre (C), et les hélices de section ne sont autres que les tangentes de l'hélice S.

Ainsi, la surface hélicoïde développable appartient à la *famille* des surfaces hélicoïdes-épicycloïdales dites *extérieures*. Elle en est une particularité.

§ VII.

Lorsque l'on considère un cercle C du rayon R et un cercle C′ du rayon $R' = \frac{1}{2}R$ et qui lui est tangent en un point *m*, l'on sait que le cercle C′, roulant intérieurement sur le cercle C, le point *m* décrit le rayon R (*fig.* 4).

Si l'on construit donc une série de cercles C_1, C_2, C_3,... concentriques au cercle C et ayant respectivement pour rayon R_1, R_2, R_3,... et si l'on construit les cercles C_1', C_2', C_3',... ayant respectivement pour rayon $R_1' = \frac{1}{2}R_1$, $R_2' = \frac{1}{2}R_2$, $R_3' = \frac{1}{2}R_3$,... les cercles C_1 et C_1', C_2 et C_2', C_3 et C_3',... étant tangents l'un à

(*) Voyez dans les *Développements de géométrie descriptive*, chap. Ier, p. 52, une démonstration directe de l'existence de ces propriétés pour la surface du filet de vis carrée.

l'autre et respectivement aux points m_1, m_2, m_3, ... en lesquels le rayon R prolongé est coupé par les cercles concentriques C_1, C_2, C_3,... l'on voit de suite que les cercles C_1', C_2', C_3',... roulant respectivement dans le même sens et intérieurement sur les cercles C_1, C_2, C_3,... les points m_1, m_2, m_3,... engendreront tous la même épicycloïde intérieure qui ne sera autre que le rayon R supposé prolongé indéfiniment.

En sorte que l'on peut, en vertu de ce que l'épicycloïde intérieure et rectiligne R a une infinité de cercles générateurs, énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME.

Étant donnée une surface de filet de vis carrée, si on la coupe par un cylindre de révolution Σ *d'un rayon arbitraire* ρ, *et ayant pour axe l'axe* A *de la vis, on aura pour section une hélice* S *et si l'on coupe la même surface par un cylindre de révolution passant par l'axe* A *et tangent au cylindre* Σ *on obtiendra pour section une hélice* S', *et les deux hélices* S *et* S' *auront même inclinaison par rapport à l'axe* A.

§ VIII.

Tout ce qui précède étant compris, cherchons si un cylindre ne pourrait pas toucher la surface hélicoïde-épicycloïdale suivant une hélice.

Concevons deux cylindres de révolution ayant pour sections droites les cercles C et C' (*fig.* 5) tangents au point *m*.

Traçons sur le cylindre (C) une hélice S partant du point *m* et faisant avec l'axe (*o*) de ce cylindre un angle α.

Traçons sur le cylindre (C') une hélice S' partant aussi du même point *m* et faisant avec l'axe (*o'*) de ce cylindre le même angle α.

Les deux hélices rampant l'une de droite à gauche et l'autre de gauche à droite, de manière à ce qu'elles roulent l'une sur l'autre pendant le mouvement de rotation uniforme des cylindres (C) et (C') autour de leurs axes (*o*) et (*o'*).

Cela posé :

Traçons dans le plan horizontal l'épicycloïde engendrée par le point *m* du cercle C' supposé rouler sur le cercle C et faisons mouvoir horizontalement cette courbe épicycloïdale de manière à ce que son point de rebroussement parcoure l'hélice S, nous engendrerons une surface hélicoïde-épicycloïdale E, qui sera coupée par le cylindre (C') suivant l'hélice S'.

Cela posé :

Coupons la surface E par une suite de plans horizontaux et équidistants entre eux, nous aurons les courbes épicycloïdales δ, δ', δ'',... coupant l'hélice S' et respectivement aux points x, x', x'',... et rencontrant l'hélice S et respectivement aux points n, n', n'',...

Les tangentes aux points x, x', x'',... des épicycloïdes de section seront désignées par t, t', t'',... et leurs projections sur le plan horizontal seront t^h, t'^h, t''^h,... droites passant toutes par le point i extrémité du diamètre $\overline{mi}$ du cercle C' qui est le cercle générateur de l'épicycloïde ayant le point m pour *origine* ou point de rebroussement.

Les tangentes aux points x, x', x'',... de l'hélice S', étant désignées par θ, θ', θ'',... leurs projections sur le plan horizontal seront θ^h, θ'^h, θ''^h,... tangentes aux points x^h, x'^h, x''^h,... au cercle C' qui doit être ici considéré comme la projection horizontale S'^h de l'hélice S'.

Cela posé :

Désignons par T, T', T'',... les plans tangents menés à la surface hélicoïde E et aux divers points x, x', x'',...

Il est évident que le plan	T	passera par les droites	t et θ
—	T'	—	t' et θ'
—	T''	—	t'' et θ''
—	etc.	—	etc.

Or : les plans T... seront les *enveloppées* d'une surface développable Δ tangente à l'hélicoïde E suivant l'hélice S'.

Mais pour que la surface développable Δ soit un cylindre, il faudra que les plans T... se coupent deux à deux suivant des droites parallèles entre elles. Et il est évident que ce résulat aura lieu, si l'on peut mener par une *certaine* droite de l'espace une suite de plans Θ, ... respectivement parallèles à la série des plans T. ...

Mais si nous nous rappelons que nous avons mené des plans de section équidistants entre eux, désignant par z, z', z'',... les hauteurs respectives des points x, x', x'',... au-dessus du plan horizontal, on aura $z' = 2.z$, $z'' = 3.z$,...

Si l'on abaisse tous les points x, x', x'',... de l'espace dans le plan horizontal, ils viendront se superposer respectivement sur leurs projections x^h, x'^h, x''^h,... et l'on aura supposé dès lors que l'hélice S' est transformée en le cercle C'.

Et les tangentes θ, θ', θ'',... descendront en des droites G, G', G'',... passant respectivement par les points x^h, x'^h, x''^h,... du cercle C'.

Et comme ces droites G, ... sont également inclinées sur le plan du cercle C', et se projettent horizontalement suivant des tangentes à ce cercle, elles seront les génératrices du premier système d'un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ ayant la droite (o') pour axe et le cercle C' pour cercle de gorge.

Par les mêmes raisons, les droites t, t', t'',... descendront sur le plan horizontal, et ainsi sur le plan du cercle C', pour se placer respectivement en les droites t^h, t'^h, t''^h,...

Cela posé, il est évident :

Que le plan	Θ	passant par les droites	G et t^h	sera parallèle au plan	T
—	Θ'	—	G' et t'^h	—	T'
—	Θ''	—	G'' et t''^h	—	T''
—	etc.	—	etc.	—	etc.

Or tous les plans Θ,... passent tous, et *évidemment*, par la droite B menée par le point *i* parallèlement à la droite A tangente en *m* à l'hélice S'; car la droite A est une génératrice du premier système (du système G...) de l'hyperboloïde Σ et la droite B sera évidemment une génératrice du second système de ce même hyperboloïde Σ.

Ainsi se trouve démontré d'une manière très-simple que tous les plans T, T', T'',... se coupent deux à deux suivant des droites parallèles entre elles, ou en d'autres termes : ainsi se trouve démontré que la surface développable Δ est un cylindre dont les génératrices droites sont parallèles à la droite A, laquelle est une tangente commune en *m* aux deux hélices S et S'.

§ IX.

De ce qui précède, on déduit le théorème suivant :

THÉORÈME.

Étant donnée une surface hélicoïde-épicycloïdale extérieure ou intérieure E *(engendrée par une épicycloïde δ qui, ayant pour cercle générateur un cercle* C' *du rayon* R', *tourne autour d'un axe vertical* (o) *passant par le centre d'un cercle* C, *son point de rebroussement* m *parcourant une hélice* S *inclinée de l'angle* α *sur l'axe* (o) *et tracée sur un cylindre ayant le cercle* C *pour section droite), si on la suppose éclairée par un rayon de lumière* L *faisant avec l'axe* (o) *un angle* α, *la ligne de séparation d'ombre et de lumière sera une hélice* S' *inclinée de l'angle* α *sur l'axe* (o) *et tracée sur un cylindre ayant pour section droite un cercle du rayon* R' *et tangent au cylindre* (C), *suivant le*

génératrice droite passant par le point en lequel le cercle C est coupé par son rayon perpendiculaire à la projection L^h *(sur le plan du cercle* C) *du rayon de lumière* L.

§ X.

Le théorème précédent doit être vrai, quelle que soit la surface hélicoïde-épicycloïdale E, ainsi : 1° lorsque cette surface E étant *extérieure* le cercle C′ sera une droite tangente au cercle C, auquel cas le rayon R′ est supposé infini ; ainsi, 2° lorsque cette surface E étant *intérieure*, le cercle C′ aura son rayon R′ égal à la moitié du rayon R du cercle C.

Dans le *premier cas* la surface E devient un hélicoïde *développable*, et dans le *deuxième cas* la surface E devient un hélicoïde *gauche*, qui n'est autre que la surface du filet de vis carrée.

Dans le premier cas, la surface hélicoïde développable ne peut offrir une ligne de séparation d'ombre et de lumière qu'autant que le rayon de lumière fait avec l'axe (*o*) un angle égal à l'inclinaison de l'hélice S (arête de rebroussement de la surface), sur ce même axe (*o*); et lorsque les deux angles sont égaux, la ligne de séparation d'ombre et de lumière est la génératrice droite de la surface développable qui se trouve parallèle au rayon de lumière (*).

Dans le deuxième cas, quelle que soit l'inclinaison du rayon de lumière par rapport à l'axe (*o*), la ligne de séparation d'ombre et de lumière existera toujours sur la surface du filet de vis carrée; elle sera toujours une hélice, parce que cette surface peut être recoupée suivant une hélice par tout cylindre passant par l'axe (*o*), et quelle que soit la grandeur du rayon de ce cylindre (**).

§ XI.

Tout ce que nous avons dit précédemment est vrai, quelle que soit la nature de la courbe S, ainsi lorsque cette courbe S est une courbe arbitraire φ et non une hélice, mais étant toujours tracée sur un cylindre de révolution.

Concevons deux cercles C et C′, l'un du rayon R et l'autre du rayon R′, et tracés tous deux sur le plan horizontal et tangents l'un à l'autre en un point *m*; désignons par (C) le cylindre de révolution et vertical ayant le cercle C pour section droite et étant dit : *cylindre du rayon* R; désignons par ∂ l'épicycloïde engendrée par le point *m* du cercle C′, ce cercle C′ roulant intérieurement ou extérieurement sur le cercle C; désignons par (C′) le cylindre de révolution et

(*) Voyez ci-avant ce que nous avons dit au premier livre (*des ombres*) dans le mémoire n° 8, p. 113.
(**) Voyez ci-avant ce que nous avons dit au premier livre (*des ombres*) dans le mémoire n° 4, p. 27.

vertical ayant le cercle C′ pour section droite et étant dit : *cylindre du rayon* R′.

Cela posé :

Traçons sur le cylindre (C) une courbe φ arbitraire et passant par le point *m* origine ou rebroussement de l'épicycloïde δ.

Faisons mouvoir horizontalement la courbe δ, son origine *m* parcourant la courbe φ, nous engendrerons une surface Σ qui sera dite : *surface épicycloïdale générale et cylindrique* (*épicycloïde* parce qu'elle est engendrée par une épicycloïde, *générale* parce que la courbe φ, ligne de rebroussement de cette surface, est arbitraire, *cylindrique* parce que la courbe φ est tracée sur un cylindre)

Cela dit :

Coupons la surface Σ par le cylindre (C′), nous aurons une courbe φ′, et il est évident, en vertu de ce qui a été dit précédemment et en vertu du mode de génération de la surface Σ que la courbe φ′ sera telle, que si l'on fait rouler le cylindre (C′) sur le cylindre (C) supposé fixe, elle roulera sur la courbe φ, les courbes φ et φ′, ayant en chaque point de contact même tangente; en sorte que leurs arcs compris entre deux plans horizontaux auront même longueur.

Cela posé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si l'on coupe la surface épicycloïdale-générale et cylindrique Σ *par une suite de cylindres du rayon* R′ (R′ *étant le rayon de l'épicycloïde génératrice*) *tous tangents au cylindre du rayon* R *sur lequel se trouve tracée la ligne de rebroussement* φ *de la surface, l'on obtiendra une suite de courbes* φ', φ_1', φ_2'... *qui pourront toutes rouler sur la courbe* φ.

On peut engendrer la surface Σ d'une autre manière :

Concevons le cylindre (C) et une suite de cylindres (C′), (C_1'), (C_2')... du même rayon R′ et tangents au cylindre (C); traçons sur le cylindre (C) une courbe arbitraire φ, faisons rouler le cylindre (C) sur le cylindre (C′), la courbe φ laissera pour empreinte sur ce cylindre (C′) une courbe φ′; faisons rouler successivement le cylindre (C) sur chacun des cylindre (C_1'), (C_2')... (ces cylindres étant supposés fixes), nous aurons les courbes φ_1', φ_2',... et toutes les courbes φ, φ′, φ_1', φ_2',... détermineront une surface qui ne sera autre que la surface Σ, et qui jouira dès lors de la propriété, savoir : qu'une suite de plans horizontaux la couperont suivant des épicycloïdes toutes du rayon R′ et ayant chacune leur origine, ou leur point de rebroussement, situé sur la courbe φ.

§ XII.

Toutes les remarques faites au sujet de l'engrenage cylindrique de White, peuvent être faites au sujet de l'engrenage conique.

Et en effet :

On sait que si l'on a deux cercles C et C' situés dans des plans différents et tangents l'un à l'autre en un point m, on peut toujours faire passer une sphère Δ par ces deux cercles, cette sphère ayant pour centre le point d en lequel se coupent les droites menées par les centres o et o' des cercles C et C', et qui seront respectivement perpendiculaires aux plans de ces cercles.

On sait encore que, si l'on fait rouler le cercle C' sur le cercle C, de manière à ce que l'angle des plans du cercle fixe C et du cercle mobile C' reste constant, le point m décrira une épicycloïde sphérique δ située sur la sphère Δ.

On sait encore que si l'on regarde le point d comme le sommet commun à deux cônes de révolution O et O' ayant respectivement pour base ou section droite les cercles C et C', pendant que le cône O tournera autour de son axe, la courbe δ conduira le cône O' en le faisant tourner autour de son axe, et cela en pressant sur le point m et le forçant à cheminer circulairement sur le cercle C'; de telle sorte que si l'on considère le cône épicycloïdal (d, δ) il conduira la droite (d, m).

On sait encore que si l'on construit des sphères concentriques Δ', Δ'', Δ''',... ayant toutes le point d pour centre commun, elles couperont 1° le cône épicycloïdal (d, δ) suivant des épicycloïdes δ', δ'', δ''',... 2° la droite (d, m) en des points m', m'', m''',... 3° le cône (d, C) suivant des cercles C_1, C_2, C_3,... 4° le cône (d, C') suivant des cercles C_1', C_2', C_3',... et l'on sait, dis-je, que les cercles C_1', C_2', C_3',... roulant respectivement sur les cercles C_1, C_2, C_3,... leurs points respectifs m', m'', m''',... engendreront les épicycloïdes δ', δ'', δ''',...

Cela posé :

Si l'on trace sur le cône (d, C) une courbe arbitraire φ passant par le point m, et si l'on suppose que cette courbe coupe les cercles C, C_1, C_2, C_3,... en les points m, n', n'', n''',... en faisant tourner la courbe δ' jusqu'à ce que son point m' vienne en n', elle prendra une position δ_1', la courbe δ'' jusqu'à ce que son point m' vienne en n''..., elle prendra une position δ_1'', et ainsi de suite, les diverses épicycloïdes δ, δ_1', δ_1'', δ_1''',... formeront une surface dite *surface épicycloïdale-générale et conique* Σ, et cette surface Σ sera coupée par le cône (d, C') suivant une courbe φ' qui sera telle, que si l'on suppose le cône (d, C) fixe et le cône (d, C') roulant sur le cône (d, C), cette courbe φ' roulera directement sur la courbe φ, en sorte que ces deux courbes φ et φ' auront même tangente en chacun de leurs contacts successifs.

Et si l'on coupe la surface Σ par une suite de cônes (d, C'_1), (d, C'_2) (d, C'_3),... de révolution et ayant même angle au sommet que le cône (d, C'), ayant tous

pour sommet commun le point d, étant tous tangents au cône (d, C), on obtiendra une suite de courbes φ'_1, φ'_2, φ'_3,... qui pourront toutes rouler sur la courbe φ.

La courbe φ pourra être une spirale conique d'Archimède; alors les courbes φ, φ'_1, φ'_2, φ'_3,... seront des courbes coniques d'Archimède, toutes superposables entre elles.

L'épicycloïde δ peut être une droite; dans ce cas les deux cercles C et C' sont forcément situés dans un même plan, et le cercle C' est intérieur au cercle C, son rayon R' étant égal à la moitié du rayon R du cercle C; alors l'épicycloïde δ est une droite perpendiculaire à l'axe (d, o); le centre o' du cercle C' décrira un cercle B ayant le point o pour centre et ayant son rayon égal à $\frac{1}{2}R' = \frac{1}{4}R$.

Sur l'axe (d, o) nous pourrons prendre un point arbitraire d et regarder ce point comme le sommet commun à deux cônes, l'un de *révolution* et ayant le cercle C pour base, et l'autre *oblique* et ayant le cercle C' pour base.

Coupons le système de ces deux cônes par une suite de plans parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe (d, o), nous obtiendrons dans le cône (d, C) une suite de cercles C_1, C_2, C_3,... et dans le cercle (d, C') une suite de cercles C'_1, C'_2, C'_3,...; les cercles C'_1, C'_2, C'_3,... en roulant respectivement sur les cercles C_1, C_2, C_3,... engendreront des épicycloïdes qui ne seront autres que les rayons R_1, R_2, R_3,... des cercles C_1, C_2, C_3, supposés fixes.

Le plan de tous ces rayons coupera le cône (d, C') suivant une droite M qui sera la génératrice de contact des deux cônes (d, C) et (d, C').

Cela posé :

Traçons sur le cône (d, C) une courbe φ et supposons qu'une droite G se meuve perpendiculairement sur l'axe (d, o), et en s'appuyant sur la courbe φ, nous engendrerons une surface Σ qui paraît être à première vue, par son mode de génération (si la courbe φ est une spirale conique), l'analogue, dans le *système conique*, de la surface qui dans le *système cylindrique* est dite : surface du *filet de vis carrée*.

Examinons si cette surface Σ jouit en effet de propriétés géométriques analogues à celles dont jouit la surface du filet de vis carrée.

Concevons le cône (d, C'), il coupera la surface Σ suivant une courbe φ' ; si la surface Σ jouit de propriétés géométriques analogues à la surface du filet de vis carrée, il faudra que les courbes φ et φ' roulent l'une sur l'autre pendant que les cônes *droit* (d, C) et *oblique* (d, C') rouleront l'un sur l'autre.

Or : il est de toute évidence que ce résultat ne pourrait exister qu'autant que les cercles C et C' rouleraient l'un sur l'autre pendant le mouvement de rotation des cônes (d, C) et (d, C'), et il est évident que dans un semblable système, le *roulement* des cercles C et C' ne peut avoir lieu, donc, etc.

Ainsi la surface précédente Σ n'est pas dans le système *conique* l'analogue de la surface dite : *filet de vis carrée*, qui existe dans le système *cylindrique*.

La surface du système *conique* que nous cherchons sera donnée par une suite d'épicycloïdes sphériques intérieures engendrées ainsi qu'il suit :

Concevons une série de sphères S, S', S'',... ayant toutes pour centre commun un point *d*.

Menons par ce centre une droite A et une suite de plans parallèles entre eux et perpendiculaires à cet axe A ; ces plans couperont les sphères suivant des cercles C, C_1, C_2,... l'axe A percera les sphères en les points a, a', a'';... menons par le point a un plan tangent au cercle C, il coupera la sphère S suivant un cercle C'; menons par le point a' un plan tangent au cercle C_1, il coupera la sphère S' suivant un cercle C_1' et ainsi de suite.

Si nous supposons que tous les points de contact m, m', m'',... des cercles C et C', C_1 et C_1', C_2 et C_2',... sont sur un même plan passant par l'axe A et que les cercles C, C_1, C_2,... sont tous situés sur une même surface conique droite ayant la droite A pour axe commun, alors les plans des cercles C', C_1', C_2',... seront parallèles entre eux et feront tous le même angle avec la droite A ; de plus ces cercles C', C_1', C_2',... seront tous sur un même cône droit ayant le point *d* pour sommet. Les épicycloïdes sphériques et intérieures engendrées par les divers points m, m', m'',... des cercles C', C_1', C_2',... roulant respectivement sur les cercles C, C_1, C_2, supposés fixes, seront toutes sur un même cône ayant le point *d* pour sommet.

Si l'on ne considère qu'une seule de ces épicycloïdes, celle engendrée (par exemple) par le cercle C' roulant sur le cercle C, on pourra tracer sur le cône droit (d, C) une courbe arbitraire φ passant par le point m, et l'on pourra engendrer une surface Σ_1 épicycloïdale générale et conique, comme nous l'avons fait précédemment, et cette surface jouira évidemment de la propriété d'être coupée par tout cône droit passant par l'axe A et tangent au cône (d, C) suivant une courbe qui sera apte à rouler sur la courbe φ. Si au lieu de supposer que les points m, m', m'',... sont avec l'axe A dans un même plan, on suppose qu'ils se trouvent distribués sur la courbe φ, alors les épicycloïdes sphériques et intérieures engendrées par les cercles C', C_1', C_2',... (qui ne seront plus sur une même surface conique de révolution) roulant respectivement sur les cercles C, C_1, C_2, seront précisément les génératrices épicycloïdales de la surface Σ_1, elles seront toutes situées sur cette surface Σ_1.

C'est cette surface épicycloïdale-conique, toute particulière, qui est dans le système *conique* l'analogue de la surface du filet de vis carrée qui existe dans le système *cylindrique*.

§ XIII.

Maintenant, en vertu de ce que nous avons dit sur les épicycloïdes sphériques, nous pouvons déterminer, pour les engrenages coniques de White, la forme de la courbe qui doit engendrer la surface d'une dent, cette forme devant permettre aux dents *en prise* de se dégager facilement l'une de l'autre au moment où elles cessent de se conduire.

Nous opérerons comme dans le cas de l'engrenage cylindrique; ainsi ayant les deux cercles primitifs C et C′ tracés sur une sphère S ayant le point *d* pour centre; ces deux cercles étant en contact par un point *m*, nous tracerons dans le plan du cercle C′ qui a son rayon égal à R′ et sur R′ comme diamètre un cercle C_1'. Le point *m* du cercle C_1' roulant sur le cercle C engendrera une épicycloïde δ qui sera la limite de la forme de la courbe qui doit engendrer la surface de la dent fixée sur le cône (C).

Nous opérerons de même pour la surface de la dent fixée sur le cône (C′), nous prendrons pour limite l'épicycloïde sphérique décrite par le point *m* du cercle C_1 tracé dans le plan du cercle C et sur son rayon R pris pour diamètre.

Ensuite nous terminerons la dent fixée à la roue conique (C) par une surface gauche engendrée par une droite, s'appuyant sur l'axe (*d*, *o*) de cette roue (C), et sur la courbe φ (spirale conique ou toute autre courbe) tracée sur la surface de ce même cône (C).

Nous en ferons autant pour la dent fixée à la roue (C′).

Et nous serons assurés que les dents ne pourront se mettre en contact que par un seul point, pendant tout le temps de leur mouvement de rotation, et que ce point décrira la génératrice de contact des deux cônes (*d*, C) et (*d*, C′).

N° 7.

CONSTRUCTION DE DEUX NOUVEAUX ENGRENAGES A FROTTEMENT DE ROULEMENT ET A VITESSE PÉRIODIQUEMENT VARIÉE (*).

PREMIÈRE PARTIE.

Transformation d'une courbe polaire : 1° en une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires, ou 2° en une autre courbe polaire.

Nous allons examiner d'abord, entre tous les modes de transformation que l'on peut imaginer pour passer d'une courbe polaire à une courbe à coordonnées rectangulaires, les deux modes particuliers suivants, parce que nous en déduirons des applications qui peuvent être utiles.

§ I.

Premier mode de transformation.

1. Soit (*fig. a*) une courbe δ ayant le point o pour pôle et la droite X pour origine des angles ω, de telle sorte que désignant par ω l'angle $\widehat{a'oa}$ ou l'angle que le rayon vecteur $\overline{o'a}$ (que je représente par ρ) fait avec la droite X, l'équation de cette courbe δ soit :

$$f(\rho,\omega)=o \qquad (1)$$

Si du point o comme centre et avec $\overrightarrow{oa'}$ pour rayon je décris un cercle, il viendra couper la droite X en un point a_1 ; et si de ce point a_1 j'élève une droite a_1b' perpendiculaire à la droite X, et que je porte de a_1 en b' une longueur égale à l'arc de cercle $a'a_1$ rectifié, j'aurai un point b' qui appartiendra à une courbe δ' qui sera la transformée de la courbe δ.

L'équation de la courbe δ' s'obtiendra facilement, car on voit de suite qu'il suffit, pour l'obtenir, de remplacer dans l'équation (1) ρ par x et ω par $\frac{y}{x}$, en sorte que l'équation de la courbe δ' sera : $f\left(x, \frac{y}{x}\right)=o$, et cette courbe δ' sera rapportée

(*) Les principes géométriques et une partie des résultats exposés dans ce mémoire sont extraits du mémoire que j'ai rédigé en 1847 et qui accompagnait le projet de machine (cette machine avait pour but de tracer des hélices ou *spirales* cylindriques, coniques, clepsydres et hyperboloïdiques) que j'ai été chargé de faire, comme travail d'étude, alors que j'etais élève sous-lieutenant d'artillerie à l'École d'application de Metz. — *Voyez* le commencement du mémoire n° 5. T. O.

à la droite X comme axe des x et à la droite Y menée perpendiculairement à la droite X par le pôle o; cette droite Y sera l'axe des y et le pôle o sera l'origine des coordonnées rectangulaires.

2. Au lieu de prendre l'ordonnée a_1b' égale à l'arc rectifié a_1a', on aurait pu la prendre égale à m fois cet arc, dans ce cas l'équation de la courbe δ' aurait été :

$$f\left(x, \frac{m.y}{x}\right) = 0.$$

3. La transformée δ' ayant pour équation $f\left(x, \frac{y}{x}\right) = o$ jouit d'une propriété remarquable par rapport à la courbe polaire δ.

Si l'on considère le point a, en lequel la courbe polaire δ coupe la droite X, on voit de suite que la transformée δ' passe nécessairement par ce point; mais, en outre, en ce point les deux courbes δ et δ' ont même tangente, et en effet :

La tangente θ au point a de la courbe polaire δ (*fig. a*) a un élément rectiligne et infiniment petit $\overline{am}$ en commun avec la courbe δ.

Or, si (*fig. b*) on a une droite θ coupant une droite X en un point a, et si l'on prend sur cette droite θ un point m infiniment voisin du point a, et que d'un point o situé sur la droite X, et considéré comme centre, on décrive l'arc mm_1, l'angle $\widehat{moa}$ étant infiniment petit, l'arc mm_1 du cercle C sera aussi infiniment petit et se confondra avec sa tangente T menée au point m_1; en sorte que, si sur cette tangente T on porte de m_1 en n l'arc rectifié mm_1, on aura un point n qui se confondra avec le point m; car l'arc mm_1 doit rigoureusement être considéré comme un élément rectiligne perpendiculaire en m_1 à la droite X, et dès lors le point m est nécessairement situé sur la tangente T, puisque la tangente T au point m_1 du cercle C (sur lequel se trouve compté l'élément mm_1) a nécessairement un élément rectiligne commun avec ce cercle C.

4. Lorsque la courbe δ' a pour équation $f\left(x, \frac{m.y}{x}\right) = 0$, la même propriété subsiste; car si nous désignons par δ' la courbe dont l'équation est $f\left(x, \frac{y}{x}\right) = 0$ et par δ_1 la courbe dont l'équation est $f\left(x, \frac{m.y}{x}\right) = 0$, nous savons que ces deux courbes sont tangentes l'une à l'autre au point a, en lequel elles coupent l'une et l'autre la droite X (ou, en d'autres termes, l'axe des x) (*).

(*) Voyez les *Développements de géométrie descriptive*, chap. II, p. 84. D'ailleurs ce résultat est évident par l'*analyse*, puisque l'arc mm_1 est un infiniment petit du premier ordre dont l'expression est $\rho.d\omega$, et qu'en le multipliant par une quantité finie m, on aura : $m.\rho.d\omega$, qui sera toujours un infiniment petit du premier ordre.

Ainsi : la courbe polaire δ dont l'équation est : $f(\rho, \omega)=0$ coupant la droite X en un point a, la transformée δ' ayant pour équation $f\left(x, \frac{y}{x}\right)=0$, et toutes les transformées δ_1 ayant pour équation générale : $f\left(x, \frac{m.y}{x}\right)=0$ couperont aussi la droite X au même point a, et les courbes δ, δ' et δ_1 seront tangentes entre elles en ce même point a.

§ II.

Deuxième mode de transformation.

5. Soit donnée une courbe plane δ (*fig. c*) ayant le point a pour *pôle* et la droite X pour origine des angles ω, l'équation de cette courbe δ étant : $f(\rho, \omega)=0$.

Du point o comme centre et avec un rayon égal à l'unité décrivons le cercle C coupant la droite X au point p.

Cela fait : considérons un point quelconque a' sur la courbe polaire δ donnée, et décrivons du point a comme centre et avec le rayon vecteur $\rho=\overline{oa'}$ un cercle qui coupera la droite X en un point a_1 ; élevons en ce point a_1 et perpendiculairement à la droite X une droite a_1b', et portons sur cette droite et à partir du point a_1 une longueur $\overline{a_1b'}$ égale à l'arc rectifié pq' compté sur le cercle C (entre la droite X et le rayon vecteur oa') ; en faisant la même construction pour les divers points a, a', a''.... de la courbe polaire et donnée δ, on obtiendra une suite de points a, b', b''.... qui détermineront une courbe δ_1 qui sera la *transformée* en coordonnées rectangulaires de la courbe *polaire* (donnée) δ, et il est évident que l'équation de la courbe δ_1 sera : $f(x, y)=0$. Car il est évident que dans l'équation $f(\rho, \omega)=0$ de la courbe δ, il suffira de remplacer ρ par x et ω par y, pour avoir l'équation de la courbe δ_1', puisque la courbe C a pour rayon l'unité et que ses arcs mesurent les angles $\widehat{a'oa}$, $\widehat{a''oa}$,.... que les rayons vecteurs de la courbe *polaire* δ font avec la droite X origine des angles ω.

6. Au lieu de prendre $\overline{a_1b'}$ égal à l'arc rectifié pq' du cercle C, on aurait pu prendre $\overline{a_1b'}$ égal à m fois l'arc rectifié pq', et dans ce cas les divers points b', b''.... auraient déterminé une courbe δ_1' dont l'équation serait : $f(x, m.y)=0$.

7. Nous devons faire remarquer que la courbe δ_1 ou δ_1' est tangente à la courbe δ au point a en lequel l'une et l'autre de ces courbes coupe la droite X (origine des angles ω), car nous pouvons ici, comme précédemment (§ I, articles 3 et 4), appliquer le même mode de démonstration.

8. Quel que soit le mode de transformation employé pour passer d'une courbe δ à une courbe δ', lorsque ces deux courbes δ et δ' ont un point commun a, ces deux courbes ne peuvent affecter en ce point a que deux manières d'être l'une par rapport à l'autre, et ainsi :

Ou 1° elles se couperont en ce point a;

Ou 2° elles seront tangentes l'une à l'autre en ce point a.

Or : soit par les considérations de l'*analyse infinitésimale*, soit par les considérations géométriques des infiniment petits que j'ai exposés dans le septième chapitre des *Développements de Géométrie descriptive*, il est évident que, si les deux coordonnées (lignes droites ou lignes courbes) qui passent par le point a, l'une appartenant à la courbe δ' et l'autre à la courbe δ, se coupent en ce point a, les deux courbes δ et δ' se couperont en ce même point a; et que si les deux coordonnées sont tangentes en ce point a, les courbes δ et δ' seront aussi tangentes l'une à l'autre en ce même point a.

9. Ainsi, étant donnée une courbe polaire δ (*fig.* d) ayant le point o pour *pôle* et la droite X pour origine des angles ω, l'équation de la courbe δ étant : $f(\rho, \omega)=0$; nous pourrons prendre sur la droite X un point o', et de ce point comme centre et avec les rayons $o'p_1$, $o'p_2$, $o'p_3$,.... décrire des cercles sur lesquels on portera des arcs p_1b', p_2b'', p_3b''',.... 1° égaux ou 2° proportionnels aux arcs p_1a', p_2a'', p_3a''',.... les divers points b', b'', o'''.... formeront une courbe δ' qui sera tangente à la courbe δ au point a.

10. Ainsi, étant donnée une courbe polaire δ (*fig.* e), nous pourrons prendre un point o_1 hors de la droite X comme *pôle* de la transformée δ', et alors les deux courbes δ' et δ se couperont au point a; car les deux ordonnées courbes et circulaires, l'une appartenant à la courbe δ et l'autre à la courbe δ', se couperont en ce point a, puisque ce point a ne sera pas en ligne droite avec le centre o des arcs circulaires *coordonnées* de la courbe δ et le centre o_1 des arcs circulaires *coordonnées* de la courbe δ'.

Et les deux courbes δ et δ' se croiseront au point a sous un angle égal à celui sous lequel se coupent les deux arcs qui sont les *coordonnées* correspondantes à ce point a.

§ III.

11. Ce que nous venons de dire touchant la transformation d'une courbe polaire en deux courbes distinctes en *coordonnées* rectangulaires, suivant que nous emploierons le *premier* et le *second* mode de transformation exposé ci-dessus, peut aussi se dire de la transformation d'une courbe à coordonnées rectangulaires

en une courbe polaire. On doit donc remarquer qu'à la question résolue précédemment correspond une question réciproque.

Dans les applications suivantes, nous ferons usage tantôt de la transformation d'une courbe polaire en une courbe à coordonnées rectangulaires, tantôt et réciproquement de la transformation d'une courbe à coordonnées rectangulaires en une courbe polaire.

§ IV.

Propriété remarquable dont peut jouir certaine transformée en coordonnées rectangulaires (et obtenue par le premier mode de transformation) par rapport à sa courbe polaire.

12. Supposons une courbe polaire δ (*fig.* f) ayant pour équation $f(\rho, \omega) = 0$, le point o étant l'origine des rayons vecteurs ρ ou le *pôle* de la courbe, et la droite X étant l'origine des angles ω. Supposons que la courbe δ coupe l'axe X au point a, et que nous construisions pour le rayon vecteur $\rho = \overline{ao}$ (l'angle ω étant alors nul) la transformée en coordonnées rectangulaires Δ, dont l'équation sera : $f\left(x, \frac{y}{x}\right) = 0$; la droite X étant l'axe des x et la droite Y étant l'axe des y, le *pôle* a étant l'origine des coordonnées rectangulaires de cette courbe Δ, les deux courbes δ et Δ seront tangentes l'une à l'autre au point a.

Cela posé :

13. Prenons un point a' quelconque sur la courbe polaire δ, son rayon vecteur sera $\overline{oa'}$; prolongeons ce rayon vecteur et désignons-le par X'. Transformons la courbe δ à partir de la droite X' comme nous avons transformé cette même courbe à partir de X, nous obtiendrons une courbe Δ' tangente en le point a', à la courbe δ.

14. Si du point o comme centre et avec un rayon égal à l'unité, nous décrivons le cercle C, nous pourrons représenter l'arc pq' de ce cercle C par m', et dès lors l'équation de la transformée Δ' sera en coordonnées rectangulaires (les axes étant X' pour les abscisses x', et Y' pour les ordonnées y', et le *pôle* o étant l'origine des coordonnées) $f\left[x', \left(\frac{y'}{x'} + m'\right)\right] = 0$, l'équation de la courbe δ étant, par rapport à la droite X', prise pour origine des angles ω', $f[\rho, (\omega' + m')] = 0$.

Cela posé :

15. Si l'on fait tourner la courbe δ et la courbe Δ' autour du *pôle* o comme centre de rotation (et dans le sens indiqué par la flèche F) pour amener le point

a' en a_1' sur la droite X, alors l'axe X' se superposera sur l'axe X, et l'axe Y' se superposera sur l'axe Y; la courbe δ prendra la position δ_1', et la transformée Δ' prendra la position Δ_1'.

Dès lors l'équation de la courbe Δ_1' sera $f\left[x, \left(\frac{y}{x} + m'\right)\right] = 0$.

Cette courbe Δ_1' sera rapportée, ainsi que la courbe Δ, au même centre o et aux mêmes axes rectangulaires X et Y.

Cela posé :

16. La courbe Δ_1' identique et superposable à la courbe Δ' sera-t-elle identique et superposable à la courbe Δ?

Pour que les deux courbes Δ et Δ_1' soient identiques et superposables, il faut évidemment transporter l'origine des coordonnées o (*fig.* g) en un point o' (ayant pour coordonnées α et β), et changer les axes rectangulaires X et Y en de nouveaux axes rectangulaires X_1 et Y_1, les deux axes X et X_1 comprenant entre eux un angle φ.

Ce double changement s'opérera en substituant dans l'équation $f\left[x, \left(\frac{x}{y} + m'\right)\right] = 0$ de la courbe Δ_1' à la place de x, $(x = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi + \alpha)$, et à la place de y, $(y = x_1 \sin\varphi - y_1 \cos\varphi + \beta)$.

Et dès lors l'équation :

$$f\left\{(x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi + \alpha), \left[\frac{(x_1 \sin\varphi - y_1 \cos\varphi + \beta)}{(x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi + \alpha)} + m'_1\right]\right\} = 0$$

sera l'équation de la courbe Δ_1' rapportée au point o' comme origine des coordonnées rectangulaires dont les axes seront les droites X_1 et Y_1.

Cela fait :

17. On fera tourner la courbe Δ_1' autour du point o' comme centre de rotation et dans le sens indiqué par la flèche F' pour amener l'axe X_1 à être en X_2 parallèle à l'axe X, et l'axe Y_1 en Y_2 parallèle à l'axe Y, la courbe Δ_1' prendra dès lors la position Δ_2'.

Or, si les deux courbes Δ et Δ' sont identiques et superposables, les deux courbes Δ et Δ_2' seront aussi identiques et superposables, par conséquent il suffira de faire glisser la courbe Δ_2' parallèlement à la droite oo' jusqu'à ce que le point o' se confonde avec le point o pour que ces deux courbes Δ_2' et Δ se superposent.

18. Toutes les opérations géométriques et mécaniques que nous venons d'indiquer se traduisent en *analyse* d'une manière facile, car il suffit de dire que les deux équations

$$(2)\quad f\left(x, \frac{y}{x}\right) = 0 \quad \text{et} \quad (3).\quad f\left[(x\cos\varphi + y\sin\varphi + \alpha), \left(\frac{x\sin\varphi - y\cos\varphi + \beta}{x\cos\varphi + y\sin\varphi + \alpha} + m'\right)\right] = 0$$

seront identiques terme à terme.

Si donc l'on identifie terme à terme les deux équations (2) et (3), on aura un certain nombre d'équations de condition, qui serviront à déterminer les indéterminées φ, α et β.

Si la solution de ces équations conduit à des valeurs réelles pour φ, α et β, alors la courbe *polaire* δ aura toutes ses transformées Δ, Δ', Δ''... identiques et superposables.

19. On voit de suite que de même que parmi les courbes planes, le cercle est la seule courbe dont toutes les développantes sont identiques et superposables, de même il doit arriver qu'il n'y ait qu'un nombre limité de courbes polaires pour lesquelles toutes les transformées en coordonnées rectangulaires (et obtenues par le premier mode de transformation) seront identiques, seront superposables.

20. Si par hasard il existe une ou plusieurs courbes polaires δ jouissant de la propriété d'avoir toutes leurs transformées Δ identiques, superposables, il existera entre la courbe polaire δ et la transformée Δ une propriété remarquable et que nous allons étudier.

21. Si nous avons une courbe polaire δ coupant l'axe X (origine des angles ω) en un point a et ayant un point o pour *pôle* et pour équation $f(\rho, \omega) = 0$; et si nous avons construit pour le point a la transformée Δ, qui aura dès lors pour équation $f\left(x, \frac{y}{x}\right) = 0$. Et si la courbe δ est telle que pour un quelconque de ses points a' sa transformée Δ' soit identique et superposable à la courbe Δ, alors, en faisant tourner la courbe δ autour de son *pôle* o comme centre de rotation, elle imprimera à la courbe Δ un mouvement pendant lequel ces deux courbes δ et Δ rouleront l'une sur l'autre.

Et en effet :

22. Imaginons la courbe polaire δ, la droite X origine des angles ω (*fig.* g), le *pôle* o, et concevons la transformée Δ par le point a en lequel la courbe δ coupe la droite X. Nous savons que les deux courbes Δ et δ sont tangentes l'une à l'autre en ce point a.

Cela posé :

~~Concevons les points a, a', a''.... successifs et infiniment~~ voisins de la courbe δ. La courbe Δ aura en commun avec la courbe δ les deux points successifs a et a', ou, en d'autres termes, l'élément rectiligne $\overline{aa'}$, puisque ces deux courbes δ et Δ

sont tangentes l'une à l'autre au point a. Par conséquent les points successifs et infiniment voisins de la courbe Δ seront a, a', b'', b'''....

Lorsque j'imprimerai à la courbe ∂ un mouvement de rotation autour du *pôle* o pour amener le point a' en a_1' sur la droite X, j'aurai amené la courbe Δ en la position Δ_1', et la courbe ∂ en la position ∂_1'; le point b'' de la courbe Δ sera venu en b_1'' sur Δ_1', et le point a'' de la courbe ∂ sera venu en a_1'' sur ∂_1'. Or, il est évident que sur la courbe Δ_1' les deux points a_1' et b_1'' seront des points successifs et infiniment voisins, et qu'ainsi les points a_1' et a_1'' seront sur la courbe ∂_1' des points successifs et infiniment voisins (*) ; et comme les deux courbes ∂_1' et Δ_1' sont tangentes au point a_1', il s'ensuit qu'elles ont en commun les deux points $''$ et b_1'', ou, en d'autres termes, que les deux éléments rectilignes $\overline{a_1'a_1''}$ de la courbe ∂_1' et $\overline{a_1'b_1''}$ de la courbe Δ_1' se superposent.

Et il en sera de même en continuant le mouvement de rotation de la courbe polaire ∂ autour de son *pôle* o, comme centre de rotation. Ainsi, chacun des côtés du polygone infinitésimal ($aa'a''a'''$....) qui remplace la courbe ∂ vient, pendant le mouvement de rotation, se superposer avec le côté qui lui est homologue et appartenant au polygone infinitésimal ($aa'b''b'''$....) qui remplace la courbe Δ.

23. On peut donc affirmer que les deux courbes ∂ et Δ roulent l'une sur l'autre pendant le mouvement de rotation.

24. Puisque les deux courbes ∂ et Δ roulent l'une sur l'autre, elles auront des arcs égaux, par lesquels elles se rouleront ; et ainsi, supposant la courbe ∂ et sa transformée Δ tangentes entre elles au point a, prenant un arc aa' sur ∂, on devra pouvoir construire sur la courbe Δ un arc ar égal en longueur à l'arc aa'.

Et en effet :

Si nous revenons à la fig. f, nous devons nous rappeler que, pour passer de la courbe Δ_1' à la courbe Δ_2', il a fallu construire la nouvelle origine o' et faire tourner la courbe Δ_1' autour du point o' d'un angle γ égal à celui que la droite X_1 des abscisses x_1 faisait avec la droite X origine des angles ω. Le point a_1' viendra donc en a_2' sur la courbe Δ_2', et ce point a_2' s'obtiendra en décrivant du point o' comme centre et avec $\overline{o'a_1'}$ pour rayon un cercle qui coupera la courbe Δ_2' au point a_2' demandé.

Cela fait :

On sait qu'en faisant mouvoir la courbe Δ_2' parallèlement à la droite oo', elle viendra se superposer sur la courbe Δ. Si donc on mène par le point a_2' une

(*) Voyez ce que j'ai dit au sujet des infiniment petits, chap. VII des *Développements de géométrie descriptive.*

droite parallèle à $\overline{oo'}$, elle viendra couper la courbe Δ en un point r, et l'arc ar de la courbe Δ étant rectifié sera égal en longueur à l'arc aa' de la courbe polaire δ, ce dernier arc étant aussi supposé rectifié.

25. Appliquons ce principe à quelques exemples.

1er *exemple.* Soit donnée une spirale d'Archimède δ ayant pour équation :

$$\rho = a\omega$$

Sa transformée Δ (en coordonnées rectangulaires et par le premier mode de transformation) aura pour équation :

$$x^2 = ay \qquad (1)$$

Ainsi la transformée Δ est une parabole, et le *pôle o* est situé sur cette courbe Δ (*fig.* h).

Si nous construisons la transformée Δ' pour un rayon vecteur ρ' faisant avec la droite X origine des angles ω un angle m', la courbe polaire δ aura pour équation : $\rho = a(\omega' + m')$, et la courbe transformée Δ' aura pour équation :

$$x' = \left(\frac{y'}{x'} + m'\right) \quad \text{ou} \quad x'^2 = ay' + m'x'$$

Ainsi, la courbe Δ' sera encore une parabole; et comme les équations des diverses transformées Δ, Δ', Δ''.... ne diffèrent entre elles que par la valeur attribuée à m', on en conclut que toutes les transformées de la spirale d'Archimède sont des paraboles.

Cela posé :

26. Voyons si toutes ces paraboles sont des courbes identiques ou non.

On voit de suite que si l'on fait tourner le rayon vecteur ρ' autour du *pôle o* pour amener ce rayon vecteur sur la droite X, la courbe Δ' viendra en Δ_1', et que la courbe Δ_1' aura pour équation :

$$x^2 = ay + m'x \qquad (5)$$

Il suffit donc de voir si les deux paraboles, ayant pour équation l'une l'équation (1), et l'autre l'équation (5), sont identiques, sont superposables.

Or, en regardant ces deux équations, on voit de suite que les deux paraboles ont même paramètre, et qu'ainsi elles sont deux courbes identiques.

27. Mais pour la suite de nos recherches, il est nécessaire d'appliquer tout ce que nous avons dit précédemment et ainsi de chercher le point o' et les axes X_1 et Y_1 de la courbe Δ_1'.

Or, il est évident que les axes rectangulaires auxquels se trouve en ce mo-

ment rapportée la parabole Δ_1' sont parallèles aux axes rectangulaires de la courbe Δ.

Il suffira donc de changer l'origine des coordonnées, en faisant $x = x_1 + \alpha$ et $y = y_1 + \beta$, et transportant ces valeurs dans l'équation (5).

On aura dès lors :

$$(x_1 + \alpha)^2 = a(y_1 + \beta) + m'(x_1 + \alpha)$$

ou

$$x_1^2 = ay_1 + x_1(m' - 2\alpha) + a\beta + m'\alpha - \alpha^2 \qquad (6)$$

Identifions terme à terme les deux équations (5) et (6), nous aurons deux équations de condition, savoir :

$$m' - 2\alpha = 0 \qquad (7)$$

et

$$a\beta + m'\alpha - \alpha^2 = 0 \qquad (8)$$

L'équation (7) donne :

$$\alpha = \frac{m'}{2} \qquad (9)$$

et par suite, l'équation (8) donne :

$$-\beta = \frac{\frac{m'^2}{2} - \frac{m'^2}{4}}{a} = +\frac{m'^2}{4.a} \qquad (10)$$

On obtient donc des valeurs réelles pour α et β coordonnées du point o'. Ayant construit ce point o', nous l'unirons avec le point o par une droite D, et en faisant glisser la parabole Δ_1' dans son plan et parallèlement à la droite D, cette parabole Δ_1' viendra se superposer avec la parabole Δ, lorsque les deux points o *fixe* et o' *mobile* se superposeront.

Dès lors, si nous voulons connaître l'arc ar de la parabole Δ qui roulera sur l'arc aa' de la spirale d'Archimède, il nous suffira de ramener le point a' de la spirale δ en a_1' sur l'axe X, en décrivant du *pôle* o comme centre et avec le rayon vecteur $\overline{oa'}$ pour rayon, un cercle; puis de supposer que la parabole Δ a glissé parallèlement à elle-même en rasant le point fixe o pour prendre la position Δ_1'; et ayant construit le sommet s de la parabole Δ et le sommet s_1' de la parabole Δ_1', nous prendrons une ouverture de compas égale à $\overline{so}$, et la portant de s_1' en o' sur la parabole Δ_1', nous aurons la nouvelle origine o' (de telle sorte que les droites $\overline{os}$ et $\overline{o's_1'}$ sont parallèles); ensuite nous unirons les points o et o' par une droite D, et nous mènerons par le point a_1' une droite D' qui, parallèle à D, coupera la parabole Δ en un point r, et nous pourrons affirmer que l'arc para-

bolique ar est égal en longueur à l'arc rectifié de la spirale d'Archimède (*).

28. On pourrait demander le lieu géométrique des divers sommets s, $s'_{,}$, $s''_{,}$.... des diverses paraboles Δ, $\Delta'_{,}$, $\Delta''_{,}$....

Ce problème est facile à résoudre ; et en effet :

Toutes les paraboles Δ, $\Delta'_{,}$, $\Delta''_{,}$.... qui passent par le point fixe o, et dont les axes infinis sont parallèles entre eux, peuvent être représentées par l'équation :

$$x^2 = ay + mx \qquad (11)$$

m étant une quantité qui varie de parabole à parabole.

Si nous faisons $y = 0$ dans l'équation (11), nous aurons $x = m$, et dès lors :

$$x = \frac{m}{2} \qquad (12)$$

sera l'abscisse du sommet s ; remplaçant x par sa valeur (12) dans l'équation (11), on aura : $\frac{m^2}{4} = ay + \frac{m^2}{2}$, d'où l'on tire pour l'ordonnée du même sommet s,

$$y = -\frac{m^2}{4 \cdot a} \qquad (13)$$

Éliminant m entre les équations (12) et (13), nous aurons l'équation du lieu géométrique des sommets s ; cette équation sera :

$$x^2 = -ay \qquad (14)$$

En sorte que le lieu des sommets s est une parabole ξ ayant son sommet au *pôle o* (*fig.* i) et ayant pour axe des y la droite Y parallèle à l'axe infini de chacune des paraboles Δ, $\Delta'_{,}$, $\Delta''_{,}$,.... et la parabole ξ se trouve identique à la parabole Δ (puisqu'elle a même paramètre), mais elle est tournée en sens opposé.

29. 2e *exemple*. Soit donnée une spirale hyperbolique δ ayant pour équation : $\rho \cdot \omega = a$.

Sa transformée Δ (en coordonnées rectangulaires et par le premier mode de transformation) aura pour équation :

$$y = a \qquad (15)$$

(*) Voyez, dans les *Développements de géométrie descriptive*, chap. II, p. 134 et suivantes, l'emploi que nous avons fait de la propriété de cette parabole pour construire la tangente à la spirale d'Archimède.

Roberval est le premier, à ce qu'il paraît, qui a trouvé la propriété de la rectification de la spirale d'Archimède au moyen de la *parabole* ; sa démonstration n'est point parvenue jusqu'à nous. *Blaise Pascal* a démontré cette propriété dans le mémoire qui a pour titre : *De l'égalité des lignes spirales et paraboliques*. La démonstration que je donne dans ce mémoire est tout à fait différente de celle de *Pascal* ; celle de ce savant est une démonstration *géométrique* au moyen des *incréments* et *décréments* ; celle que je donne est véritablement une démonstration *mécanique*. Voyez dans les *Développements de géométrie descriptive* la note placée au bas de la page 134 ; voyez aussi dans le *Cours de géométrie descriptive* la note placée au bas de la page 290.

Ainsi la transformée Δ sera une ligne droite.

Pour un rayon vecteur ρ', l'équation de la courbe δ sera : $\rho(\omega' + m') = a$, et l'équation de sa transformée Δ' sera : $y' + m'x' = a$.

La courbe Δ' sera donc encore une ligne droite, et dès lors on en conclut que toutes les transformées Δ, Δ', Δ''.... seront des lignes identiques et superposables, puisque chacune d'elles sera une ligne droite.

30. Si l'on fait tourner la droite Δ' autour du point o comme centre pour amener le point a en a_1', et la droite Δ' en la droite Δ_1', on aura pour équation :

$$y + m'x = a \qquad (16)$$

ce qui nous apprend que toutes les transformées, après leur mouvement de rotation autour du *pôle o*, forment une série de droites qui coupent toutes l'axe Y, mené par le point o perpendiculairement à l'axe X qui est l'origine des angles ω, lequel est en un même point dont la distance au *pôle o* est égal à : a (*fig.* k).

31. De ce que toutes les transformées de la spirale hyperbolique sont identiques et sont des droites, on en conclut que la spirale hyperbolique est une courbe rectifiable.

32. Cherchons maintenant la longueur rectifiée d'un arc aa' de spirale hyperbolique.

Pour cela, nous amènerons la transformée Δ_1' en la position Δ_1' en nous servant des formules :

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi + \alpha \\ y = x_1 \sin\varphi - y_1 \cos\varphi + 6 \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Substituant les valeurs de x et y, données par les équations (17) dans l'équation (16), nous aurons :

$$x_1 \sin\varphi - y_1 \cos\varphi + 6 + m'(x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi + \alpha) = a$$

ou

$$x_1 (\sin\varphi + m'\cos\varphi) + y_1 (m'\sin\varphi - \cos\varphi) = a - 6 - m'\alpha$$

ou

$$y_1 + \frac{\sin\varphi + m'\cos\varphi}{m'\sin\varphi - \cos\varphi} \cdot x_1 = \frac{a - 6 - m'\alpha}{m'\sin\varphi - \cos\varphi} \qquad (18)$$

Identifiant terme à terme les deux équations (18) et (15), on aura les équations de condition :

$$\sin\varphi + m'\cos\varphi = 0 \qquad (19)$$

et

$$a = \frac{a - 6 - m'\alpha}{m'\sin\varphi - \cos\varphi} \qquad (20)$$

l'équation (19) peut s'écrire ainsi :

$$\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}+\frac{m'}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=0;\quad \text{d'où l'on a :}\quad \tan\varphi=-m' \qquad (21)$$

l'équation (20) peut s'écrire ainsi :

$$a\left(\frac{m'\tan\varphi-1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}\right)=a-6-m'\alpha \qquad (22)$$

Remplaçant dans l'équation (22) $\tan\varphi$ par sa valeur donnée par l'équation (21), on aura :

$$-a\left(\frac{m'^2+1}{\sqrt{1+m'^2}}\right)=a-6-m'\alpha$$

ou

$$m'\alpha+6-a=a\sqrt{m'^2+1} \qquad (23)$$

Ce qui nous apprend que l'on peut placer la nouvelle origine des coordonnées partout où l'on voudra, pourvu que ses coordonnées α et 6 satisfassent à l'équation (23), et que l'on pourra toujours, l'équation (23) étant satisfaite, amener la droite Δ_1' à être parallèle à la droite Δ.

83. Mais, si l'on supposait, comme dans la fig. k, que la droite Δ ne soit pas parallèle à la droite X, et si dès lors la spirale hyperbolique δ avait pour équation $\rho(\omega+m)=a$, la droite Δ aurait pour équation :

$$y+mx=a \qquad (24)$$

et la droite Δ_1 aura toujours pour équation : $y+m'x=a$ (16).

Alors, en identifiant les deux équations (18) et (24), on aura les deux équations de condition :

$$m(m'\sin\varphi-\cos\varphi)=\sin\varphi+m'\cos\varphi \qquad (25)$$

$$a=\frac{a-6-m'\alpha}{m'\sin\varphi-\cos\varphi} \qquad (26)$$

l'équation (25) peut s'écrire sous la forme :

$$m(m'\tan\varphi-1)=\tan\varphi+m'$$

d'où l'on tire :

$$\tan\varphi(mm'-1)=m'+m$$

d'où

$$\tan\varphi=\frac{m'+m}{mm'-1} \qquad (27)$$

L'équation (26) peut s'écrire sous la forme :

$$a\sqrt{1+\tan^2\varphi}=\frac{a-6-m'\alpha}{m'\tan\varphi-1} \qquad (28)$$

Mettant dans l'équation (28) la valeur de tang φ donnée par l'équation (27), on aura :

$$a\sqrt{1+\frac{m'+m}{mm'-1}}=\frac{\alpha-6-m'\alpha}{m'\frac{(m'+m)}{mm'-1}-1} \qquad (29)$$

et nous retombons sur un résultat tout à fait semblable à celui que nous avions trouvé précédemment, savoir : que l'origine o' est indéterminée, en ce sens que ses coordonnées α et 6 doivent satisfaire à l'équation (29).

34. Le résultat auquel nous arrivons est conforme à ce qui doit être, et ne doit pas nous surprendre ; en effet, une fois qu'une droite $\Delta_{,}'$ est parallèle à une droite Δ, on peut la faire mouvoir parallèlement à elle-même pour la transporter sur la droite Δ, d'une infinité de manières.

35. Nous voyons donc que la méthode rigoureuse qui nous a permis, dans le cas de la spirale d'Archimède, de construire l'arc de la parabole (transformée) qui était égale en longueur à un arc donné de la spirale d'Archimède, se trouve en défaut. Nous sommes donc forcés de chercher une autre méthode pour le cas particulier de la spirale hyperbolique.

36. Remarquons que la courbe δ étant arrivée en $\delta_{,}'$, après avoir tourné autour du pôle o, la tangente Δ est venue en $\Delta_{,}'$, et qu'en toutes les positions que prendra la courbe δ en tournant autour du point o, la droite Δ prendra des positions correspondantes qui toutes passeront par le point q, $\overline{qo}$ étant égal à a.

Cela posé :

37. Lorsque la courbe $\delta_{,}'$ reviendra (*fig.* k) en la position δ, le point $a_{,}$ viendra se placer sur le point a, le point $a_{,}$ tournant autour du centre o ; et la droite $\Delta_{,}'$ viendra se placer sur la droite Δ, le point $a_{,}'$ venant se placer en r sur la droite Δ, ce point $a_{,}'$ ayant tourné autour du centre q.

Dès lors il est évident que l'arc $a_{,}'a_{,}$ de la spirale hyperbolique aura roulé sur la droite $\Delta_{,}'$ en se développant sur cette droite d'une longueur égale à : $\overline{ar}$.

Ainsi la droite $\overline{ar}$ sera égale en longueur à l'arc $a_{,}'a_{,}$, lequel arc est égal en longueur à l'arc aa' de la spirale δ.

38. Si donc on veut construire la longueur rectifiée d'un arc aa' de spirale hyperbolique, on mènera les deux rayons vecteurs oa et oa' ; du point o comme centre et avec le plus petit rayon vecteur oa', on décrira un cercle qui transportera le point a' en $a_{,}'$ sur le grand rayon vecteur oa ; on unira le point fixe q avec le point $a_{,}'$; et du point q comme centre avec $\overline{qa_{,}'}$ pour rayon, on décrira un cercle

coupant la droite qa (tangente en a à la spirale) en un point r, et la droite $\overline{ra}$ sera égale à l'arc rectifié aa' de la spirale donnée (*).

39. Ce qui précède nous démontre que, pendant que la spirale conduit sa tangente, cette tangente ne glisse pas sur le point fixe q. Mais on doit remarquer que la spirale tournant uniformément autour de son *pôle o*, sa tangente ne tournera pas uniformément autour du point fixe q.

40. Si l'on suppose que la spirale δ tourne autour de son *pôle o* jusqu'à ce que la tangente Δ prenne la position A en laquelle elle sera parallèle à la droite X, alors la courbe δ, en sa nouvelle position, aura la droite A pour asymptote, et le point infini de cette courbe δ sera situé sur la droite A et du côté du point l. Et si l'on a décrit du point q comme centre, et avec $\overline{qr}$ pour rayon, un arc coupant la droite A au point r', l'arc infini de la courbe δ', à partir du point a', sera représenté en sa rectification par la portion infinie $r'l$ de la droite A.

Mais si l'on suppose que la courbe δ tourne en sens inverse, et que sa tangente vienne passer par le *pôle o*, alors elle aura pris la position Y, et en cette position elle sera tangente à la nouvelle position prise par la spirale δ en son *point asymptote o.*

Si donc nous décrivons du point q comme centre et avec oq pour rayon (et nous savons que $\overline{oq}=a$) un cercle coupant la droite A en un point k, la portion $\overline{rk}$ de la droite K sera égale à l'arc de la spirale compris entre le point a' et le *pôle* ou *point asymptote o*. En sorte que l'arc $a'o$ de la spirale hyperbolique n'a que l'apparence d'être infini ; cet arc a réellement une longueur finie.

41. Il en est donc de la spirale hyperbolique comme des séries, chez lesquelles la somme de leurs termes en nombre infini est pour les unes une quantité finie, et pour les autres une quantité infinie.

42. 3ᵉ *exemple*. Soit donnée la courbe polaire δ ayant pour équation :

$$\rho^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\omega^2}{b^2}\right)=1$$

sa transformée Δ aura pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (30)$$

Cette transformée sera donc une ellipse ayant le *pôle o* pour *centre*, et ses axes

(*) Voyez dans le chap. II des *Développements de géométrie descriptive*, les divers problèmes que nous avons résolus sur la spirale hyperbolique en nous servant de la transformée (en coordonnées rectangulaires) de cette courbe.

seront dirigés, l'un suivant la droite X origine des angles ω, et l'autre suivant la droite Y menée par le *pôle o* perpendiculairement à la droite X.

Cela posé :

Si l'on fait tourner la courbe δ autour du *pôle o* pour prendre la position δ' (l'angle de rotation étant m'), l'équation de cette position δ_1' sera :

$$\rho^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{(\omega+m')^2}{b^2}\right)=1$$

et l'équation de la transformée Δ_1' sera :

$$x^2\left[\frac{1}{a^2}+\frac{\left(\frac{y}{x}+m'\right)^2}{b^2}\right]=1$$

et après les réductions, on aura :

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2m'xy}{b^2}=1 \qquad (31)$$

Nous remplacerons dans l'équation (31) x et y par les valeurs

$$x=x_1\cos\varphi+y_1\sin\varphi+\alpha$$
$$y=x_1\sin\varphi-y_1\cos\varphi+\beta$$

et l'on aura :

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)\cos^2\varphi & x_1^2+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)\sin^2\varphi & y_1^2+2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi & x_1y_1+ \\
+\frac{\sin^2\varphi}{b^2} & +\frac{\cos^2\varphi}{b^2} & -\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{b^2} & \\
+\frac{2m'\cos\varphi\sin\varphi}{b^2} & -\frac{2m'\sin\varphi\cos\varphi}{b^2} & -\frac{2m'\cos^2\varphi}{b^2} & \\
 & & +\frac{2m'\sin^2\varphi}{b^2} & \\
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)\alpha\cos\varphi & x_1+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)\alpha\sin\varphi & y_1+\alpha^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right) \\
+\frac{\beta\sin\varphi}{b^2} & -\frac{\beta\cos\varphi}{b^2} & +\frac{\beta^2}{b^2} \\
+\frac{2m'\beta\cos\varphi}{b^2} & +\frac{2m'\beta\sin\varphi}{b^2} & +\frac{2m'\alpha\beta}{b^2} \\
+\frac{2m'\alpha\sin\varphi}{b^2} & -\frac{2m'\alpha\cos\varphi}{b^2} & -1 \\
\end{array}\right\}=0 \qquad (32)$$

Il faudra maintenant identifier terme à terme les deux équations (32) et (30).

43. Mais si l'on examine l'équation (31), on voit de suite qu'elle appartient à une ellipse concentrique à l'ellipse Δ.

Par conséquent, il sera inutile de changer l'origine de place pour reconnaître si les deux ellipses Δ et Δ_1' sont des courbes identiques, superposables; il suffira de changer les coordonnées rectangulaires X et Y en d'autres coordonnées rectangulaires X_1 et Y_1 ; dès lors l'équation (32) se réduira, après y avoir fait $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, à :

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{2m'\cos\varphi.\sin\varphi}{b^2} \end{array}\right| x_1^2 + \left.\begin{array}{l} \left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)\sin^2\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{b^2} - \frac{2m'\sin\varphi\cos\varphi}{b^2} \end{array}\right| y_1^2 + \left.\begin{array}{l} 2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi - \frac{2.\sin\varphi\cos\varphi}{b^2} - \frac{2.m'\cos^2\varphi}{b^2} + \frac{2m'\sin^2\varphi}{b^2} \end{array}\right| x_1 y_1 = 1 \quad (33)$$

Pour faire disparaître le terme en $x_1 y_1$ dans l'équation (33), nous poserons l'équation de condition :

$$2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{b^2} - \frac{2m'\cos^2\varphi}{b^2} + \frac{2m'\sin^2\varphi}{b^2} = 0$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)\operatorname{tang}\varphi - \frac{\operatorname{tang}\varphi}{b^2} - \frac{m'}{b^2} + \frac{m'\operatorname{tang}^2\varphi}{b^2} = 0$$

ou

$$\operatorname{tang}^2\varphi \cdot \frac{m'}{b^2} + \operatorname{tang}\varphi\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{m'^2}{b^2}\right) - \frac{m'}{b^2} = 0$$

ou

$$\operatorname{tang}^2\varphi + \operatorname{tang}\varphi \cdot \frac{b^2}{m'}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{m'^2}{b^2}\right) = 1$$

d'où l'on tire :

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{b^2}{2m'}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{m'^2}{b^2}\right) \pm \sqrt{1 + \frac{b^4}{4m'^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{m'^2}{b^2}\right)^2}$$

et l'on aura, après réduction :

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{b^2}{2m'}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m'^2-1}{b^2}\right) \pm \frac{1}{2a^2m'}\sqrt{6a^4m'^2+b^4+a^4m'^4+a^4+2a^2b^2m'^2-2a^2b^2} \quad (34)$$

44. Les coefficients des carrés x_1^2 et y_1^2, après y avoir remplacé $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ par leurs valeurs en $\operatorname{tang}\varphi$ seront :

Pour x_1^2 ; savoir :

$$\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right) + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{b^2} + \frac{2m'\operatorname{tang}\varphi}{b^2}\right]\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{1}{A^2}$$

et pour μ^2, savoir :

$$\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m'^2}{b^2}\right)\text{tang}^2\varphi+\frac{1}{b^2}-\frac{2m'\text{tang}\,\varphi}{b^2}\right]\frac{1}{1+\text{tang}^2\varphi}=\frac{1}{B^2}$$

Or, en remplaçant dans les expressions $\frac{1}{A^2}$ et $\frac{1}{B^2}$, tang φ par sa valeur (34), on aura les valeurs des demi-axes A et B de l'ellipse Δ', et il est facile de voir, sans pousser plus loin les calculs, que ces demi-axes A et B ne seront point égaux aux demi-axes a et b de l'ellipse Δ.

45. Ainsi, pour la courbe polaire dont il s'agit, les diverses transformées sont des ellipses ayant toutes même centre, mais n'étant point des courbes identiques, superposables.

§ V.

46. Dans ce qui précède, nous avons reconnu que la spirale d'Archimède et la spirale hyperbolique jouissaient l'une et l'autre de la propriété remarquable, savoir : que toutes leurs transformées en coordonnées rectangulaires (d'après le premier mode de transformation) étaient des courbes identiques, superposables.

Il est évident que la circonférence d'un cercle est encore une courbe qui jouit de la même propriété, puisqu'elle se transforme suivant sa tangente.

Ainsi, nous connaissons trois courbes polaires : 1° la circonférence du cercle, 2° la spirale hyperbolique, et 3° la spirale d'Archimède, pour lesquelles toutes les transformées sont des courbes identiques et superposables ; pour les deux premières, la transformée est une droite qui leur est tangente ; pour la seconde, la transformée est une section conique qui est une parabole.

Mais n'y a-t-il que ces trois courbes polaires qui jouissent de cette propriété ?

§ VI.

Pour résoudre cette question, qui n'est pas sans intérêt (vu les applications aux engrenages, que nous allons faire, ci-après, en utilisant les propriétés géométriques des spirales d'Archimède et hyperbolique), on devrait déterminer, par l'*analyse*, quelles sont les courbes pour lesquelles les deux équations :

$$f\left(x,\frac{y}{x}\right)=0 \quad \text{et} \quad f\left[x',\left(\frac{y'}{x'}+m\right)\right]=0$$

en supposant que

$$x'=x\cos\varphi+y\sin\varphi+\alpha$$
$$y'=x\sin\varphi-y\cos\varphi+6$$

peuvent être rendues identiques, par des valeurs réelles de φ, α et 6.

J'abandonne cette recherche aux *analystes*, car elle est *essentiellement* du domaine de l'*analyse;* les problèmes de ce genre ne peuvent être résolus que par la *langue algébrique*.

§ VII.

47. En examinant attentivement la fig. f, on voit sans peine que la courbe polaire δ peut être considérée comme l'enveloppe de l'espace parcouru par sa transformée en coordonnées rectangulaires.

On voit donc, d'après ce qui a été dit ci-dessus, que les courbes polaires qui auront même longueur d'arc que leur transformée, devront être l'enveloppe de l'espace parcouru par une courbe de forme constante.

Mais la loi du mouvement de l'enveloppée (constante de forme) ne sera pas arbitraire, pour que la propriété des arcs égaux subsiste. La loi du mouvement devra être une de celles que nous avons précédemment établies.

48. Ainsi, par exemple, lorsque la loi du mouvement de l'enveloppée sera telle que celle que nous avons reconnue exister pour la parabole transformée en coordonnées rectangulaires de la spirale d'Archimède, il sera facile de trouver l'équation différentielle de la courbe polaire enveloppe; et en effet :

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation de l'enveloppée.

On différentiera cette équation, et l'on aura :

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy} \cdot dy = 0$$

et dans cette équation différentielle, on remplacera x par ρ, dx par $d\rho$, y par $\omega\rho$, et dy par $(\rho d\omega + \omega d\rho)$, et l'on aura l'équation différentielle de toutes les courbes polaires qui peuvent être l'enveloppe de l'espace parcouru par une enveloppée constante de forme, et soumise à une loi de mouvement identique à celle qui dirige le mouvement de la parabole par rapport à la spirale d'Archimède.

49. Vérifions ce qui précède par un exemple :

Soit $x^2 = ay$ l'équation de l'enveloppée.

En différentiant, on trouve :

$$2xdx = ady$$

Remplaçant x, dx, y, dy par les valeurs indiquées ci-dessus, on trouve l'équation différentielle :

$$2\rho d\rho = a(\rho d\omega + \omega d\rho)$$

dont l'intégrale

$$2\int \rho d\rho = a\int(\rho d\omega + \omega d\rho)$$

sera l'équation en coordonnées polaires de la courbe enveloppe cherchée.

Cette intégrale est :

$$\rho^2 = a\rho\omega \quad \text{ou} \quad \rho = a\omega$$

(en négligeant la constante arbitraire C, ce qui évidemment est permis dans ce cas, puisque pour $\rho = 0$ on a $\omega = 0$, et que par suite on a $C = 0$); et l'on retrouve bien l'équation de la spirale d'Archimède.

§ VIII.

50. Le premier mode de transformation, que nous avons examiné § I, n'est qu'un cas particulier d'un mode de transformation plus général, et que je vais exposer.

Soit (*fig.* e) une courbe polaire δ ayant pour équation $f(\rho, \omega) = 0$, le point o étant le *pôle*, la droite X étant l'origine des angles ω comptés de gauche à droite, ainsi que l'indique la flèche.

Prenons sur la droite X un point o_1 distant du point o d'une quantité a. Cela fait, prenons sur la courbe δ une suite de points m', m'', m''', etc., dont les rayons vecteurs seront respectivement ρ', ρ'', ρ''', etc., ces rayons vecteurs faisant avec la droite X et respectivement des angles ω', ω'', ω''', etc. Du point o comme centre commun, décrivons des cercles C', C'', C''', etc. et respectivement avec les rayons ρ', ρ'', ρ''', etc.; ces cercles couperont respectivement la droite X aux points q', q'', q''', etc.

Cela fait, du point o_1 comme nouveau centre commun, décrivons les cercles D', D'', D''', etc. et respectivement avec les rayons $q'o_1 = \rho' + a$, $q''o_1 = \rho'' + a$, $q'''o_1 = \rho''' + a$, etc. Puis prenons sur ces cercles D', D'', D''', etc. des arcs $q'x'$, $q''x''$, $q'''x'''$, etc. tels que l'on ait : *arc rectifié* . $q'x'$ = *arc rectifié* . $q'm'$; *arc rectifié*. $q''x''$ = *arc rectifié* . $q''m''$, etc. Les divers points x', x'', x''', etc. détermineront une courbe Δ qui sera la *transformée* de la courbe δ, et les deux courbes δ et Δ couperont la droite X en un même point m en lequel elles seront tangentes l'une à l'autre.

51. L'équation de la courbe Δ sera facile à trouver; et en effet :

Désignons par λ un des rayons vecteurs de la courbe Δ, et par μ l'angle que ce rayon vecteur λ fait avec la droite X; on aura, en se rappelant que le *pôle* est le point o_1 :

$$\rho = \lambda - a \quad \text{et} \quad \omega\rho = \mu\lambda$$

De ces deux équations on tire :

$$\rho = \lambda - a \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\mu\lambda}{\lambda - a}$$

Substituant ces valeurs de ρ et de ω dans l'équation $f(\rho, \omega) = 0$, qui est celle de la courbe δ, on aura :

$$f\left[(\lambda - a), \left(\frac{\mu\lambda}{\lambda - a}\right)\right] = 0$$

qui sera l'équation de la *transformée* Δ.

§ IX.

52. Si, au lieu de chercher la transformée Δ de la courbe δ par rapport à la droite X, on cherchait la transformée Δ' par rapport à une droite X' (*fig.* 1) passant par le point m' de la courbe δ, et faisant avec la droite X un angle ω', on devrait prendre sur la droite X' un point fixe o_1' qui (distant du *pôle* o d'une quantité a') devrait être considéré comme étant le *pôle* de la transformée Δ', et faire, par rapport à la droite X' et aux deux *pôles* o et o_1', des constructions analogues à celles que nous avons exécutées ci-dessus § VIII. On construirait dès lors par points la courbe Δ', laquelle serait tangente à la courbe δ au point m'.

53. Pour obtenir l'équation de la transformée Δ', il faut au préalable trouver l'équation de la courbe δ, en passant de la droite X à la droite X' comme origine des angles ω.

Or, on sait que dans ce cas l'équation de la courbe δ sera, en désignant l'angle ω' (qui reste constant pour toutes les constructions subséquentes) par n :

$$f[\rho, (\omega_1 + n)] = 0 \qquad (1)$$

Il suffira donc de remplacer, dans cette équation :

$$\rho \text{ par } \lambda - a' \quad \text{et} \quad \omega_1 \text{ par } \frac{\mu_1\lambda}{\lambda - a'}$$

et l'on aura :

$$f\left[(\lambda - a'), \left(\frac{\mu_1\lambda}{\lambda - a'} + n\right)\right] = 0 \qquad (2)$$

qui sera l'équation de la courbe Δ'.

§ X.

54. On voit que si l'on cherche les transformées Δ, Δ', Δ'', Δ''', etc. correspondant aux divers points m, m', m'', m''', etc. de la courbe polaire donnée δ, les divers *pôles* (nouveaux) o_1, o_1', o_1'', o_1''', etc. pourront déterminer une courbe non arbitraire et dont l'équation sera évidemment :

$$F[\varpi, (180^\circ + \omega)] = 0 \qquad (3)$$

l'équation de la courbe δ étant :

$$f(\rho, \omega) = 0 \qquad (4)$$

De sorte qu'à une valeur de ρ prise dans l'équation (4) correspondra une valeur de ω qui, substituée dans l'équation (3), donnera une certaine valeur pour le rayon vecteur a.

Nous désignerons la courbe polaire dont l'équation est (3) par B. Ainsi la courbe B sera le lieu des *pôles* des diverses transformées Δ, Δ', Δ'', Δ''', etc. de la courbe polaire donnée δ.

55. D'après ce qui précède, on voit que l'on peut prendre arbitrairement la courbe polaire B ; et qu'à chaque courbe B, nouvelle, correspondront des transformées différentes Δ_1, Δ_1', Δ_1'', Δ_1''', etc. de la courbe polaire donnée δ.

§ XI.

56. On peut se proposer la solution du problème suivant :

Étant donnée une courbe polaire δ ayant pour équation : $f[\rho, (\omega + n)] = 0$, reconnaître si cette courbe aura toutes ses transformées Δ, Δ', Δ'', etc. identiques et superposables, pour une certaine courbe B, lieu des *pôles* respectifs o_1, o_1', o_1'', etc. de ces diverses transformées.

57. Ce problème, dont j'abandonne la solution aux *analystes*, nous conduirait à connaître les courbes polaires δ et Δ qui pourraient rouler l'une sur l'autre. Jusqu'à présent on ne connaît que le cercle δ, ayant le *pôle o* pour centre, qui jouisse de la propriété d'avoir pour ses transformées Δ, Δ', Δ'', etc. des courbes identiques et superposables, et cela lorsque la courbe B est elle-même un cercle ayant aussi le *pôle o* pour centre ; et dans ce cas, les transformées Δ, Δ', Δ'', etc. sont des cercles identiques ayant leurs centres respectifs situés sur le cercle B. (*Voyez* la fig. *m*).

DEUXIÈME PARTIE.

Applications de ce qui précède à la construction de deux nouveaux engrenages.

Les deux engrenages dont nous allons exposer la construction, jouissent de la même propriété que les engrenages de White ; ils ont un frottement de roulement et les deux dents *en prise* ne sont en contact que par un seul point.

Mais le mouvement de rotation de l'une des roues dentées étant uniforme pen-

dant que deux dents se conduisent, le mouvement de rotation de la seconde roue dentée est variable; en sorte que dans ces sortes d'engrenages, deux ou plusieurs dents de l'une des roues ne peuvent être en prise avec deux ou plusieurs dents de l'autre roue, il ne peut jamais y avoir qu'une seule dent *en prise*, et aussitôt qu'elle quitte, il faut que la dent suivante se mette immédiatement *en prise* pour que le mouvement de rotation puisse se continuer sans interruption.

Ce mouvement de rotation varié de l'une des roues (le mouvement de rotation de l'autre roue étant uniforme) recommence à chaque nouvelle dent *en prise*, de sorte que le mouvement de rotation de cette roue est périodique de dent à dent.

On pourrait donc désigner ces deux engrenages, sous le nom d'*engrenages à mouvement, de rotation, varié et périodique* ou *périodiquement varié.*

§ I.

Premier engrenage dans lequel les axes se coupent.

58. Si sur un plan (*fig. n*), nous traçons une spirale d'Archimède δ ayant le point o pour pôle et une parabole Δ tangente en a à la spirale δ et passant par le point o; son sommet étant en s et cette parabole étant la *transformée* de la spirale δ; on voit de suite :

Que si le plan de la spirale peut prendre un mouvement de rotation autour du point o, la parabole Δ en glissant sur le point o, son axe infini restant pendant le mouvement parallèle à lui même, conduira avec un frottement de roulement la spirale δ en la forçant à tourner autour du point o.

Et lorsque la spirale δ aura pris la position δ_1, la parabole Δ étant venue en Δ_1, on voit que : 1° le sommet s de Δ sera venu en s', ayant parcouru l'arc ss' de la parabole ξ; 2° le point a' de δ sera venu en a_1', et le point a de δ sera venu en a_1; les points a et a' ayant décrit des arcs de cercles autour du point o; 3° le point q de Δ sera venu en q, et le point r de Δ sera venu en a_1'; en sorte que l'arc ar de la parabole Δ se sera développé en roulant sur l'arc aa' de la spirale δ.

59. D'après ce qui précède, on voit que, si l'on ne considère que l'arc ar de la parabole Δ et l'arc aa' de la spirale δ, ces deux arcs se conduiront l'un l'autre par un frottement de roulement, l'arc aa' de δ ayant tourné autour du point o d'un angle ω et l'arc ar de Δ s'étant mû paraboliquement et parallèlement à la parabole ξ, la quantité de translation étant $\overline{ra'} = \overline{ss'}$.

Il est bien évident que si l'on ne considère que le point de départ et le point d'arrivée, on pourra supposer que l'arc ar de Δ s'est mû parallèlement à la droite

D', laquelle est parallèle à la droite D qui unit les sommets s et s' des paraboles de départ Δ et d'arrivée Δ'.

60. On voit donc que si l'on prend : 1° une règle (*fig. q*) sur laquelle on trace des arcs équidistants de paraboles égales Δ, Δ_1, Δ_2, etc., et 2° un plateau tournant (*fig. p*) sur lequel on trace des arcs équidistants de spirales égales δ, δ_1, δ_2, etc.

La règle, en glissant parallèlement à la flèche f (les deux droites X et X_1 étant supposées superposées), fera tourner le plateau autour de son centre o.

§ II.

Engrenage à crémaillère.

61. Il est évident que l'on a dans ce qui précède tous les éléments d'un engrenage à crémaillère, dans lequel le frottement sera de roulement, et pour lequel la vitesse de rotation de la roue dentée étant uniforme, la vitesse de translation de la crémaillère sera périodiquement uniforme; car pendant que le point a' de Δ se mouvera pour arriver au point a_1' de Δ_1 (*fig. q*), son mouvement de translation ne sera pas uniforme, mais les espaces entiers $\overline{a'a'_1}$, $\overline{a'_1a'_2}$, etc., seront parcourus dans des temps égaux.

62. Pour achever l'engrenage, il faut *habiller* les courbes Δ et δ que nous avons considérées jusqu'ici comme des *lignes rigides*, et il faudra les *habiller*, ou en d'autres termes il faudra leur donner du *corps*, pour en faire de véritables *dents* d'engrenage, absolument de la même manière que pour les engrenages à la White, ainsi : en désignant par Q le plan sur lequel est tracée la spirale δ, on fera mouvoir un plan P normalement à la courbe δ, et dans ce plan P on aura tracé une courbe A ayant en le point m une tangente I perpendiculaire au plan P; le point m parcourant la spirale δ, la courbe A engendrera une surface *spiroïde* qui formera la *dent* du plateau tournant (*en d'autres termes* de la roue dentée).

On fera la même chose pour la crémaillère, mais la courbe A' qui engendrera la surface *parabolique* de la dent de la crémaillère, sera tournée en sens inverse de la courbe A, comme l'indique la fig. *r*, et l'on aura soin de placer les courbes A et A' dans le plan P, de manière à ce qu'elles aient même tangente I au point m.

63. Ces considérations et ces constructions ne peuvent offrir aucune difficulté à ceux qui auront étudié avec soin la théorie des engrenages de White exposée précédemment.

§ III.

Engrenage composé de deux roues dentées.

64. Si (*fig. o*) l'on conçoit un cylindre ayant ses génératrices droites parallèles à la droite X_1 et tangent à la règle suivant cette droite X_1, l'on pourra enrouler la bande de papier DD' sur ce cylindre, et l'on obtiendra des courbes à double courbure, qui, lorsque le cylindre sera planifié, se transformeront en les arcs de paraboles Δ, Δ_1, Δ_2, etc.; et il est évident que si l'on prend ce cylindre, et qu'on le place tangentiellement au plateau tournant, comme l'indique la (*fig. o*), ce cylindre en tournant autour de son axe horizontal A, fera tourner le plateau autour de son axe vertical Z.

Et les surfaces des dents du cylindre, ainsi que les surfaces des dents du plateau étant construites comme pour les engrenages de White, on aura un engrenage dans lequel le frottement sera de roulement.

Les deux dents δ et Δ seront *en prise* et en contact par un seul point, et aussitôt qu'elles se quitteront, les deux dents suivantes δ_1 et Δ_1 se mettront *en prise*, et ainsi de suite; et de telle sorte que le plateau denté tournant uniformément autour de son axe Z, la roue cylindrique, prendra deux mouvements, l'un de rotation autour de son axe A indiqué par la flèche G, et l'autre de translation et parallèle à cet axe et indiqué par la flèche f (*fig. o*). Pendant que les dents δ et Δ se conduiront, le mouvement de translation sera varié ainsi que le mouvement de rotation du cylindre denté.

65. On voit donc que par ce moyen on peut transmettre un mouvement de rotation périodiquement varié entre deux axes perpendiculaires entre eux, et de telle manière que l'axe du cylindre denté ait un mouvement de translation, qui aura d'autant plus d'étendue que l'on aura fait le cylindre denté plus long.

66. Rien n'empêcherait d'enrouler sur un cône le plateau (considéré comme une feuille de papier), alors on obtiendrait un engrenage composé d'une roue conique et d'une roue cylindrique; l'axe du cylindre serait alors parallèle à une génératrice droite du cône, et dès lors les axes des deux roues dentées ne se couperaient plus sous l'angle droit. Les propriétés de cet engrenage seraient identiquement les mêmes que celles de l'engrenage précédent.

67. Pour que le mouvement de rotation puisse se continuer non pas *indéfiniment*, car cela est impossible dans ces sortes d'engrenages, mais de manière à ce que le cylindre puisse faire plusieurs révolutions autour de son axe, on ne peut pas prendre le diamètre de ce cylindre arbitrairement.

Et en effet : les dents placées sur le cylindre doivent être également espacées ; or : on voit de suite, en enroulant la crémaillère (*fig. q*) sur le cylindre, que les droites D′ et D″ qui sont parallèles entre elles (et qui font un certain angle avec la droite X_1 à laquelle les génératrices du cylindre sont parallèles), détermineront sur le cylindre (après y avoir été librement pliées et enroulées) deux hélices parallèles (ayant par conséquent même pas).

Il faudra donc pour que les dents qui rampent en hélice sur le cylindre, se trouvent également espacées entre elles, que la distance $\overline{a'a'_1}$ que je représenterai par λ, soit contenue un nombre entier de fois dans une spire, ou révolution entière de l'hélice donnée par la droite D′.

On pourra donc supposer que pour une révolution ou spire de l'hélice on ait m dents (m étant un nombre entier), et il faudra dès lors, en désignant par R le rayon du cercle section droite du cylindre, et par γ l'angle que la droite D′ fait avec la droite X_1, que l'on ait : $m.\lambda \cos\gamma = 2\pi.R$; d'où l'on calculera R, et l'on aura : $R = \frac{m.\lambda \cos\gamma}{2\pi}$.

68. Lorsque l'on formera l'engrenage au moyen d'un cône denté (et non d'un plateau denté), il faudra aussi calculer le demi-angle au sommet du cône, par la condition que les dents se trouvent également espacées sur le cône.

Or si nous désignons par L le rayon $\overline{oa}$ du cercle C (*fig. p*), et par r le rayon du cercle base du cône sur lequel le cercle C doit s'enrouler, l'apothème de ce cône étant égal en longueur à L, on voit de suite, en désignant par n le nombre de dents à placer sur le pourtour du cône, et par d l'arc rectifié $\overline{aa_1}$, qu'il faudra poser l'équation :

$$2\pi r = n.d$$

d'où :

$$r = \frac{n.d}{2\pi}.$$

Le demi-angle au sommet du cône sera donné, en le désignant par θ, par l'équation :

$$r = L.\sin\theta$$

d'où l'on tire :

$$\sin\theta = \frac{n.d}{2\pi.L}.$$

69. Le système que nous venons d'étudier nous donne quatre engrenages différents :

1° Roue cylindrique conduisant ou : 1° un plateau denté, ce qui donne une crémaillère circulaire ; ou 2° une roue conique dentée à sa surface convexe, ce

qui donne un engrenage extérieur; ou 3° une roue conique dentée à sa surface concave, ce qui donne un engrenage intérieur.

2° Une roue conique dentée à sa surface convexe et conduisant une crémaillère droite, dont la direction fait avec l'apothême du cône un angle γ.

Nota. On ne peut pas faire conduire un plateau denté par une crémaillère droite, parce que les dents ne pourraient pas se dégager les unes des autres, après qu'elles auraient cessé d'être *en prise*.

70. Remarquons que dans tous ces engrenages le *point de contact* des deux dents *en prise* se meut sur la droite X, par laquelle se mettent en contact les surfaces coniques et cylindriques; ainsi il arrive ici la même chose que pour les engrenages de White.

71. Remarquons encore que les distances du point de contact aux deux axes des roues dentées, ne sont point dans un rapport constant, car la distance du point de contact à l'axe de la roue cylindrique est toujours la même, quelle que soit la position de ce point de contact sur la droite X, tandis que la distance du point de contact à l'axe de la roue conique varie de grandeur à mesure que ce point de contact s'approche ou s'éloigne du sommet du cône.

Le rapport des vitesses ne peut donc pas être constant, et l'on voit dès lors pourquoi le mouvement de rotation de l'une des roues dentées étant uniforme, le mouvement de rotation de l'autre roue doit être variable.

72. Nous devons encore faire remarquer que le cylindre devrait avoir une longueur indéfinie, pour que le mouvement de rotation puisse se continuer indéfiniment dans le même sens.

Par conséquent ces engrenages ne pourront être employés que pour des *mouvements alternatifs* de rotation de la roue conique, laquelle imprime des mouvements alternatifs de rotation à la roue cylindrique, et de plus imprime, en même temps, un mouvement de *va-et-vient* à l'axe de la roue cylindrique.

§ IV.

Deuxième engrenage dans lequel les axes ne sont pas situés dans le même plan.

73. Sur un plan (*fig.* 8) nous traçons : 1° une spirale hyperbolique δ ayant le point o pour *pôle* (ou pour *point asymptote*); 2° une droite X passant par le point o; 3° une tangente Δ au point a en lequel la droite X coupe la courbe δ; 4° une droite γ passant par le point o et perpendiculaire à la droite X, et coupant la tangente Δ en un point q; 5° un cercle C ayant le point o pour centre et $\overline{ao}$ pour

rayon; et 6° un cercle C′ d'un rayon arbitraire, mais plus petit que $\overline{ao}$, ayant le même point o pour centre et coupant la spirale δ en un point a'.

Cela fait :

Si nous faisons tourner la courbe δ autour du point o jusqu'à ce que le point a' vienne en a_1' sur la droite X, cette courbe δ aura tourné d'un angle γ et prendra la position δ_1.

Et si pendant ce mouvement la courbe δ a entraîné avec elle sa tangente Δ, cette droite viendra prendre, à la fin du mouvement de rotation, la position Δ_1, en laquelle elle sera tangente à la courbe δ_1 au point a_1'; ainsi la droite Δ peut être considérée comme ayant décrit autour du point q, un angle 6.

Si donc on suppose qu'au delà de la droite Δ se trouve une droite Δ_2 tangente à la spirale δ_2 au point p, cette droite Δ_2 faisant avec Δ un angle 6 et passant aussi par le point q, les arcs $\overline{a'a_1'}$ et $\overline{a'a_2'}$ seront égaux, et dès lors en faisant tourner les rayons Δ_2, Δ, Δ_1, autour du point q, ils conduiront avec un frottement de roulement les courbes δ_2, δ, δ_1, en les faisant tourner autour du point o.

Mais comme les vitesses de rotation étant supposées uniformes pour les courbes δ, ne seront pas uniformes pour les droites Δ, il faudra que pendant qu'une des tangentes Δ conduit l'une des courbes δ, ou est conduite par elle, les autres tangentes et courbes homologues ne se trouvent point en contact. Or il évident, par le tracé graphique et tout ce qui a été dit dans la première partie de ce mémoire, que cela aura lieu.

74. Pour que le mouvement de rotation puisse se continuer indéfiniment, il faudrait que l'arc mesurant l'angle γ soit égal à $\frac{2\pi}{m}$, m étant un nombre entier, et il faudrait aussi que l'arc mesurant l'angle 6 soit égal à $\frac{2\pi}{n}$, n étant un nombre entier. Mais comme les dents courbes et droites sont enchevêtrées les unes dans les autres, et de telle manière qu'elles ne pourraient se dégager les unes des autres, tant que l'on voudrait les considérer comme placées sur deux plateaux circulaires et horizontaux, l'un tournant autour du point o et l'autre tournant autour du point q, nous allons voir qu'il suffira de prendre l'angle 6 tel que l'on ait :

$$n.\hat{6} = 360°.$$

Et en effet, pour que les dents courbes δ puissent se dégager des dents droites ou *flancs* Δ, il suffit de s'arranger de manière à ce qu'elles passent au-dessous du plan des droites Δ avant et après le contact qui a lieu sur la droite X.

Or c'est ce que l'on obtiendra en pliant le plan circulaire sur lequel se trouvent

tracées les courbes ∂, sur un cône ayant son sommet au point o et qui serait tangent à ce plan tout le long de la droite X.

On déterminera ce cône de la manière suivante :

Ayant tracé la roue plane à flancs (*fig. t*), et ayant dès lors tracé les divers rayons Δ, Δ_1, Δ_2,... tels que les angles θ étant égaux entre eux, on aura :

$$n.\hat{\theta} = 360°,$$

on tracera la droite X et on fixera le point o sur cette droite X, lequel sera donné par le pied de la perpendiculaire abaissée du centre q sur cette même droite X.

On tracera la spirale hyperbolique ∂ ayant le point o pour *pôle* ou pour point assymptote, cette courbe ∂ étant tangente à la droite Δ au point a en lequel les droites Δ et X se coupent.

Du point o comme centre et avec $\overline{oa_1'}$ pour rayon, on décrira un cercle C' coupant la courbe ∂ au point a' ; et l'on remarquera que le point a_1' est celui en lequel se coupent les droites Δ_1 et X.

Cela posé, on cherchera le rayon d'un cercle qui serait tel que sa circonférence sera égale à p fois l'arc rectifié $\overline{a'a_1'}$.

Et ainsi désignant $\overline{oa_1'}$ par L, par R le rayon du cercle cherché, et par d la longueur de l'arc rectifié $\overline{a'a_1'}$, on aura :

$$2\pi.R = p.d$$

d'où :

$$R = \frac{p.d}{2\pi}.$$

On construira donc un cône Σ ayant 1° son sommet au point o, ayant 2° le plan des droites Δ pour plan tangent tout le long de la droite X, qui sera l'apothème de ce cône Σ, et ayant 3° pour section droite un cercle du rayon R, ce cercle passant par le point a_1'.

Cela fait :

Supposant (*fig. s*) que les courbes ∂_1, ∂, ∂_2,... sont également espacées entre elles ; et que les arcs $\overline{a_1'a'}$, $\overline{a'a_2'}$,... de la fig. (*s*) sont égaux entre eux et à l'arc $\overline{a_1'a'}$ de la fig. (*t*), il suffira d'enrouler sur le cône Σ le plan sur lequel se trouvent tracées les courbes ∂, et l'on aura sur le cône Σ des courbes à double courbure qui conduiront par un frottement de roulement les rayons ou *flancs* du plateau dont le centre est en q.

75. Il suffira d'*habiller* les courbes du cône Σ et les rayons ou *flancs* du plateau, de la même manière qu'on l'a fait pour les engrenages de White, et l'on obtiendra

un nouvel engrenage à frottement de roulement et composé d'un plateau denté et d'une roue conique dentée ; et dans cet engrenage les axes ne seront point situés dans un même plan, deux dents seront *en prise* et ne se toucheront que par un point, et le point de contact se mouvra sur la droite X, droite suivant laquelle se touchent et le cône Σ et le plan du plateau.

76. Il est évident que la roue conique tournant uniformément, le plateau aura un mouvement de rotation variable, car si (*fig. u*) on considère un point de contact *a* de deux dents *en prise*, les distances de ce point *a*, savoir : $\overline{aq}$ à l'axe Q perpendiculaire au plateau et passant par son centre *q*, et $\overline{ab}$ à l'axe O du cône Σ et passant par son sommet *o*, ne seront point dans un rapport constant lorsque l'on fera varier la position de ce point *a* sur la droite X (*).

77. Il est encore évident que cet engrenage ne peut donner aucune variété comme l'engrenage précédent. Il doit être rangé dans la classe des engrenages à crémaillère circulaire ; il est seul et unique de son genre.

TROISIÈME PARTIE.

Nous allons dans cette troisième partie donner la construction géométrique des excentriques destinés à tracer : 1° sur un plan et 2° sur la surface concave ou convexe, *d'abord* d'un cylindre et *ensuite* d'un cône, une courbe de forme déterminée.

§ I.

Tracé d'une courbe sur une surface plane et rectangulaire.

78. Soient données la droite X et une droite D perpendiculaire à cette droite X et la coupant au point *m* (*fig. v*) ; d'un point *o* pris sur la droite X et comme centre et avec un rayon *om*, décrivons un cercle C ; traçons une courbe δ arbitraire et passant par le point *m*.

Cela fait : divisons la droite D, et à partir du point *m*, en un certain nombre de parties égales entre elles, par les points m, m', m'', m''',... en menant par ces points des parallèles à la droite X, nous aurons les divers points m, x', x'', x''',... de la courbe δ.

En sorte que le point *m* étant considéré comme origine des coordonnées et les droites X et D comme axes des coordonnées, le point x' de la courbe δ aura $\overline{mm'}$ pour *abscisse* et $m'x'$ pour *ordonnée*.

(*) Voyez à ce sujet la *Théorie géométrique des engrenages*, et les *Développements de géométrie descriptive*.

Cela posé :

Si l'on suppose que la courbe δ se meuve parallèlement à elle-même, et dans le sens de la droite D, ainsi que l'indique la flèche f', à mesure que les points m', m'', m''',... viendront se superposer sur le point m, à mesure aussi et en même temps, les points x', x'', x'',... de la courbe δ viendront passer par les points p', p'', p''',... de la droite X.

Et si l'on dente le cercle C et la droite D, de manière à former un engrenage à crémaillère, pendant que le cercle C se mouvra uniformément, la crémaillère D se mouvra aussi uniformément.

Cela posé :

Si l'on divise le cercle C en arcs égaux entre eux, $\overline{mn'}$, $\overline{n'n''}$, $\overline{n''n'''}$,... et de manière à ce que l'on ait $\overline{mn'}$ = arc rectifié mn', on voit de suite que les points m' et n', m'' et n'', m''' et n''',... viendront successivement se superposer sur le point m, parce que le cercle C et la droite D sont les lignes *primitives* de l'engrenage à crémaillère, et que le cercle C et la droite D se conduisent dès lors par un frottement de roulement.

Cela dit :

Traçons sur le plan du cercle C les divers rayons $\overline{on'}$, $\overline{on''}$, $\overline{on'''}$,... et portons respectivement sur ces rayons les distances :

$$\overline{n'y'} = \overline{mp'},\ \overline{n''y''} = \overline{mp''},\ \overline{n'''y'''} = \overline{mp'''},\dots$$

les divers points m, y', y'', y''',... détermineront une courbe *polaire* ou *excentrique* φ.

Et il est évident que si la roue dentée tourne suivant la flèche f'' et force la crémaillère à se mouvoir suivant la flèche f, les points homologues des courbes φ et δ viendront en même temps se superposer sur la droite X ; et qu'ainsi les points x' et y' viendront se superposer sur le point p', x'' et y'' viendront se superposer sur le point p'', et ainsi de suite. Ce qui précède étant compris :

79. On voit de suite que si l'on suppose en m un *style* ou pointe à tracer, ce style sera ou 1° poussé le long de la droite Z par l'*excentrique* φ et dans le sens indiqué par la flèche f, et tracera sur un plan fixé à la crémaillère la courbe δ, comme l'indique la fig. α; ou 2° il sera poussé le long de la droite X par le *calibre* δ et alors il tracera sur le plateau tournant K la courbe φ, ainsi que l'indique la fig. y.

§ II.

Tracé d'une courbe sur une surface cylindrique au moyen de l'excentrique.

80. 1° Concevons un cylindre Σ de révolution dont le cercle E de section droite aura son rayon égal à ρ (*fig. x*);

2° Désignons par B son axe;

3° Imaginons que ce cylindre étant transporté sur la fig. *v* se trouve tangent au plan (sur lequel est tracée la courbe δ), suivant la droite X;

4° Enroulons le plan de la courbe δ sur le cylindre Σ, la courbe plane se transformera en une courbe à double courbure ξ (*fig. x*), et les arcs égaux entre eux $\overline{mq'}$, $\overline{q'q''}$, $\overline{q''q'''}$,.... du cercle E seront, étant rectifiés, égaux aux parties égales entre elles $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$, $\overline{m''m'''}$, (*fig. v*) de la droite D.

L'angle γ mesuré par l'arc $\overline{mq'}$ du cercle E (*fig. x*) sera donc connu et l'*amplitude* de cet angle dépendra de la *grandeur* du rayon ρ.

Le rapport entre les angles ω (*fig. v*) sera donc connu et sera construit *graphiquement* sans difficulté aucune.

Cela posé :

Si l'on place le cylindre Σ sur la fig. *v*, de manière à ce qu'il soit tangent suivant la droite X, on pourra remplacer, dans les systèmes ou machines dont les éléments sont indiqués (*fig. y* et α), la courbe δ par la courbe ξ; de telle sorte que si (*fig. z*) le cylindre Σ tourne autour de son axe B et uniformément, l'*excentrique* K tournant aussi uniformément autour de son axe I', les vitesses angulaires étant dans le rapport constant $\frac{\omega}{\gamma}$, les points homologues des courbes φ et ξ, savoir : n' et z', n'' et z'', n''' et z''',... viendront en même se superposer sur la droite X.

81. Nous allons indiquer entre tous les systèmes mécaniques qui pourraient être employés pour transmettre le mouvement demandé entre les axes I' et B, celui qui nous paraît le plus simple (*).

Le cylindre Σ sur la surface convexe duquel on devra tracer la courbe ξ prendra un mouvement de rotation autour de son axe B, au moyen d'une bague ou anneau denté C (*fig. z*), qui sera conduite par une roue dentée C' du même rayon porté par l'axe I parallèle à l'axe B est situé avec lui dans un plan vertical.

(*) Dans tout ce qui va suivre jusqu'à la fin de ce mémoire, nous n'exposerons que les principes d'après lesquels les machines doivent être construites, et nous n'indiquerons que les éléments de ces machines.

En sorte que l'axe I transmettra par l'engrenage cylindrique C et C', son mouvement à l'axe B, et les deux axes I et B tourneront dans le même sens.

Cela posé :

On devra transmettre le mouvement de rotation de l'axe I à l'axe I' de l'excentrique K. Les deux axes I et I' se coupent sous l'angle droit, et les trois axes I', I et B sont dans le même plan vertical. On transmettra le mouvement de rotation de l'axe I à l'axe I' au moyen d'un engrenage conique C'' et C''', mais il faudra diviser l'angle droit $\widehat{I, I'}$, en deux angles α et 6 tels que l'on ait : $\frac{\omega}{\gamma} = \frac{6}{\alpha}$, pour que l'axe I' tournant de l'angle ω transmette à l'axe B au moyen de l'axe I un mouvement tel que cet axe B tourne sur lui-même d'un angle γ.

L'excentrique K poussera ou 1° une tige ou verge F qui sera parallèle à l'axe B du cylindre plein Σ et dont la pointe m tracera la courbe ξ sur la surface convexe du cylindre Σ (*fig.* z), ou 2° une tige ou verge F' qui sera parallèle à l'axe B' du cylindre creux Σ' et dont la pointe m' tracera la courbe ξ sur la surface concave du cylindre Σ' (*fig.* 6). On ne doit pas oublier que le rayon ρ de la surface cylindrique est celui de la surface convexe dans le premier cas (*fig.* z) et qu'il est au contraire celui de la surface concave dans le deuxième cas (*fig.* 6).

§ III.

Tracé d'une courbe sur une surface cylindrique, au moyen du calibre.

82. On peut tracer sur une surface cylindrique Σ une courbe donnée au moyen du calibre ∂; mais il faut remarquer que l'on ne peut alors tracer la courbe que sur la surface convexe du cylindre.

Et en effet :

Étant donnés un cylindre Σ et un plan T qui lui est tangent suivant une de ses génératrices droites X, on pourra couper tout le système par un plan perpendiculaire à la droite X, on aura donc un cercle E section droite du cylindre Σ et une droite D tangente à ce cercle E et au point m en lequel la génératrice X se trouve coupée par le plan sécant.

Cela fait :

On pourra remplacer le cercle E par une roue dentée et la droite D par une crémaillère.

Dès lors le mouvement de *rotation* imprimé au cylindre Σ, forcera le plan T à prendre un mouvement de translation et parallèlement à la droite D.

Dès lors ayant tracé sur le plan T une courbe ∂, elle dirigera une *pointe* ou

style (en la forçant à se mouvoir le long de la droite X), et cette pointe tracera sûr le cylindre convexe Σ une courbe ξ qui sera la courbe demandée, c'est-à-dire la courbe à double courbure, dont la *transformée* (le cylindre Σ étant développé sur son plan tangent T), n'est autre que la courbe plane (ou *calibre*) δ.

Il est bien évident, d'après ce qui précède, que la courbe ξ ne peut être tracée que sur la surface convexe du cylindre Σ et jamais sur sa surface concave, lorsque l'on construira une machine à tracer basée sur l'emploi du *calibre*.

§ IV.

Tracé d'une courbe sur une surface plane et circulaire.

83. Concevons (*fig.* γ) un plateau circulaire A tournant autour de son axe O. Ce plateau étant terminé par un cercle C, l'axe O passera par le centre o du cercle C.

Traçons un diamètre X du cercle C et une courbe δ qui passe par le point *m* en lequel la droite X et le cercle C se coupent.

Cela fait :

Prenons sur la droite X un point o_1, et de ce point o_1 comme centre et avec $\overline{o_1m}$ pour rayon, décrivons le cercle C_1.

Les deux cercles C et C_1 seront tangents l'un à l'autre au point *m*.

Cela fait :

Partageons le cercle C en parties égales entre elles par les points *m*, q', q'', q'''... et tirons les rayons $q'o$, $q''o$, $q'''o$..., ces rayons couperont la courbe δ en les points m', m'', m'''...

Du point *o* comme centre et avec les rayons $\overline{om'}$, $\overline{om''}$, $\overline{om'''}$... décrivons les cercles P′, P″, P‴,... lesquels couperont la droite X, et respectivement, aux points p', p'', p''',...

Cela fait :

Partageons le cercle C_1 en parties égales entre elles par les points r', r'', r''',... et de telle manière que l'on ait : arc rectifié $\overline{mr'}$ = arc rectifié $\overline{mq'}$.... etc.

Ensuite menons les rayons o_1r', o_1r'', o_1r''',... et portons sur chacun d'eux $\overline{r'y'} = \overline{mp'}$, $\overline{r''y''} = \overline{mp''}$, $\overline{r'''y'''} = \overline{mp'''}$,... les divers points y', y'', y''',... détermineront une courbe φ.

Cela posé :

Si l'on suppose que la courbe φ tourne autour de son centre o_1 et dans le sens indiqué par la flèche *f*, elle forcera le point *m* à se mouvoir sur la droite X dans le sens indiqué par la flèche *f*, et si en même temps le cercle C tourne autour

de son centre o dans le sens indiqué par la flèche f et de telle manière que le cercle C_1 tournant de l'angle ω, le cercle C tourne de l'angle γ (ou ce qui revient au même, de manière à ce que les cercles C et C_1 roulent l'un sur l'autre, comme les cercles primitifs d'un engrenage), la pointe m tracera sur le plateau tournant Δ la courbe δ.

Et réciproquement.

Si la courbe δ conduit la *pointe m* en la forçant à se mouvoir le long de la droite X dans le sens indiqué par la flèche f_1, cette pointe *m* tracera sur le plateau Φ (tournant autour de son centre o_1) la courbe φ.

84. On voit donc sur-le-champ qu'en dentant les deux cercles primitifs C et C_1, on pourra construire deux machines à tracer, dont je ne donne ici que les éléments, savoir : l'une (*fig.* ω), dans laquelle l'*excentrique* Φ poussera la pointe *m* et lui fera tracer sur le plateau tournant P la courbe δ; et l'autre, dans laquelle faisant tourner (*fig.* ε) le *calibre* Δ, il poussera la pointe *m*, et lui fera tracer sur le plateau tournant Q la courbe φ.

§ V.

Tracé d'une courbe sur une surface conique, au moyen de l'excentrique.

85. Si l'on enroule le cercle C (*fig.* γ), et toutes les lignes et points de division qui s'y trouvent placés, sur un cône Σ (*fig.* π) la circonférence C s'enroulera sur le cercle E, section droite du cône Σ. Les points $m, q', q'', q''', \ldots$ du cercle C viendront se placer en les points $i, i', i'', i''', \ldots$ du cercle E, et ces points seront équidistants entre eux, puisque ceux du cercle C sont équidistants entre eux. L'arc $\overline{mq'}$ du cercle C mesure un angle γ, l'arc correspondant $\overline{ii'}$ du cercle E mesurera un angle γ_1 qui sera plus petit que l'angle γ.

86. Il sera facile, en enroulant le cercle C sur le cône Σ, d'obtenir la courbe à double courbure δ_1, dont la transformée sera la courbe δ, ce cône Σ étant planifié sur son plan tangent.

Cela posé :

87. On devra calculer le rayon du cercle E, de manière à ce que la circonférence E renferme un nombre exact de fois l'arc rectifié $\overline{mq'}$; ainsi désignant par R le rayon du cercle E, et par l la longueur de l'arc rectifié $\overline{mq'}$, on devra avoir :

$$2\pi R = n.l$$

d'où :

$$R = \frac{n.l}{2\pi}$$

n étant un nombre entier.

Dès lors, on pourra employer l'une ou l'autre des deux dispositions indiquées (*fig.* λ) et (*fig.* μ).

88. Dans la fig. μ, on suppose un axe I parallèle à la génératrice droite X du cône Σ, et l'on divise en deux parties égales par la droite L, l'angle $\widehat{I, B}$ formé par l'axe I et par l'axe B du cône Σ.

On place un engrenage conique (C, C') qui transmet le mouvement de rotation de l'axe I' à l'axe B. En sorte que les vitesses des deux axes I et B seront les mêmes, seront égales.

Cela fait :

On divise l'angle droit formé par l'axe I et par l'axe O_1 de l'excentrique (l'axe O_1 étant supposé vertical et l'axe I étant supposé horizontal) en deux parties par une droite L et de telle manière que l'on ait : $\frac{\alpha}{6} = \frac{\gamma_1}{\omega}$; on construira l'engrenage conique (C'', C''') ; et l'on voit que l'axe O_1 transmettra à l'axe B par l'intermédiaire de l'axe I une vitesse telle que pendant que l'excentrique Φ décrira un angle ω, le cône Σ décrira un angle γ_1.

L'excentrique Φ poussera une tige F qui se mouvra le long de la droite X et sa pointe *m* tracera sur le cône Σ la courbe demandée δ_1.

89. Dans la fig. λ, on divise l'angle formé par les axes B du cône Σ et O_1 de l'excentrique Φ en deux parties α et 6, telles que l'on ait : $\frac{\alpha}{6} = \frac{\gamma_1}{\omega}$. Dès lors l'axe O_1 transmettra son mouvement à l'axe B, de telle manière que pendant que l'excentrique Φ tournera d'un angle ω, le cône Σ tournera d'un angle γ_1.

La tige F se mouvra parallèlement à la génératrice droite X du cône Σ, et suivant que l'on voudra tracer sur la surface convexe ou concave du cône Σ, on disposera la tige F comme l'indique ou la fig. λ, ou la fig. ρ.

90. La première disposition (*fig.* μ) exige deux engrenages coniques ; la deuxième disposition (*fig.* λ) n'exige qu'un seul engrenage conique.

§ VI.

Tracé d'une courbe sur une surface conique, au moyen du calibre.

91. Si l'on place le cône Σ de la fig. π sur le cercle C de la fig. γ, le sommet du cône étant au centre *o* du cercle C, et l'apothème du cône étant égale au rayon du cercle C, il est évident que le cercle E, section droite du cône, se déroulera sur le cercle C, lorsque l'on planifiera le cône sur le plan du cercle C et qui ne sera autre qu'un plan tangent à ce cône.

Si donc l'on *dente* le cercle C pour en faire une crémaillère circulaire, et si l'on *dente* le cercle E pour en faire une roue conique, on déterminera un engrenage à crémaillère, et le système sera tel que la courbe δ (ou le calibre Δ), poussant une pointe à tracer *m* le long de la droite X, cette pointe tracera sur la surface convexe du cône Σ, la courbe $\delta_{,}$.

Il est évident que par ce moyen mécanique on ne pourra pas tracer la courbe $\delta_{,}$ sur la surface concave du cône Σ.

§ VII.

92. Dans tout ce qui précède, nous avons exposé les principes géométriques d'après lesquels devaient être construites les machines à tracer une courbe voulue ; nous allons indiquer très-succinctement certaines dispositions mécaniques qui permettent de réaliser la conception géométrique.

93. Lorsque l'on doit employer une courbe δ pour diriger une pointe *m*, la courbe δ tournant autour d'un point *o*, et la pointe devant prendre un mouvement de va-et-vient le long d'une droite X, il faut *matérialiser* cette courbe δ, ainsi que la pointe *m*.

94. Or il y a en général quatre manières de matérialiser une courbe, savoir : de faire : ou 1° une *rainure* ayant la forme de la courbe δ, comme l'indique la fig. φ, ou 2° de prendre une *verge* et de la plier suivant la forme de la courbe δ comme l'indique la fig. Δ, ou de découper une *plaque* suivant la forme de la courbe δ, et dans ce cas il y a deux manières de découper la *plaque*, ou 3° suivant la forme *convexe* de la courbe δ, comme l'indique la fig. χ, ou 4° suivant la forme *concave* de la courbe δ, comme l'indique la fig. ξ (*).

95. Maintenant la pointe *m* devant prendre un mouvement de va-et-vient dans le sens de la droite X, son mouvement doit être dirigé.

Il y a en général deux manières de diriger le mouvement de *translation* de la pointe *m* : ou 1° en faisant glisser cette pointe dans une *rainure* A, comme l'indique la fig. φ, ou 2° en fixant la pointe *m* à une *règle* M qui glisse dans deux *douilles* ou *guides* fixes N et P, comme l'indique la fig. Δ (la fig. Δ' est une coupe horizontale qui permet de voir comment la courbe δ agit sur le *manche* de la pointe à tracer *m*.).

96. Dans les fig. φ et Δ, le mouvement de va-et-vient de la pointe *m* est complet.

(*) Voyez ce que j'ai dit au sujet des surfaces terminant les outils à employer pour *façonner* la matière et exécuter les dents d'un engrenage, dans l'ouvrage que j'ai publié sous le titre : *Théorie géométrique des engrenages*, etc.

Mais dans les fig. ψ et ξ, le mécanisme appliqué à la pointe m ne suffirait plus, il faut que, lorsque les divers points de la courbe δ arrivent successivement sur la droite X, la pointe m soit forcée de suivre ces points, et qu'ainsi elle se rapproche ou s'éloigne du centre *o* à mesure que ce sont des points de la courbe δ plus éloignés ou plus rapprochés du centre *o* qui viennent passer sur la droite X.

Aussi, lorsque l'on emploie la forme *concave* ou *convexe* de la courbe δ, faut-il, outre le *guide* de la pointe *m*, placer un *ressort* S qui se trouve *comprimé* par la courbe δ, ou qui *presse* sur cette courbe δ suivant que la pointe *m* doit s'éloigner ou se rapprocher du centre *o*.

Les fig. χ et ξ indiquent cette disposition.

97. Nous devons faire remarquer que lorsqu'on matérialise la courbe δ en lui donnant la forme d'une *rainure*, comme fig. φ, ou la forme d'une *barre rigide*, comme fig. Δ, les faces latérales ne sont point terminées par deux courbes identiques à la courbe δ.

98. Ainsi (*fig.* A) pour tracer les deux courbes δ', δ'' qui doivent terminer la *rainure* à droite et à gauche, il faut supposer que la tige de la pointe sera un cylindre vertical U d'un certain rayon ρ, et portant en son centre la pointe à tracer *m*, laquelle devait être conduite par la courbe δ; et en décrivant des divers points $v, v', v'', v''', \ldots$ de la courbe δ comme centres et avec un rayon ρ, les cercles $V, V', V'', V''', \ldots$ les courbes δ' et δ'' tangentes à ces divers cercles, détermineront la forme et la largeur de la *rainure* dans laquelle se mouvra la tige cylindrique U.

99. Ainsi (*fig.* B) pour tracer les deux courbes δ_1, δ_2, qui doivent terminer à droite et à gauche la *verge rigide*, il faut supposer que le point *m*, milieu de la distance $\overline{ii'}$ des deux *couteaux* entre lesquels la *verge courbe* doit se mouvoir, parcourt la courbe δ, puis du centre *o* on mènera les divers rayons vecteurs *oc*, *oa*, *ok*, *op*,... de la courbe δ et sur chacun d'eux on portera à droite et à gauche du point de la courbe δ, des ouvertures de compas égales entre elles et à $\frac{1}{2}l$ (l étant la distance $\overline{ii'}$ des deux couteaux); on obtiendra par ce moyen les points $d, b, v, r, \ldots$ par lesquels passera une courbe δ_1, et les points $d', b', v', r', \ldots$ par lesquels passera une courbe δ_2, et ces deux courbes détermineront la forme et l'épaisseur de la *verge rigide* et *courbe* qui doit conduire la pointe à tracer qui sera fixée au point *m* de l'équipage qui porte les *couteaux*.

N° 8.

DE LA NATURE GÉOMÉTRIQUE DES DIVERSES ESPÈCES DE FROTTEMENTS QUI PEUVENT EXISTER ENTRE DEUX COURBES ET DEUX SURFACES (*).

Il existe huit espèces de frottements entre deux courbes ayant un point commun, savoir :

Frottement de { roulement { direct, angulaire, ; glissement { direct, angulaire, } avec ou sans pivotement.

Il existe seulement quatre espèces de frottements entre deux surfaces en contact suivant une ligne courbe ou droite, savoir :

Frottement de { roulement { direct. angulaire. ; glissement { direct. angulaire.

Par rapport à deux courbes :

J'appelle *frottement direct* celui qui a lieu entre deux courbes, ayant au point de contact et à chaque instant du mouvement, même tangente ;

Et j'appelle *frottement angulaire* celui qui existe entre deux courbes, ayant au point commun et à chaque instant du mouvement, des tangentes différentes.

Lorsque, à chaque instant du mouvement, l'angle formé par les plans des cercles osculateurs correspondants, pour chacune des courbes, au point commun ou de contact, est constant, alors il n'y a pas de pivotement ; si cet angle varie, le pivotement a lieu.

Par rapport à deux surfaces :

J'appelle *frottement direct* celui qui existe lorsqu'une courbe quelconque φ étant tracée sur l'une des surfaces, elle laisse sur l'autre surface, pendant son mouvement de rotation, une empreinte φ', telle qu'à chaque instant du mouvement, les courbes φ et φ' ont en leur point de contact même tangente ;

Et j'appelle *frottement angulaire*, celui qui a lieu lorsque les courbes φ et φ' ont au point qui leur est commun des tangentes différentes.

(*) J'ai fait publier ce petit mémoire en (juillet) 1827 ; on n'en tira qu'un très-petit nombre d'exemplaires. HACHETTE parle de ce mémoire dans une note placée à la fin du chapitre sur les *engrenages*, dans la 4e édition de son *Traité des machines*. T. O.

Exemples des divers frottements existants entre deux courbes.

1° Frottement de roulement direct et sans pivotement.

Je suppose deux cônes droits ayant même sommet; les cercles-bases, correspondant à une même longueur d'apothème, jouiront de cette espèce de frottement : en supposant que l'un des cônes restant fixe, l'autre prenne un mouvement de rotation, les deux sommets restant toujours confondus en un seul point.

2° Frottement de glissement direct et sans pivotement.

Je suppose deux cônes droits, en contact suivant une génératrice droite, mais n'ayant pas même sommet.

Deux cercles correspondants glisseront l'un sur l'autre, pendant que l'un des cônes restant fixe, l'autre cône aura un mouvement de rotation tel, que son sommet parcourra un cercle tracé sur le premier cône; les deux cônes étant par conséquent, à chaque instant du mouvement, en contact suivant une génératrice droite.

3° Frottement de roulement direct, avec pivotement.

Je suppose un cône droit C, ayant pour axe une ligne droite A.

Sur ce cône C je prends un cercle-base c.

Par l'axe A, je mène un plan P, sur lequel on trace un cercle α, ayant un rayon r, et ayant son centre au point d'intersection du cercle-base c et du plan P.

Le plan P, en tournant autour de l'axe A, entraînera le cercle α, qui dans son mouvement engendrera une surface annulaire γ.

Je suppose, ensuite, qu'il existe dans l'espace une surface quelconque δ (une sphère, par exemple), dont le centre ne sera pas situé sur l'axe A.

Je suppose, enfin, un second cône C', ayant pour axe une ligne droite A' coupant l'axe A; sur ce cône je trace un cercle-base c', ayant un rayon r égal à celui du cercle α, et cordant, sur le cône C', à la même longueur d'apothème que le cercle c situé sur le cône C.

Je mets les deux cônes C et C' en contact suivant une génératrice droite, leurs sommets se confondant.

Dans cette position, les deux courbes c et c' seront en contact par un point, et auront, en ce point, même tangente t.

Je fais tourner le cône C' autour de la tangente t, comme axe de rotation, jusqu'à ce que, l'axe A' s'appuyant toujours sur l'axe A, ce cône C' soit tangent à la fois aux deux surfaces γ et δ.

Puis supposant que le cône C reste fixe, et que le cône C' se meuve de manière à ce que son axe A' s'appuyant toujours sur l'axe A, il reste, à chaque instant du

mouvement tangent, à la fois aux deux surfaces γ et δ, les deux cercles c et c' rouleront en pivotant l'un sur l'autre.

4° Frottement de glissement direct, avec pivotement.

Ce frottement aurait lieu entre deux cercles c et c' qui, se trouvant d'ailleurs dans les mêmes circonstances que celles énoncées n° 3, ne correspondraient pas à une même longueur d'apothème.

5° Frottement de roulement angulaire, sans pivotement.

Deux hyperboloïdes à une nappe, de révolution et égaux, peuvent toujours être mis en contact suivant une génératrice droite G, en sorte qu'en chaque point de cette génératrice G, les deux surfaces auront même plan tangent.

Deux cercles tracés respectivement sur chacune de ces surfaces gauches, et ayant un point commun situé sur la génératrice de contact G, rouleront angulairement l'un sur l'autre, en supposant que l'un des hyperboloïdes reste en repos, et que l'autre se meuve, en se mettant en contact suivant les génératrices successives et du même système que G.

6° Frottement de glissement angulaire, et sans pivotement.

Je suppose un paraboloïde hyperbolique droit, ayant par conséquent ses deux plans directeurs perpendiculaires l'un à l'autre.

Je prends sur cette surface deux génératrices droites G′ et G″, quelconques, mais appartenant au même système.

Je suppose ensuite que la génératrice G, du même système que G′ et G″, et coupant à angle droit toutes les génératrices de l'autre système, tourne respectivement autour de G′ et de G″, ces deux droites étant considérées chacune comme un axe de révolution.

Cette génératrice engendrera deux hyperboloïdes à une nappe et de révolution, qui seront en contact suivant cette droite G.

Mais l'on doit observer, qu'en disant que G′ et G″ sont deux génératrices quelconques, je suppose qu'elles ne sont pas également distantes de la droite G.

Si, maintenant, je considère deux cercles ayant un point commun situé sur la génératrice G, ils glisseront angulairement l'un sur l'autre, en supposant toujours que l'un des hyperboloïdes restant fixe, l'autre se meuve en se mettant en contact suivant les génératrices successives.

7° Frottement de roulement angulaire et de pivotement.

Les deux hyperboloïdes du n° 5 étant donnés, je suppose que les courbes dont on veut examiner le frottement, soient les deux cercles de gorge.

Dès lors, l'un des hyperboloïdes restant fixe, je suppose que l'autre hyperboloïde prenant un mouvement de rotation, son axe, au lieu de décrire un troisième hyperboloïde à une nappe et de révolution autour de l'axe de la surface fixe,

prenne un mouvement de balancement, dont la loi sera déterminée par la condition suivante :

Supposant un conoïde engendré par une droite s'appuyant sur l'axe de l'hyperboloïde fixe et sur son cercle de gorge, l'axe de l'hyperboloïde en mouvement sera, pour chaque position de contact angulaire des deux cercles de gorge, perpendiculaire à la génératrice du conoïde, passant par le point commun à ces deux cercles.

8° Frottement de glissement angulaire, avec pivotement.

On suppose que les deux hyperboloïdes du n° 6 sont donnés, et que les cercles de gorge de ces deux surfaces ont un mouvement de rotation assujetti à la loi énoncée n° 7, dès lors ces deux cercles jouiront du frottement énoncé.

Exemples des diverses espèces de frottements qui peuvent exister entre deux surfaces.

1° Frottement de roulement direct.

Deux cônes droits ayant même sommet et étant en contact suivant une génératrice droite, roulent directement l'un sur l'autre.

2° Frottement de glissement direct.

Deux cônes droits n'ayant pas leurs sommets au même point, et étant d'ailleurs en contact suivant une génératrice droite, glissent directement l'un sur l'autre.

3° Frottement de roulement angulaire.

Les deux hyperboloïdes à une nappe et de révolution, décrits n° 5, roulent angulairement l'un sur l'autre.

4° Frottement de glissement angulaire.

Les deux hyperboloïdes à une nappe et de révolution, décrits n° 6, glissent angulairement l'un sur l'autre.

J'ai donné l'examen détaillé de ces diverses espèces de frottements, d'abord dans deux mémoires présentés à l'Académie royale des sciences de Stockholm, le premier ayant pour titre : *Nouvelles recherches sur les engrenages*, qui fut présenté au mois de septembre 1822, et approuvé par MM. Lagerhjelm et Svanberg, commissaires nommés par l'Académie;

Le second ayant pour titre : *Des relations qui doivent exister entre deux surfaces en contact suivant une ligne courbe ou droite, pour que le frottement soit de roulement ou de glissement*, qui fut présenté dans l'année 1823, approuvé par les mêmes commissaires, traduit en suédois, et imprimé dans les Actes de l'Académie pour l'année 1824;

Ensuite, dans deux mémoires présentés à l'Institut de France, l'un au mois de décembre 1825, ayant pour titre : *Recherches sur les engrenages cylindriques de*

White; et l'autre, au mois de février 1826, ayant pour titre : *Construction d'un engrenage hyperboloïdique, au moyen duquel l'on peut transmettre le mouvement de rotation entre deux axes qui ne sont pas situés dans un même plan.*

§ I.

Je me bornerai, dans cette note, à donner ce qui est rélatif au frottement de roulement direct entre deux surfaces (*).

Je suppose que l'on fasse mouvoir un plan tangent à une surface courbe quelconque M, de manière que les points de contact se trouvent sur une ligne de courbure *minimum d* de cette surface.

On formera alors une surface développable D, dont je désigne l'arête de rebroussement par δ.

Si j'opère de la même manière, par rapport à toutes les lignes de courbure *minimum* d, d', d'', etc., de la surface M, la série des arêtes de rébroussement δ, δ', δ'', etc., formera une surface courbe, dont les lignes de courbure seront les développées des lignes de courbure *minimum*, et les développantes des lignes de courbure *maximum* de la surface M; et cette surface, que je désigne par P, sera telle, que ses plans tangents seront normaux par rapport à la surface M, et que les plans tangents de la surface M seront normaux par rapport à la surface P; les deux surfaces M et P pourront être dites : *surfaces réciproques.*

Si, au lieu de considérer les lignes de courbure *minimum* de la surface M, j'avais employé ses lignes de courbure *maximum*, j'aurais formé une surface Q, dont les lignes de courbure auraient été, les unes développantes des lignes de courbure *minimum* de M, et les autres développées des lignes de courbure *maximum* de la même surface.

Et les plans tangents des surfaces Q et M auraient été réciproquement plans normaux de M et Q.

Si l'on opère ensuite par rapport à la surface P comme nous l'avons fait par rapport à la surface M, l'on obtiendra une nouvelle surface P'.

Et les surfaces P' et M seront, par rapport à P, ce que les surfaces P et Q sont par rapport à M.

De la surface Q l'on pourra déduire une surface Q', et ainsi de suite; de sorte que l'on formera la série de surfaces, etc..... P'', P', P, M, Q, Q', Q'', etc., les surfaces P et Q seront dites : *surfaces des centres de rotation* de la surface M, et l'on verra plus loin pourquoi je leur donne ce nom.

(*) Ce qui suit est extrait du mémoire publié en 1824 dans les Actes de l'Académie royale des sciences de Stockholm. T. O.

§ II.

Soit donnée une surface développable D, ayant pour arête de rebroussement une ligne à double courbure δ.

Je suppose un plan tangent T à la surface D, et passant par une génératrice g de la surface D, et la tangente t menée au point m de δ, point m en lequel cette courbe δ est coupée par la droite g.

Ce plan T contiendra le cercle osculateur de la courbe δ, au point m.

Je désigne par r le rayon de ce cercle au point m. Tous les rayons de courbure r forment une surface gauche. Perpendiculairement au plan T, et par le point m, je mène une droite h. Si en chaque point de la courbe δ je fais la même construction, la série des droites h formera une surface développable, dont l'arête de rebroussement ζ aura pour développante la courbe δ. La portion de la droite h comprise entre les deux courbes δ et ζ sera le rayon de flexion de la courbe δ pour le point m. Je désigne ce rayon par R.

Si je déroule la surface développable D sur le plan T, la courbe δ se transformera en une courbe γ, dont les rayons de courbure formeront la série des rayons r. Cette courbure γ est dite : *ligne de courbure simple* de l'arête de rebroussement δ.

On peut replier la surface D, planifiée, de manière à varier la loi des rayons de flexion R. Par conséquent, l'on peut former une série de surfaces développables D', D'', D''', etc., ayant pour arêtes de rebroussement des lignes δ', δ'', δ''', etc., qui auront toutes pour rayons de courbure la série des rayons r, mais qui auront chacune des rayons de flexion différents et formant des séries R', R'', etc. Il est évident, maintenant, que si l'on prend deux de ces surfaces développables D et D', qu'on les mette en contact suivant une génératrice droite, passant par un point m de la courbe δ et un point m' de la courbe δ', points tels que les rayons de courbure qui y correspondent soient égaux, supposant que la surface D reste fixe et que la surface D' prenne un mouvement de rotation, cette surface D' roulera sur D en se mettant en contact suivant les génératrices droites successives, et les deux arêtes de rebroussement δ et δ' auront toujours en leur point de contact, une tangente commune. On peut donc dire que deux surfaces développables, dont les arêtes de rebroussement ont même ligne de courbure simple γ, étant mises en contact convenablement, rouleront l'une sur l'autre, et le frottement sera celui que j'ai désigné par le nom de *frottement de roulement direct*.

§ III.

Sur la surface développable D, je suppose une des développées d de l'arête de rebroussement δ, et une génératrice droite G coupant la courbe d au point n, et tangente à la courbe δ au point m.

Je suppose un cône de révolution C, ayant son sommet au point m, et ayant pour base un cercle dont le rayon sera celui de courbure *maximum* de la surface D, lequel correspond au point n; le cône C et la surface développable D étant d'ailleurs en contact par la génératrice droite G.

On sait que d et G seront, l'une la ligne de courbure *maximum*, et l'autre la ligne de courbure *minimum* de la surface D.

Le cône C sera tangent à la surface D, suivant tous les points de la génératrice G, et en chaque point le contact sera du même ordre qu'en le point n, par conséquent tous les centres de courbure *maximum* correspondant à la droite G, seront sur la ligne qui joint : 1° le centre de la sphère osculatrice en le point n, et 2° le sommet m.

Si je mets en contact les surfaces développables D et D' par la génératrice droite G, et de manière à ce que le roulement ait lieu, l'on voit que les deux surfaces D et D' auront leurs rayons de courbure *maximum*, correspondants au même point de la génératrice de contact, dans un rapport constant.

De sorte que si le rayon de courbure *maximum* de la surface D est, au point n, représenté par v, et par u pour la surface D'; et que, pour un point quelconque n' de la génératrice droite G, le rayon de courbure *maximum* de la surface D soit v', et u' pour la surface D', l'on aura toujours : $\frac{v}{u} = \frac{v'}{u'}$. Et cette équation aura *toujours* lieu pour un point quelconque de deux génératrices droites se mettant en contact pendant le mouvement de rotation.

Les deux cônes qui auront même sommet m, et pour base, l'un le cercle osculateur de la surface D en n, et l'autre celui de la surface D' au même point, pourront être considérés comme pouvant rouler l'un sur l'autre dans le premier instant du mouvement, le sommet commun m pouvant être regardé comme centre de rotation.

C'est pourquoi je donne à l'arête de rebroussement d'une surface développable le nom de *ligne des centres de rotation de cette surface ;* et c'est aussi par la même raison que j'ai désigné la surface Q et la surface P par celui de *surfaces des centres de rotation de la surface* M.

§ IV.

Revenons à la surface M.

D'après ce qui précède, il sera facile de construire une surface courbe N, et l'on pourra en construire une infinité, telle qu'elle ait même ligne de courbure *maximum* que la surface M, ses lignes de courbure *minimum* étant ce que deviennent les lignes de courbure *minimum* de M, lorsque l'on transforme les surfaces déve-

loppables D en d'autres surfaces aussi développables D'; cette transformation étant soumise à cette loi, savoir : que les rayons de courbure *minimum* des surfaces N et M, qui correspondent à un même point de la ligne de contact, laquelle sera une ligne de courbure *maximum* des surfaces M et N, sont dans un rapport constant, quel que soit ce point.

Ainsi les lignes de courbure *maximum* de la surface M étant désignées par ξ, ξ', ξ'', etc.;

Et ses lignes de courbure *minimum*, par d, d', d'', etc.;

Les lignes de courbure *maximum* ou *minimum* de la surface N seront aussi ξ, ξ', ξ'', etc.;

Et ses lignes de courbure *minimum* ou *maximum* seront désignées par n, n', n'', etc.

Les surfaces M et N étant dans le premier instant en contact suivant la courbe ξ, par exemple;

Les rayons de courbure des courbes n, n', n'', etc., correspondant aux points où ces lignes coupent la courbe ξ, étant désignés par v, v', v'', etc.;

Les courbes n et d, n' et d', etc., seront chacune en contact par un point, et seront nommées lignes *homologues*.

Et les rayons de courbure des courbes d, d', d'', correspondant aux mêmes points, étant désignés par r, r', r'', etc., on devra avoir la proportion suivante :

$$v : r :: v' : r' :: v'' : r'', \text{ etc.};$$

Et cette proportion devra subsister par rapport à tous les points des autres courbes ξ', ξ'', etc.;

De sorte que, lorsque la proportion précédente subsistera, les deux surfaces M et N auront mêmes lignes de courbure dans un sens;

Et lorsque ces deux surfaces auront mêmes lignes de courbure dans un sens, cette proportion subsistera, excepté dans deux cas, où cette proportion pourra exister ou non; savoir : lorsque les deux surfaces auront pour mêmes lignes de courbure dans un sens des lignes droites, ou des lignes égales entre elles.

Ainsi, lorsque les deux surfaces seront développables ou seront de révolution, si l'on suppose que les surfaces M et N étant en contact suivant la courbe ξ, par exemple, M restant fixe, N prenne un mouvement de rotation, cette surface tendra à rouler sur M, en se mettant en contact suivant les lignes de courbure successives ξ', ξ'', ξ''', etc.; et l'on peut énoncer ce théorème général :

Si deux surfaces courbes ont mêmes lignes de courbure *minimum* ou *maximum*, lorsqu'on les mettra en contact suivant une de ces lignes, elles auront une *tendance* à se rouler par leurs lignes de courbure *maximum* ou *minimum*.

Et dans les deux cas particuliers énoncés ci-dessus, si la proportion entre les rayons de courbure subsiste, les deux surfaces tendront à rouler l'une sur l'autre; si elle ne subsiste pas, ces surfaces tendront à glisser l'une sur l'autre, et le frottement de roulement, ou de glissement qui aura lieu, est celui que j'ai désigné par le nom de *frottement*, de *roulement* ou de *glissement*, *direct*.

Les deux surfaces M et N étant dans les conditions établies ci-dessus, on pourra construire, par rapport à la surface N, deux surfaces X et Y qui seront les *analogues* des surfaces P et Q.

Lorsque les deux surfaces M et N se mettront en contact par leurs lignes de courbure du même genre, les surfaces P et X, Q et Y se mettront aussi en contact par des lignes de courbure d'un même genre;

Ainsi (par exemple), les surfaces M et N se *roulant* par leurs lignes de seconde courbure, les surfaces P et X, Q et Y, se *rouleront* aussi par leurs lignes de seconde courbure.

Mais dans les deux cas particuliers énoncés ci-dessus, lorsque les surfaces M et N glissent l'une sur l'autre, les surfaces P et X', Q et Y, ne sont point en contact; de sorte que l'on peut énoncer ce théorème :

Si deux surfaces M et N étant mises en contact suivant une ligne de courbure, les surfaces des centres de rotation sont en contact, les deux surfaces M et N tendront à rouler l'une sur l'autre;

Si les surfaces des centres de rotation ne sont point en contact, alors les deux surfaces M et N tendront à glisser l'une sur l'autre (*).

§ V.

Je suppose que sur la surface M, on trace une courbe arbitraire φ, la surface

---

(*) On doit faire remarquer, que lorsque l'on dit que les deux surfaces M et N *tendent à rouler* ou à glisser l'une sur l'autre, on n'entend pas dire qu'en effet, la surface M restant fixe, et la surface N prenant un mouvement, elle roulera ou glissera *effectivement* sur la surface M en se mettant en contact avec elle par ses lignes de courbure successives.

On entend dire : si certaines conditions, que nous n'avons point examinées lorsqu'il s'agit de surfaces générales (et non particulières) M et N, subsistent, les surfaces satisfaisant à ces conditions rouleront ou glisseront *effectivement* l'une sur l'autre, et le frottement sera direct ; si ces conditions ne subsistent pas, les surfaces M et N auront *seulement* une tendance à rouler ou à glisser directement l'une sur l'autre, quoique la surface N ne puisse *effectivement* changer de place une fois qu'elle est en contact avec la surface M. C'est ainsi que pour les surfaces particulières M et N, savoir : deux surfaces développables quelconques, ou deux cônes, ou deux cylindres, il est évident que le mouvement de la surface N sur la surface M peut *effectivement* avoir lieu, quoique nous ne déduisions pas cette possibilité de mouvement, de l'existence de certaines conditions générales, qui subsistent nécessairement dans ces cas particuliers.

T. O.

N, en roulant ou glissant sur M, recevra de φ une empreinte φ', telle que φ et φ' auront une tangente commune en chaque point de contact successif.

Il est évident que, pour chaque contact de ces courbes, les plans contenant leurs cercles osculateurs se confondront; de sorte que les courbes φ et φ' auront, pendant le mouvement de rotation des deux surfaces M et N, un frottement, de roulement ou de glissement, direct et sans pivotement.

Deux courbes telles que φ et φ', peuvent être nommées *lignes homologues*.

Ainsi, deux surfaces en contact suivant une ligne courbe ou droite ne peuvent pivoter l'une sur l'autre en prenant un mouvement de rotation, parce que leurs lignes homologues ne pivotent pas pendant la rotation.

Je suppose maintenant que perpendiculairement à la tangente commune aux courbes φ et φ', je fasse passer un plan B, dans lequel je trace deux courbes arbitraires α et α', mais tangentes l'une à l'autre et précisément au point de contact des courbes φ et φ', et ayant en ce point pour normale commune, l'intersection du plan tangent commun aux surfaces M et N, avec le plan B.

Faisant ensuite mouvoir les deux courbes α et α', la première sur la courbe φ, la deuxième sur la courbe φ', de manière que dans toutes les positions de contact de φ et φ', tout le système soit dans les conditions que je viens d'énoncer, j'obtiendrai deux surfaces-canal qui, pendant le mouvement de rotation de la surface N sur M, rouleront ou glisseront l'une sur l'autre, suivant que N roulera ou glissera sur M.

Je puis multiplier sur les surfaces N et M, le nombre des courbes telles que φ et φ', et former dès lors un engrenage composé d'autant de dents qu'il y aura de surfaces-canal.

§ VI.

Ce sont les considérations précédentes qui m'ont amené à envisager la théorie des engrenages, sous un point de vue tout nouveau.

Dans les arts mécaniques, il est important que l'on puisse engrener et désengrener avec promptitude et facilité. L'uniformité de mouvement est indispensable; et, pour la solidité, il est nécessaire que les surfaces dentées tournent autour d'axes fixes.

Ces diverses conditions seront remplies si l'on prend pour surfaces M et N des surfaces de révolution.

Et comme dans les surfaces de révolution, les lignes de première courbure sont les *méridiens*, et les lignes de deuxième courbure sont les *cercles* dont les plans sont perpendiculaires à l'axe, les deux surfaces M et N, pour pouvoir se

mettre en contact suivant une ligne de courbure, devront avoir leurs axes de révolution dans un même plan.

Si les axes se coupent, on pourra prendre pour les surfaces M et N deux cônes ayant leurs sommets au point d'intersection de ces axes;

Si les axes sont parallèles, on pourra prendre deux cylindres.

En opérant, par rapport à ces deux surfaces particulières, comme je l'ai fait ci-dessus pour les surfaces générales M et N, on obtiendra un engrenage à la White; et comme pour un cône, la surface des centres de rotation se réduit au sommet, et que pour un cylindre ce sommet est situé à l'infini, on pourra affirmer que le frottement des dents sera de roulement direct, et sans pivotement.

Et les lignes de courbure par lesquelles les deux cônes ou les deux cylindres se roulent, étant des cercles, il s'ensuit que les vitesses angulaires sont constantes.

On parvient donc, au moyen des considérations développées dans cette note, à démontrer rigoureusement que les engrenages coniques et cylindriques que le mécanicien White présenta à l'Institut pour le concours décennal de 1810, jouissent en effet de la propriété qu'il leur attribua, savoir : celle de satisfaire à la fois aux deux conditions : 1° de frottement de roulement; 2° de vitesse angulaire constante; conditions qui avaient été, jusqu'à lui, regardées comme ne pouvant avoir lieu, en même temps, dans un engrenage (*). Mais White, qui sentait bien que la matière agissait, ainsi qu'il l'annonçait, ne put le démontrer mathématiquement; et le mémoire qu'il publia en 1811, bien loin de présenter la question sous son véritable point de vue géométrique, ne servit qu'à confirmer les géomètres dans l'ancienne idée de l'incompatibilité des deux conditions.

Si, au lieu de prendre pour *courbe méridienne* des surfaces de révolution M et N une ligne droite, on trace sur le plan des axes une courbe arbitraire z; par son mouvement de rotation autour de chacun des axes, cette courbe z engendrera deux surfaces de révolution, sur lesquelles on pourra opérer comme sur les surfaces générales M et N.

Mais alors l'engrenage obtenu aura un frottement de glissement direct et sans pivotement, et les vitesses angulaires seront encore constantes. Le frottement sera de glissement, parce que la surface des centres de rotation pour une surface de révolution, n'est autre que l'axe de révolution, et que dans le cas que nous examinons, les deux surfaces des centres de rotation ne seront point en contact.

Les vitesses angulaires seront constantes, par la même raison qui fait que cette condition est remplie pour deux cônes ou deux cylindres.

(*) Voyez le mémoire publié par EULER.

La différence entre les engrenages dont je viens de donner une idée, et ceux ordinairement en usage, consiste en ce que, dans ceux-ci : 1° les dents sont en contact par une portion de surface cylindrique ou conique, suivant que l'engrenage est cylindrique ou conique, puisque l'on est obligé de donner aux dents une certaine épaisseur, pour qu'elles résistent ; 2° le point de contact des épycicloïdes planes ou sphériques qui terminent les dents, ne sort pas du plan qui contient ces courbes, pour l'engrenage cylindrique ou de la sphère sur laquelle ces courbes sont tracées pour l'engrenage conique, tandis que dans les engrenages à la White, les dents ne sont en contact que par un point, et ce point, pendant que l'engrenage fonctionne, se meut sur la courbe *s* tracée sur le plan des axes ; et il y a autant de dents en contact, en même temps, qu'il y a de surfaces-canal coupant la courbe méridienne.

N° 9.

DU TRACÉ ET DE L'EXÉCUTION DE L'ENGRENAGE DIT VIS-SANS-FIN (*).

§ I.

Dans la quatrième et dernière édition de son Traité des machines, HACHETTE dit au sujet de la vis-sans-fin :

« La vis-sans-fin est une roue dentée engrenée dans les pas d'une autre vis, à » laquelle elle imprime un mouvement de rotation (**). Si la vis est enveloppée autour d'un cylindre, il n'y a qu'une seule dent de la roue dentée qui soit engagée (***) ; mais on peut en engager plusieurs en traçant la vis sur une surface de révolution qui serait tangente à la circonférence du cercle passant par » le premier point de contact de chaque dent (****).

» La figure du filet de la vis-sans-fin et celle de la roue menée par cette vis

(*) Extrait du journal du génie civil, 3e vol., année 1829.

(**) Cette définition n'est pas très-claire ; la roue dentée par la vis ne peut être comparée à une vis. T. O.

(***) Ceci est inexact. Quand on taille une roue au moyen d'une vis cylindrique, plusieurs dents de la roue peuvent être en contact avec les filets de la vis ; le nombre des dents en contact dépend du rayon de la roue, de l'épaisseur et du *rampant* du filet de vis. T. O.

(****) HACHETTE désigne ici les engrenages *clepsydres*, dont il n'a pas parlé dans son ouvrage. T. O.

» pourraient donner lieu à une multitude de recherches analogues à celles qui
» concernent les roues dentées en général.

» La meilleure manière de tailler la roue dentée d'une vis-sans-fin consiste à
» faire la vis en acier, à la tremper, à donner à ses arêtes un bon tranchant, et à
» la faire agir sur la circonférence de la roue dentée (*).

» A mesure que le tranchant de la vis entraîne la circonférence de la roue, on
» les rapproche l'une de l'autre jusqu'à ce qu'elles se pénètrent de toute la pro-
» fondeur de la vis, et on continue à les faire mouvoir ainsi l'une sur l'autre,
» jusqu'à ce que la vis n'ait plus d'action sur les dents qu'elle a taillées (**).

D'après cet article, extrait en son entier de l'excellent ouvrage de *Hachette*, l'on voit que tout reste à faire au sujet de la vis-sans-fin, que l'on ne connaît point encore la nature géométrique de la surface des dents de la roue dentée; que l'on ignore comment s'opère le contact entre une dent de cette roue et le filet de la vis; quel est le lieu géométrique des contacts, et que l'on n'a point encore cherché quelle devait être la courbe génératrice et de la dent de la roue et du filet de la vis pour que les vitesses angulaires soient dans un rapport constant, condition qui doit nécessairement être remplie pour que les machines de précision dans lesquelles on emploie la vis-sans-fin, comme les machines à diviser, etc., soient exactes.

Je me propose dans ce mémoire de remplir la lacune qui existe encore dans le tracé des engrenages à frottement de glissement, en recherchant quelle doit être la construction géométrique de l'engrenage nommé *vis-sans-fin*, pour que le rapport des vitesses angulaires y soit constant, comme cela a lieu dans les autres engrenages *cylindriques* et *coniques*, dont les dents sont taillées suivant les formes géométriques décrites par Hachette dans son Traité des machines.

Dans le mémoire suivant (n° 10), j'examinerai l'engrenage dit *engrenage clepsydre*.

§ II.

Tracé de la vis-sans-fin.

Pour que l'engrenage dit vis-sans-fin satisfasse à la condition du *rapport constant entre les vitesses angulaires de la roue dentée et de la vis*, il faut (en n'oubliant

(*) La vis ainsi préparée ne pourrait entamer la matière de la roue à denter. Il faut transformer la vis, en *taraud*, en pratiquant des *encoches*, ou *sillons* équidistants sur la surface du filet, de manière à se procurer des *rabots* qui puissent entailler la roue à denter. T. O.

(**) Ceci est inexact. A mesure que l'on enfonce la vis-taraud, elle mort toujours; par un travail continu, on finirait par ronger toutes les dents formées, et en poursuivant le travail on reformerait la roue dentée, mais elle aurait une dent de moins que celle que l'on avait obtenue d'abord et dont on a successivement rongé toutes les dents par suite du taraudage soutenu. T. O.

point que dans cet engrenage l'axe de la vis et l'axe de la roue dentée sont rectangulaires entre eux) que la section faite par un plan passant par l'axe de la vis est perpendiculaire à l'axe de la roue dentée, offre le tracé qui convient à une crémaillère.

Pour pouvoir démontrer qu'en effet tel doit être la construction de la vis-sans-fin, et que l'idée, qui, je crois, n'a été présentée avant moi par aucun mécanicien, *de comparer la vis-sans-fin à un engrenage à crémaillère*, est exacte, je rappellerai d'abord le tracé : 1° des cames et 2° de la crémaillère, en répétant, textuellement et en son entier, ce que *Hachette* a dit dans son Traité des machines au sujet de ces deux engrenages.

§ III.

1° DES CAMES ET PILONS. (Extrait du Traité des machines de HACHETTE, 4ᵉ édition.)

« Les dents d'une roue cylindrique prennent le nom de *cames* lorsque cette » roue conduit le manche (*) d'un pilon ou d'un marteau, et lui imprime un » mouvement rectiligne ou circulaire, alternatif.

» La fig. 1 représente un pilon et son manche; ce manche est composé de deux » pièces de bois CDEF, ABGH, réunies par deux autres pièces (P et Q), qui lais» sent entre elles un espace vide ABCD.

» Étant donné un pilon de cette forme, il s'agit de lui imprimer un mouvement » rectiligne dans le sens de la droite RS, en le faisant glisser sur les faces verti» cales des pièces de bois horizontales LM, L'M'; soient (*fig.* 1) ce même pilon et » son manche vus de profil; un arbre *abcdef* porte les *cames* A, B, C, D, E, F.

» Lorsqu'il tourne, chacune de ces cames s'engage successivement dans l'inter» valle ABCD (*fig.* 1) du manche du pilon, et le soulève en pressant la face hori» zontale AB de la partie du manche ABGH. Chaque came est un solide terminé » par une surface cylindrique, qui a pour base la ligne *vxyz* (*fig.* 1). RS étant » la projection de la ligne milieu du manche du pilon, et T le centre de l'axe de » rotation de l'arbre *abcdef*, on abaisse du point T une perpendiculaire T*t* sur » RS. On décrit de ce même point T, comme centre, un cercle du rayon T*t*; en» fin, on développe une portion $\alpha\beta\gamma$ de ce cercle, ce qui s'exécute en déroulant » une corde ou un fil $\alpha\beta$ appliqué sur la circonférence $\alpha\beta\gamma$, et l'extrémité α de » cette corde décrit la portion de développante $\alpha\pi\varphi$.

» Chaque came telle que A est terminée par une courbe *vx* égale à la portion de

---

(*) On devrait dire le *mentonnet* d'un pilon, ou le manche d'un marteau. T. O.

» développante $\alpha\pi\varphi$, dont la grandeur dépend de la hauteur à laquelle on doit » élever le pilon. Pour la hauteur *tx* dont le pilon est soulevé, on développe » l'arc de cercle *tv* égal en longueur à la droite *tx*; la courbe *vx* est la seule par- » tie du contour de la came dont la forme soit déterminée. Le cercle décrit du » point T comme centre, avec T*x* pour rayon, coupe la développante indéfinie » $\alpha\pi\varphi$ au point φ, et la portion $\alpha\varphi$ est la développante de l'arc de cercle $\alpha\beta$, égal » en longueur à l'arc *tv*.

» Connaissant, par l'expérience, l'épaisseur qu'il convient de donner à la » came, on la termine par une droite *yz* qui concourt au point T, et l'on raccorde » la courbe *vx* et cette droite *yz* par une courbe quelconque *xy*, qui soulève » encore le pilon d'une petite hauteur, avant que la came soit dégagée du manche » du pilon; alors le pilon tombe par son propre poids. Lorsqu'il est arrivé au » point le plus bas de sa course, il est important que la came suivante F, déjà » engagée dans l'espace vide ABCD (*fig.* 1), se trouve près de l'extrémité de la » pièce de bois ABGH, afin d'éviter le choc de la came contre cette pièce de » bois. *tt'* (*fig.* 1) est la longueur de l'arc parcouru par le point *t'* autour du » point T, tandis que le pilon descend de toute la hauteur verticale dont il a été » élevé par la came A.

» Les hauteurs dont le point *t* de la ligne milieu du pilon s'élève sur la » verticale *tx*, seront de même longueur que les arcs décrits par le même point » *t* autour du centre de rotation T, et l'arête de contact de la came et de la face » AB (*fig.* 1) du manche du pilon sera constamment perpendiculaire à la droite » *tx* (*fig.* 1) (*). »

2° DE L'ENGRENAGE D'UNE ROUE ET D'UNE CRÉMAILLÈRE COMPRISES ENTRE DEUX PLANS PARALLÈLES (extrait du Traité des machines de HACHETTE, 4e édit.).

« La roue tourne autour d'un axe passant par son centre A (*fig.* 2); un plan » perpendiculaire à cet axe contient le cercle du rayon primitif AC de la roue;

(*) Le manche du marteau doit être terminé par une courbe particulière. HACHETTE a oublié d'en parler; il ne s'est occupé que des pilons.

Le marteau peut être soulevé de deux manières différentes : 1° la came frappe le manche du marteau et l'abaisse, comme dans les anciens *ordons*, ou 2° la came soulève un mentonnet placé à la tête du marteau comme dans l'*ordon* anglais. Dans l'un et l'autre cas le manche et le mentonnet doivent être terminés par une développante du cercle décrit de l'axe de rotation du marteau comme centre, et avec un rayon égal à la distance existant entre l'axe du marteau et l'axe de la roue à cames, diminuée d'une quantité plus grande que le rayon de cette dernière roue. On a dans ce cas un véritable engrenage cylindrique, composé de deux roues dentées, et dont les dents sont terminées par des développantes de cercle. T. O.

» la droite TCDED′, qui se meut en même temps que la crémaillère dont elle » est la ligne milieu, touche constamment le cercle du rayon AC au point C, » en sorte que la vitesse absolue du point C est la même, soit qu'on regarde ce » point comme fixé à la roue, ou comme fixé à la crémaillère. Cette droite » TCDED′ pouvant être considérée comme un cercle d'une roue dont le rayon » primitif est infini, l'engrenage d'une roue et d'une crémaillère est un cas » particulier du cas plus général où les deux roues ont des rayons primitifs de » dimensions finies.

» Faisant tourner le cercle du diamètre AC sur la droite TCED′, le point C du » cercle engendre, non pas un épicycloïde, comme dans le cas général des deux » roues, mais une cycloïde CM. On prend pour la demi-épaisseur d'une dent de » la crémaillère, une droite CN contenue un nombre entier de fois dans le cercle » du rayon AC ; une perpendiculaire NM à la droite CT détermine la grandeur » de l'arc CM de la cycloïde. La perpendiculaire M*s* au rayon AC rencontre la » circonférence du diamètre AC au point *s*, faisant AQ = A*s*, CQ est la grandeur » du flanc de la roue qui correspond à l'arc de cycloïde CM. Le creux de la dent » de cette roue est terminé par la courbe MZRQ que décrit le point M de la » crémaillère sur le plan du cercle dont le rayon est AC. On suit, pour construire » cette courbe, la méthode qui a été décrite (art. 54 du traité cité); on prend » l'arc CN′ du rayon AC, égal en longueur à la droite CN, épaisseur d'une demi- » dent de la crémaillère, et l'on tire le rayon AZN′. Les deux arcs N′Y et CN′ » étant égaux, on mène le rayon AY, et QRZX est le creux de la dent de la » roue ; CQXY sont les flancs des deux dents adjacentes à ce creux.

» Cette figure CQRZMXY a été transportée en DVGKE. Pour compléter la » dent de la roue, on considérera la ligne milieu D′T de la crémaillère comme » l'axe du pilon RS dans la figure précédente (*fig.* 1). La courbe D*d* (*fig.* 2), » développante du cercle du rayon AC, conduira la crémaillère de la même » manière que la came *vx* (*fig.* 1) conduit le pilon. Le point *d* (*fig.* 2) est l'inter- » section de la développante D*d* et d'un rayon A∂D, tel que l'arc D∂ est de même » longueur que la droite CN.

» La crémaillère porte des dents, et deux dents consécutives sont séparées par » un creux ; mais elle n'a point de flancs, ou autrement le flanc se réduit à une » ligne droite, comme on l'a déjà vu à l'article des cames et pilons. On aura » donc tout ce qui est relatif à l'engrenage d'une crémaillère et d'une roue, » lorsqu'on connaîtra la forme du creux qui sépare deux dents consécutives de la » crémaillère ; ce creux est terminé par deux branches de courbes égales à E′H′. » Cette branche de courbe est égale à celle qui est décrite d'un mouvement » relatif par l'extrémité M de la dent de la roue sur la crémaillère. On construit

» cette courbe d'après ce qui a été dit (art. 54 du traité déjà cité), et il suit de
» l'article (55) que le rayon AC touche à la fois la développante du cercle CM' et
» la cycloïde rallongée CR'Z'. »

Par ce qui suit je vais compléter ce que Hachette a dit sur l'engrenage à crémaillère.

§ IV.

Lorsque le pignon doit conduire la crémaillère, les mécaniciens donnent ordinairement aux dents de la crémaillère la forme d'un rectangle, et ils négligent la construction de la courbe du creux qui devrait séparer ses dents entre elles, ou mieux qui devrait exister entre deux dents consécutives.

L'engrenage à crémaillère s'exécute donc ordinairement ainsi qu'il est indiqué (*fig.* 3).

Le pignon tournant autour de son centre o, de x' en y', la crémaillère se meut en ligne droite de x en y.

Le lieu des points des contacts successifs de la dent RSM'Q'' de la crémaillère avec la dent $m'Bm''$ du pignon, est la droite ZZ' (*).

1. *De la manière dont le pignon et la crémaillère se conduisent.*

On doit remarquer (*fig.* 3) que le point de contact se mouvant de x en y sur la droite ZZ' tangente en C au cercle (o, C) (désignant le cercle par son rayon), qui est la développée des courbes qui terminent les dents du pignon, le côté droit Q'M' de la dent RSM'Q' de la crémaillère, conduira la développante de cercle m'B qui termine à gauche la dent du pignon qui suit immédiatement la dent de la crémaillère, jusqu'à ce que le point de contact M' soit arrivé en C.

Ensuite à partir de ce point, le mouvement continuant, le côté Q'M' cessera d'être en contact avec la courbe m'B. De sorte que les points des contacts successifs de Q'M' et de m'B seront distribués sur ZC et s'arrêteront en C.

Si l'on considère le côté gauche QR d'une dent de la crémaillère, il ne sera en contact avec la courbe m''B qui termine à droite la dent du pignon précédant immédiatement la dent de la crémaillère, que lorsqu'il sera arrivé en C; à partir

(*) Dans la pratique, on doit distinguer trois cas : 1° celui où le pignon conduit la crémaillère, et l'on emploie la construction que je viens d'indiquer; 2° celui où la crémaillère conduit le pignon ; alors les dents de la crémaillère sont terminées par des arcs de cycloïde et les dents du pignon sont terminées par des lignes droites qui tendent vers le centre de ce pignon ; et 3° celui où l'on veut que le pignon puisse alternativement conduire la crémaillère et être conduite par elle, alors on superpose les deux tracés précédents, et l'on a celui qui est indiqué par Hachette dans son Traité des machines. T. O.

de cette position la courbe m''B conduira le côté QR, et les points des contacts successifs de QR et de m''B seront distribués sur CZ' et à partir du point C.

Ainsi chaque dent QRMP de la crémaillère, cesse d'être en contact avec les deux dents B et b du pignon, entre lesquelles elle est engagée, pendant le temps que son extrémité MR emploie à passer sur le point C.

2. *Du nombre des dents en contact.*

Dans le tracé que je donne (*fig.* 3) l'on voit qu'il y a quatre dents en contact; deux dents de la crémaillère sont conduites par les développantes de droite des dents B et b du pignon, et les dents B' et b du pignon sont conduites par les arêtes de droite Q'M' et PM de deux autres dents de la crémaillère; en sorte que quatre dents de la crémaillère et trois dents du pignon se trouvent *en prise*.

On pourrait avoir un plus grand nombre de dents en contact ou *en prise*, en diminuant la largeur RM et l'intervalle QQ' des dents de la crémaillère; mais alors le nombre des dents du pignon augmentera, et par suite leur longueur *ou saillie bc* diminuera.

3. *Tracé de la crémaillère à dents triangulaires.*

Je ne sache pas que l'on ait encore cherché quel doit être le tracé géométrique d'une crémaillère lorsque ses dents sont triangulaires. C'est un cas d'autant plus intéressant à examiner, qu'il conduit en partie à ce qui est relatif à la *vis-sans-fin*, engrenage dans lequel la vis est ordinairement triangulaire.

Soit (*fig.* 4) une crémaillère dont les dents sont formées par des triangles isocèles égaux entre eux et au triangle VV V'', ces triangles ayant leurs bases juxtaposées sur une droite XX', et leurs sommets situés sur une droite ZZ' parallèle à XX' et à la direction du mouvement de translation que doit prendre la crémaillère.

Soit o le centre du pignon.

Du point o abaissons oa perpendiculairement à XX' et coupant ZZ' au point C.

Par le point C je mène CD perpendiculaire au côté droit V'V'' de la dent de la crémaillère.

Par le même point C je mène CD' perpendiculaire au côté gauche VV'' de la même dent de la crémaillère.

Du point o j'abaisse oP' perpendiculaire sur CD et oP perpendiculaire sur CD'.

Du point o comme centre et avec le rayon $o\text{P} = o\text{P}'$, je décris un cercle sur lequel je prends deux points fixes (arbitraires) S et S'.

Au point S' je fixe l'extrémité d'un fil enroulé sur l'arc S'P' et se dirigeant

ensuite sur la tangente P'D. Les points M', M, C de ce fil, décriront respectivement les développantes M'm', MH', Ch, lorsque l'on enroulera sa partie rectiligne P'D sur le cercle (oP).

Au point S je fixe l'extrémité d'un fil enroulé sur l'arc SP et se dirigeant ensuite suivant la tangente PD'. Les points N'', N', N, C, de ce fil décriront respectivement les développantes N''n'', N'n', Nh', CH, lorsque l'on enroulera sa partie rectiligne PD' sur le cercle (oP).

Ces diverses développantes, qui ont pour développée commune le cercle (oP), se couperont deux à deux aux points K^4, K''', K, K', K'', situés sur un cercle ayant *ob* pour rayon, et aux points C^4, C''', C, C'', situés sur un cercle ayant *o*C pour rayon.

En sorte que les dents du pignon devront être taillées suivant la forme indiquée par les hachures.

4. *De la manière dont se conduisent le pignon et la crémaillère à dents triangulaires.*

En supposant que le pignon tourne de *x'* en *y'*, la crémaillère se meut de *x* en *y* parallèlement à la droite ZZ', et l'on voit que :

1° Le côté droit V'V'' de la dent de la crémaillère ne commencera à conduire la courbe M'm' qui termine à gauche la dent du pignon qui suit immédiatement la dent de la crémaillère, que lorsque les points K'' et M' seront arrivés en δ'; le point de contact de ces dents parcourant à partir de δ' la droite DC et se mouvant dans la direction *uv*.

Lorsque le point de contact sera amené en C, le mouvement de rotation continuant, le côté V'V'' et la courbe M'm' cesseront d'être en contact.

2° Le côté gauche V'C' de la dent de la crémaillère ne se mettra en contact avec la courbe C''R'' qui termine à droite la dent du pignon précédant immédiatement la dent de la crémaillère, que lorsqu'il sera arrivé en la position V'''C.

A partir de cette position la courbe C''K'' conduira le côté V'C', et le point de contact de ces deux dents se mouvra sur la droite CD', dans la direction *u'v'* et à partir du point C.

Ainsi, pendant le mouvement, chaque dent V'C'V''', de la crémaillère, engagée entre deux dents K'' et K' du pignon, conduira jusqu'en C la dent K' qui la suit, et sera conduite à partir du point C par la dent K'' qui la précède.

5. *Du nombre des dents en contact.*

Dans le tracé que j'ai donné (*fig.* 4) l'on voit que trois dents de la crémaillère sont en contact (en prise) avec deux dents du pignon, les points de contact étant

en M, N et C; l'on voit en même temps que la dent V'''CV⁴ de la crémaillère est en contact au point C, en même temps, avec les deux dents K' et K du pignon;

En sorte que chaque dent de la crémaillère ne cesse pas d'être, pendant le mouvement, en contact avec l'une des dents du pignon.

Si je suppose que le point K'', extrémité de la dent du pignon, arrive en φ', point d'intersection de la droite CD et du cercle (*ob*), il y aura, dans cette position de la crémaillère, par rapport au pignon, autant de dents en contact qu'il y aura d'extrémités de dents du pignon situées sur l'arc φφ' et d'extrémités de dents de la crémaillère situées sur la droite ∂∂'; les points ∂ et ∂' étant les intersections de la droite ZZ' avec les droites φ'∂' et φ∂, qui sont respectivement parallèles aux côtés V'V'' et VV'' de la dent de la crémaillère.

On pourra augmenter le nombre des dents en contact (ou *en prise*) en diminuant la base VV' du triangle qui forme la dent de la crémaillère; mais alors le nombre des dents du pignon augmentera, et par suite la longueur ou *saillie* de ses dents diminuera.

6. *Observations sur les crémaillères à dents rectangulaires et à dents triangulaires.*

On doit observer :

1° Pour la crémaillère à dents rectangulaires, la dent du pignon glisse constamment sur le même point de la dent de la crémaillère avec laquelle elle se trouve en contact, tandis que pour la crémaillère à dents triangulaires, le point de contact change de position sur la dent de la crémaillère à mesure que ce point de contact parcourt la ligne brisée DCD';

2° De ce que les développantes de gauche des dents du pignon sont en contact avec les côtés de droite des dents de la crémaillère (que cette crémaillère ait des dents rectangulaires ou triangulaires) avant le rayon *oa* perpendiculaire à la direction de la crémaillère; et de ce que, en même temps, les développantes de gauche des dents du pignon sont en contact avec les côtés de gauche des dents de la crémaillère après ce même rayon *oa*; il s'ensuit que, si le pignon ayant tourné de droite à gauche vient à tourner de gauche à droite, il conduira la crémaillère, immédiatement et sans perte de temps, puisqu'il n'y a pas de *jeu* entre les dents du pignon et les dents de la crémaillère;

3° Dans l'engrenage à dents rectangulaires, le cercle primitif (*o*C) (*fig.* 3) est en même temps le cercle développé de toutes les développantes qui terminent les dents du pignon; mais dans l'engrenage à dents triangulaires, le cercle primitif (*o*C) (*fig.* 4) est différent (il est autre) du cercle développé des courbes

développantes qui terminent les dents du pignon, car ce dernier (le cercle développé) est le cercle (od).

Dans ce qui précède, je n'ai pas eu égard à l'épaisseur que l'on doit donner à la crémaillère et au pignon, épaisseur qui est déterminée par deux plans parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe de rotation du pignon (*).

En ayant égard à cette épaisseur, l'on voit sur-le-champ que les dents de la crémaillère peuvent être :

1° Des parallélipipèdes droits ou obliques;

2° Des prismes triangulaires droits ou obliques.

7. *Cas où les dents de la crémaillère sont des parallélipipèdes ou des prismes triangulaires droits.*

Dans le cas où les dents de la crémaillère sont des parallélipipèdes ou des prismes triangulaires droits, il est évident que la surface qui termine la dent du pignon se compose de deux cylindres dont les génératrices sont parallèles à l'axe du pignon, et dont les bases (ou sections droites) sont respectivement les développantes de droite et de gauche situées dans le plan du milieu du pignon et de la crémaillère.

En sorte que l'extrémité ou arête saillante de la dent du pignon est une droite parallèle à son axe, et qui n'est autre que la génératrice droite intersection des deux surfaces cylindriques (*fig.* 3 et 4).

8. *Cas où les dents de la crémaillère sont des parallélipipèdes ou des prismes triangulaires obliques.*

Dans le cas où les dents de la crémaillère sont des parallélipipèdes ou des prismes triangulaires obliques, la surface d'une dent du pignon se compose de deux surfaces développables dont je vais examiner la nature géométrique.

Si sur un cylindre (C) droit et à base circulaire on trace une hélice δ, on sait :

1° Que toutes les tangentes à l'hélice δ font avec l'axe du cylindre un même angle α et déterminent une surface développable Σ, nommée *hélicoïde développable*, et dont l'*arête de rebroussement* n'est autre que l'hélice δ;

2° Que tout cylindre à base circulaire, et ayant même axe A que le cylindre (C), coupe l'hélicoïde développable Σ suivant une hélice dont les tangentes font avec l'axe A un angle qui est égal à α;

(*) Les tracés donnés (*fig.* 3 et 4) sont supposés effectués dans le plan milieu de l'engrenage.

T. O.

3° Que tout plan perpendiculaire à l'axe A coupe l'hélicoïde développable Σ, suivant deux développantes égales et tournées en sens inverse, ayant le cercle base (ou section droite) du cylindre primitif (C) pour développée commune;

4° Que deux plans parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe A, coupent les deux nappes de l'hélicoïde développable Σ, suivant quatre développantes égales et tournées deux à deux en sens inverse, et que les parties des tangentes de l'hélice δ, interceptées entre ces deux plans, sont toutes égales entre elles;

5° Que les nappes qui se tournent l'une à l'autre leur concavité, et qui appartiennent à deux hélicoïdes développables Σ et Σ' ayant pour arêtes de rebroussement respectives deux hélices δ et δ' parallèles entre elles et tracées sur un même cylindre primitif (C), se coupent suivant une hélice Φ située sur un cylindre primitif (C') ayant même axe A que le cylindre (C), et dont les tangentes font avec cet axe A le même angle α que font avec ce même axe A les hélices δ et δ'.

Cela posé :

Examinons le cas où les dents de la crémaillère sont des *parallélipipèdes obliques*.

Pendant le mouvement de rotation, le plan de l'une des faces obliques de la dent de la crémaillère se meut tangentiellement à la développante de droite ou de gauche de la dent du pignon, en faisant constamment avec l'axe de ce pignon un angle constant qui est le complément de l'angle 6 qui mesure l'inclinaison de cette face oblique sur le plan milieu du tracé (*fig.* 3).

La surface de la dent du pignon sera donc composée de deux surfaces développables qui seront les *enveloppes* de l'espace parcouru par les plans de l'une et l'autre face oblique de la dent de la crémaillère.

D'après ce qui précède il est donc évident :

1° Que la surface de la dent du pignon se compose de deux nappes se tournant leur concavité et appartenant à deux hélicoïdes développables ayant pour arêtes de rebroussement respectives deux hélices tracées sur le cylindre droit ayant pour base (ou section droite) le cercle (oC) (*fig.* 3), et ayant pour axe celui du pignon.

2° Que les tangentes à ces deux hélices font avec l'axe du pignon un angle qui est égal à celui que l'une des faces obliques du parallélipipède fait avec cet axe.

3° Que les deux hélices sont parallèles entre elles et interceptent sur les génératrices du cylindre (oC), des parties égales entre elles et à la distance verticale $h'h''$ (*fig.* 5) qui existe entre les plans des faces obliques $k'b''$ et MM' qui déterminent le creux existant entre deux dents consécutives de la crémaillère.

4° Que l'extrémité (ou arête saillante) de la dent du pignon est une hélice dont les tangentes font avec l'axe de ce pignon un angle égal au complément de l'angle 6.

9. *Cas où les dents de la crémaillère sont des prismes triangulaires obliques.*

Tout ce que je viens de dire sur la forme des dents du pignon conduisant une crémaillère dont les dents sont des parallélipipèdes obliques, s'applique *mot à mot* à la forme des dents du pignon qui doit conduire une crémaillère dont les dents sont des prismes triangulaires obliques; seulement l'on doit faire observer que dans ce dernier cas les deux hélices parallèles entre elles, et qui sont les arêtes de rebroussement des deux hélicoïdes développables qui terminent la dent du pignon, interceptent sur les génératrices du cylindre primitif (*od*) (*fig.* 4) des parties égales entre elles et à la distance verticale existant entre les droites, qui sont les intersections du plan tangent au cylindre primitif (*od*) suivant la génératrice (*d*) et des deux faces obliques (C'V''') et (CV''') qui déterminent le creux de deux dents consécutives de la crémaillère.

10. *Du lieu des contacts des dents du pignon et de la crémaillère.*

Le contact entre deux dents du pignon et de la crémaillère, se fera suivant une génératrice droite de la surface développable, *cylindre* ou *hélicoïde*, qui termine la dent du pignon; la face de la dent de la crémaillère étant un plan tangent à cette surface développable.

Pour la crémaillère à dents *parallélipipèdes droits ou obliques*, la droite de contact se meut dans un plan parallèle à l'axe du pignon et passant par la droite ZZ' (*fig.* 3). Cette droite de contact est toujours la même sur la face plane de la dent de la crémaillère, en sorte que le frottement s'exerce toujours aux mêmes points sur la face de la dent de la crémaillère.

Pour la crémaillère à dents *prismes triangulaires droits ou obliques*, la dent de contact se meut dans deux plans parallèles à l'axe du pignon, et passant, l'un par la droite DCP', et l'autre par la droite D'CP (*fig.* 4). La droite de contact change de place sur la face plane de la dent de la crémaillère, en sorte que le frottement ne s'exerce pas aux mêmes points sur cette face de la dent de la crémaillère.

11. *Tracé de la projection horizontale du pignon.*

D'après ce qui précède il est facile de tracer la projection horizontale du pignon dont les dents sont terminées par des surfaces hélicoïdes développables.

En effet : ayant tracé les fig. 3 et 4, il suffira de supposer que ces figures tournent respectivement autour du centre *o* d'un angle tel que l'arc *a*A (*fig.* 5) soit

égal à la projection de la partie (interceptée entre les deux plans parallèles déterminant l'épaisseur du pignon) de l'hélice tracée sur le cylindre primitif, et dont les tangentes font avec l'axe du pignon un angle égal au complément de l'angle 6.

Ainsi dans la fig. 5 qui représente la projection horizontale du pignon et de la crémaillère dans le cas où les dents sont des parallélipipèdes obliques, l'arc *a*A étant rectifié est égal à la droite *e*E projection horizontale de l'arête MM' de la dent de la crémaillère (*).

§ V.

Des moyens mécaniques qui peuvent être employés pour tailler les dents du pignon.

I. PREMIER PROCÉDÉ.

Je suppose (*fig.* 6) que la rondelle R, qui doit être taillée, est horizontale, et tourne librement autour d'un axe fixe et vertical (*a*).

Le rayon *ad* de cette rondelle sera égal au rayon *ao* des fig. 3 et 4.

Sur le plan supérieur de la rondelle R, on décrira un cercle concentrique au cercle (*ad*), et ayant pour rayon une ligne *ab* égale en longueur au rayon *o*C des fig. 3 et 4.

Ensuite on fixera au moyen de deux vis *m* et *m'* sur le plan supérieur de la rondelle R, un limbe G tournant avec cette rondelle R autour de l'axe (*a*) et terminé par une surface cylindrique verticale ayant pour base (ou section droite) un cercle du rayon *ab*.

Aux deux points *n* et *n'* de ce limbe, ou fixera deux chaînettes s'enroulant, l'une *h* à gauche et l'autre *h'* à droite, sur le cylindre vertical (*ab*).

(*) Dans les fig. 3 et 4 nous avons donné des tracés géométriques qui peuvent être dits : tracés théoriques. Dans la pratique, les dents du pignon ne pourraient pas être terminées ainsi par une pointe, laquelle ne résisterait pas aux efforts; mais le tracé théorique étant exécuté, rien n'empêche de tronquer la pointe et de donner par ce moyen une certaine épaisseur à la dent du pignon, épaisseur qui devra être calculée en vertu de la résistance des matériaux et de l'effort que la dent aura à exercer lorsqu'elle sera arrivée en la position où elle devra agir par son extrémité sur la dent de la crémaillère.

Nous n'avons pas donné de *jeu* aux dents de l'engrenage ; on pourra obtenir ce *jeu*, s'il est nécessaire, de deux manières différentes, et sans rien changer au tracé : 1° en éloignant la crémaillère du pignon; 2° en diminuant l'épaisseur des dents du pignon, ou l'épaisseur des dents de la crémaillère.

Dans les tracés donnés (fig. 3 et 4), il est évident que l'on a un engrenage à développantes et qui doit jouir des mêmes avantages que les engrenages cylindriques extérieurs à développantes, et ainsi l'éloignement des axes pour donner le jeu nécessaire, ou le rapprochement des axes lorsque le jeu est devenu trop considérable par l'usure des dents, sont chose possible sans modifier les propriétés de l'engrenage, sans donc altérer le rapport constant entre les vitesses des axes. T. O.

Ces deux chaînettes seront horizontales, l'une au-dessous de l'autre et dans un plan tangent au cylindre (ab).

La chaînette h passera sur deux poulies de renvoi B et B′, et viendra s'attacher par son extrémité q à l'équipage X.

La chaînette h' passera aussi sur deux poulies de renvoi B″ et B‴, et viendra s'attacher par son extrémité q' au même équipage X.

1. *De l'équipage* X.

Cet équipage (*fig.* 6 et 7, 8 et 9) se compose d'une règle horizontale D′, glissant dans une rainure k; la direction de son mouvement de translation étant parallèle au plan tangent qui contient les chaînettes h et h'; ensuite, de deux supports D et D′ auxquels sont fixées les extrémités q et q' des deux chaînettes, et ces supports portent en même temps les paliers l et l' sur lesquels tourneront les axes coniques d'une scie circulaire E, laquelle sera mise en mouvement au moyen d'un archet H, ou d'un rouet.

A l'une des extrémités de l'un des supports sera fixée une vis v, tournant dans un écrou fixe L. L'axe de cette vis v sera parallèle au mouvement de translation de la règle D′.

2. *Jeu de la machine.*

En faisant tourner la vis v au moyen des bras I, la règle D′ s'avancera dans la direction yy', et les chaînettes forceront la rondelle R à tourner dans le sens zz'; de telle sorte que la chaînette h se sera enroulée et la chaînette h' se sera déroulée d'un arc égal en longueur à l'avancement rectiligne de la règle D′.

Pendant que l'on fera tourner lentement la vis v dans son écrou fixe L, la scie circulaire E recevra un mouvement de rotation continue au moyen du rouet, ou un mouvement de rotation alternatif au moyen de l'archet, et cette scie découpera la rondelle R.

Les croquis (*fig.* 6 et 7) donnent, je pense, une idée suffisante du mécanisme à exécuter.

3. *De la scie circulaire* E.

Si la scie E était une simple plaque, après avoir entaillé la rondelle R jusqu'à une certaine profondeur, elle serait forcée de se plier (de se déformer, de se gauchir), lorsqu'on continuerait à faire avancer la règle D′, pour pouvoir achever le travail.

Pour obvier à cet inconvénient l'on donnera à la scie E une forme particulière.

qui dépendra de la nature géométrique de la dent de la crémaillère ; ainsi : ou la forme indiquée (*fig.* 10), si le pignon doit conduire une crémaillère à dents *prismes-triangulaires*, ou la forme indiquée (*fig.* 11), si le pignon doit conduire une crémaillère à dents *parallélipipèdes*.

4. *Du découpoir* E′.

La scie ou découpoir E′ (*fig.* 10) est composée de plusieurs plaques circulaires, toutes d'épaisseur égale et séparées les unes des autres par des plaques non dentées ayant même épaisseur, mais ayant des rayons moindres.

Ce système forme un tronc conique dont l'arête $m'r$ sera égale à bd (*fig.* 6).

L'angle β, complément de celui que l'axe du tronc conique fait avec une de ses arêtes, sera égal à la moitié de l'angle V′C′V‴ (*fig.* 4) qui forme l'extrémité de la dent triangulaire de la crémaillère.

5. *Du découpoir* E″.

La scie ou découpoir E″ (*fig.* 11) est aussi formée de plusieurs plaques dentelées à la circonférence et alternativement séparées par des rondelles ou plaques non dentelées et d'un diamètre moindre.

Le système forme un cylindre ($mm'nn'$) accolé à un tronc de cône ($rr'mm'$).

L'arête nm du cylindre sera égale à la tangente trigonométrique du demi-angle $\widehat{m''om}$ construite dans le cercle dont le rayon $= oC$ (*fig.* 3), et l'arête mr du tronc conique sera égale à bd (*fig.* 6), ou, ce qui est la même chose, on aura mr égale à aC (*fig.* 3).

L'angle β', complément de celui que l'axe du tronc conique fait avec l'une de ses génératrices droites, sera égal à la moitié de l'angle $\widehat{m''om}$ (*fig.* 3) mesuré dans le cercle oC par l'arc mm'', dont la rectification égale en longueur l'épaisseur MR de la crémaillère.

6. *Travail des découpoirs* E′ *et* E″.

L'axe de la scie étant horizontale, son plan peut être, ou 1° perpendiculaire au plan tangent qui contient les chaînettes et à l'axe de la vis v, ou 2° oblique à l'axe de la vis v, et ainsi oblique par rapport à la direction du mouvement de l'équipage X.

Dans le premier cas, la scie ou découpoir E″ (*fig.* 11) découpera la rondelle R suivant un cylindre vertical ayant pour base une courbe développante du cercle

(*ab*) (*fig.* 6), et qui sera apte à conduire la crémaillère à dents *parallélipipèdes droits.*

Dans le deuxième cas, l'axe de la scie étant toujours horizontal et faisant avec l'axe de la vis *v* un angle égal à celui que le côté V′V″ (*fig.* 4) de la dent triangulaire de la crémaillère fait avec la ligne ZZ′, la scie ou découpoir E′ (*fig.* 10) découpera la rondelle R suivant un cylindre vertical ayant pour base une développante, lequel sera apte à conduire la crémaillère à dents *prismes triangulaires droits.*

Ainsi les supports D, D, devront être disposés, dans le premier cas, de manière à ce que les paliers *l*, *l′*, soient verticaux et perpendiculaires à l'axe de la vis *v*; et, dans le deuxième cas, de manière à ce que les paliers *l* et *l′* soient encore verticaux, mais faisant avec l'axe de la vis *v* un angle égal à celui que le côté V′V″ (*fig.* 4) fait avec la ligne ZZ′.

Pour exécuter la surface *hélicoïde* développable qui termine la dent du pignon, lorsque les dents de la crémaillère sont des *parallélipipèdes obliques*, l'on prendra le découpoir E″ (*fig.* 11). On placera son axe conique dans un plan vertical passant par l'axe de la vis *v*, et en inclinant le plan de la première scie circulaire *nn′* de manière à ce que l'angle qu'il fera avec le plan horizontal soit égal à l'angle 6 (*fig.* 5) qui mesure l'inclinaison de la face oblique de la dent de la crémaillère.

Dès lors les paliers *l* et *l′* devront être parallèles au plan de la première scie circulaire *nn′*.

Lorsque les dents de la crémaillère sont des *prismes triangulaires obliques*, l'on prendra le découpoir E′ (*fig.* 10), on placera le plan de la première plaque dentelée *mm′*, de manière à ce que sa position, par rapport à l'axe de la vis *v*, soit absolument la même que celle de la face oblique de la dent prisme triangulaire de la crémaillère par rapport à la ligne horizontale ZZ′ (*fig.* 4).

Dès lors les paliers *l* et *l′* devront être parallèles au plan de la première scie circulaire *mm′*.

Les fig. 8 et 9 représentent les croquis du plan et de l'élévation de l'équipage X pour le deuxième cas.

La fig. 12 représente diverses époques du travail effectué par le découpoir E″, dans le cas où le pignon doit conduire une crémaillère à dents *parallélipipèdes droits.* Dans cette figure on a supposé que l'extrémité *n″* du découpoir E″ (*fig.* 10) étant d'abord en contact avec la rondelle (à découper) au point *m*, la machine étant ensuite mise en mouvement, le découpoir soit arrivé d'abord en la position *bam*P; ensuite en la position *b′a′m′*P′; enfin en la position extrême *b″a″m″*P″.

En sorte que les parties successivement rongées par le découpoir pendant le

travail, seront, d'abord : le polygone $Myam$, ensuite le polygone $yy'a'mm'a$, enfin le polygone $y'b''a''m''m'a'$.

Ainsi l'on aura, par ce moyen, découpé le cylindre droit Mm'' qui termine la partie de gauche de la dent du pignon, en obtenant dans la rondelle une entaille de la forme $b''a''m''M$.

L'on opérera de même pour chacune des dents du pignon ; ensuite pour exécuter le cylindre droit qui termine la partie de droite de chaque dent du pignon, l'on retournera la rondelle, plaçant son plan supérieur en dessous et *vice versa*. De sorte que la courbe AA' à tailler, se mettra à la place de la courbe taillée mM et *vice versa*.

Le travail fini, le creux qui doit séparer deux dents adjacentes aura la forme $A'Aa''m''M$.

Il ne restera plus qu'à enlever le petit solide ayant pour base le triangle $Aa''m''B$, et formé : 1° par deux cylindres concaves ayant leurs génératrices droites parallèles, pour l'un à la droite $m''a''$, pour l'autre à la droite $a''A$, et ayant pour section droite un cercle égal à celui de la scie circulaire; 2° par un cylindre vertical ayant pour base l'arc de cercle ABa''.

Le travail des découpoirs E' et E'', que la surface de la dent du pignon soit un cylindre ou une surface hélicoïde développable, s'effectuera dans tous les cas d'une manière analogue à celle que j'ai représentée par la fig. 12.

II. DEUXIÈME PROCÉDÉ.

La rondelle R et l'équipage X étant disposés comme dans le *premier procédé*, si l'on ne veut employer, pour tailler la surface développable de la dent du pignon, qu'une seule plaque dentée à sa circonférence (une seule scie circulaire), il faudra que cette plaque ait un mouvement propre qui lui permette de s'avancer ou de s'éloigner à volonté de la rondelle, quelle que soit d'ailleurs la position de l'équipage X dans la rainure qui dirige son mouvement de translation; et la plaque dentée devra se mouvoir parallèlement à son plan.

Ainsi, ayant mis la vis v en mouvement, la rondelle R ayant tourné autour de son axe en vertu du mouvement imprimé par la vis v aux deux chaînettes, l'on fixera la rondelle R et l'équipage X dans une position telle que la plaque dentée étant avancée parallèlement à son plan (parallèlement à elle même), touche par un point de sa circonférence la rondelle R au point a, qui sera le premier point de la développante (*fig.* 13).

A mesure que la plaque tournera sur son axe, on la fera avancer contre la

rondelle, de manière à ce que par son travail elle tracera un plan tangent à la surface hélicoïdale de la dent du pignon, face tangente qui sera dirigée suivant *ab*.

Ensuite l'on retirera la plaque, on mettra la vis *v* en mouvement et l'on passera à une nouvelle position telle qu'en avançant la plaque elle se mette en contact, par sa circonférence, au point 1 de la rondelle R.

Fixant en leurs positions et l'équipage X et la rondelle R, l'on fera mouvoir la plaque en s'avançant au fur et à mesure de son travail contre la rondelle, et dès lors elle tracera un nouveau plan tangent à la surface hélicoïdale de la dent, et qui sera dirigé suivant $1b$, et ainsi de suite. De sorte que par ce procédé l'on enlèvera successivement les solives $1a'a$, $1a''2$, $2a'''3$, $3a^4 4$, et l'on aura construit un polyèdre $(aa'a''a'''a^4)$ circonscrit à la surface hélicoïdale de la dent du pignon.

Pour ronger les arêtes de ce polyèdre, arêtes qui sont les intersections de deux plans tangents ou faces tangentes adjacentes, l'on substituera à la plaque dentelée à sa circonférence sous forme de scie, une plaque dont la surface sera taillée en forme de lime ou de râpe, et en faisant mouvoir la vis *v* alternativement de gauche à droite et de droite à gauche, la plaque achèvera la surface hélicoïdale de la dent du pignon.

III. TROISIÈME PROCÉDÉ.

On peut trouver la projection horizontale du pignon sur un plan perpendiculaire à son axe; la surface hélicoïdale Δ, qui termine la dent de ce pignon, est engendrée par des droites qui ne sont autres que les tangentes à l'hélice ∂, qui est l'arête de rebroussement de cette surface hélicoïdale Δ; toutes ces droites, génératrices de cette surface développable Δ, se projetteront donc horizontalement suivant des tangentes au cercle qui se trouve la projection horizontale de l'hélice ∂. D'après cela, il sera facile de tracer sur *l'épure* les projections de ces diverses tangentes (fig. 13 *bis*), lesquelles couperont les développantes B et B', suivant lesquelles les plans inférieur et supérieur du pignon coupent la surface Δ, en des points homologues 1 et 1', 2 et 2', 3 et 3', etc. Dès lors, en traçant sur le relief, les courbes B et B', et marquant les points 1, 2, 3, etc., sur la courbe B et les points 1', 2', 3', etc. sur la courbe B', l'on pourra, au moyen d'un *ciseau* ou d'un *rabot*, tracer les droites $\overline{11'}$, $\overline{22'}$, $\overline{33'}$, etc., et former ainsi, par ses génératrices successives, la surface développable Δ.

§ VI.

De la vis-sans-fin.

Revenons maintenant à l'engrenage dit **vis-sans-fin.**

On sait que la surface, soit supérieure, soit inférieure du filet d'une vis, est engendrée par une droite qui se meut : 1° sur une hélice tracée sur un cylindre ayant pour section droite un cercle, et 2° sur l'axe de ce cylindre de révolution, en faisant avec cet axe un angle constant.

L'on donne à cette surface le nom d'*hélicoïde gauche.*

Dans la vis à filet carré, la génératrice droite de l'hélicoïde gauche est perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Dans la vis à filet triangulaire, cette génératrice fait avec l'axe un angle d'autant moins obtus que l'angle au sommet du triangle générateur du filet est plus aigu ; ou, en d'autres termes, que le filet de la vis est plus mince et plus effilé.

En sorte que si l'on fait passer par l'axe de la vis un plan méridien, la section offrira, pour la vis à filet carré, le disposition indiquée (*fig.* 15), et pour la vis à filet triangulaire, celle indiquée (*fig.* 16).

Supposons que ce plan méridien soit fixe et imprimons à la vis un mouvement de rotation autour de son axe. Les sections successives faites dans la vis par ce plan méridien se superposeront aux positions successives que prendra la section primitive, en lui supposant un mouvement de translation suivant l'axe de la vis, ce mouvement de translation s'opérant dans le plan méridien et étant proportionnel à la vitesse angulaire de la vis.

En sorte que la section que l'on obtiendra dans la vis, en supposant qu'elle ait fait un tour entier autour de son axe, se superposera à la position qu'affectera la section primitive, en supposant qu'elle se soit mue, le long de l'axe, d'une longueur égale au *pas* de la vis.

On peut donc dire que la section de la vis se comportera comme une crémaillère dont les dents seraient précisément les diverses sections du filet de la vis par le plan méridien fixe.

Par conséquent, si par l'axe de la vis on fait passer un plan perpendiculaire à l'axe du pignon (plan que je nommerai *plan-milieu*), ce plan devra couper les dents de la roue dentée (ou pignon) et le filet de la vis, suivant une section donnant la figure 3, si la vis est carrée, ou la figure 4, si la vis est triangulaire.

La section faite dans la dent de la roue dentée par le *plan-milieu*, sera donc, dans les deux cas, une développante de cercle.

Cherchons maintenant quelle sera, sur le filet de la vis, la courbe, lieu de ses contacts successifs avec la développante.

1. *Vis à filet carré.*

Puisque (*fig.* 3) le point M′ est le seul de ceux de l'arête Q′M′ qui se mette successivement en contact avec la développante Bm'; de ce que ce point de contact parcourt la droite ZZ′ pendant le mouvement simultané, et de translation de la crémaillère et de rotation du pignon, il s'ensuit que le *lieu* des points du filet de la vis qui se mettent successivement en contact avec la développante Bm', sera l'hélice cylindrique décrite par le point M′ autour de l'axe de la vis, en d'autres termes, sera l'arête saillante du filet de la vis carrée.

2. *Vis à filet triangulaire.*

Puisque (*fig.* 4), 1°, le point de contact du côté V′V″ et de la développante M′m' parcourt la droite DP′, pendant le mouvement simultané, et de translation de la crémaillère et de rotation du pignon;

Puisque, 2°, ce point de contact est successivement sur le côté V′V″, en les diverses positions V′V″, V‴C′, V^4C, que ce côté prend successivement pendant le mouvement, d'abord en M′, ensuite en M, enfin en C;

Puisque, 3°, les longueurs V′M′, V‴M, V^4C, sont entre elles comme les espaces YV′, YV‴, YV^4, parcourus par le côté V′V″ le long d'une droite parallèle à l'axe de la vis et que ces espaces sont entre eux comme les espaces angulaires parcourus dans le même temps par un point de la vis autour de son axe;

Il s'ensuit que :

Le *lieu* de points du filet de la vis triangulaire, qui se mettent successivement en contact avec la développante Mm' pendant le mouvement de l'engrenage, est une courbe à double courbure qui a pour projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, une *spirale d'Archimède*.

Nous pourrons donner à cette courbe le nom de *spirale hélicoïdale gauche*. Ainsi, dans la figure 14, le cercle développé de la développante a pour rayon la longueur o'''A; la droite oA est celle qui doit être parcourue par le point de contact du filet de la vis triangulaire et de la développante; la courbe φ' est la projection horizontale, ou sur le *plan-milieu*, et la spirale d'Archimède φ'' est la projection verticale, ou sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, de la *spirale hélicoïdale gauche*, lieu des points de contact du filet de la vis triangulaire; la courbe φ est, dans cette *épure*, la *sinusoïde* projection horizontale, ou sur le *plan-milieu*,

de l'hélice cylindrique parcourue par le sommet du triangle générateur du filet de la vis triangulaire, en d'autres termes, la sinusoïde φ est la projection de l'arête saillante (ou tranchante) du filet de la vis triangulaire.

§ VII.

Connaissant la courbe qui unit sur le filet de la vis (carrée ou triangulaire) les divers points de ses contacts successifs avec la développante, il sera facile de déterminer la nature géométrique de la surface de révolution que cette courbe des contacts doit engendrer autour de l'axe de la vis, pendant le mouvement de l'engrenage, en d'autres termes pendant le temps que le filet de la vis conduira ou sera conduit par le pignon au moyen de la développante qui termine la dent de ce pignon.

1. *Pour la vis à filet carré.*

La courbe-lieu des points des contacts successifs du filet et de la développante (ces points étant considérés en tant que situés sur le filet de la vis) n'est autre que l'hélice cylindrique qui forme l'arête saillante de ce filet de vis ; et le point de contact du filet et de la développante ne sort pas du *plan-milieu*, et parcourt sur ce plan la droite ZZ′ parallèle à l'axe de la vis (*fig.* 3).

D'après cela, il est évident que la surface de révolution engendrée par cette hélice cylindrique, pendant le temps que le filet conduira la développante, n'est autre que la surface cylindrique sur laquelle cette hélice cylindrique peut être tracée.

2. *Pour la vis triangulaire.*

Nous avons vu précédemment que la courbe qui unit les points du filet de la vis triangulaire qui se mettent successivement en contact avec la développante, est une *spirale hélicoïdale gauche* dont les projections sont (*fig.* 14) sur le *plan-milieu* la courbe φ', et sur le plan perpendiculaire à l'axe de la vis la *spirale d'Archimède* φ''.

On se rappelle aussi que le point de contact du filet de la vis et de la développante ne sort pas du *plan-milieu*, pendant tout le temps que la vis conduit la développante qui termine la dent du pignon, et qu'il parcourt la droite *o*A (*fig.* 14), qui est la même que celle DP′ (*fig.* 4).

Cela posé, je suppose :

1° Que la *spirale hélicoïdale gauche* coupe l'axe S*oo*″ de la vis au point *o*, qui est celui en lequel la droite *o*A rencontre cet axe ;

2° Que la droite oM est une génératrice du filet de la vis;

3° Que pour un tour entier de rotation de la vis autour de son axe, la génératrice oM passe en la position oA; le point A étant celui où la droite oA est tangente au cercle développé de la développante;

4° Que le point o est le premier point, et que le point A est le dernier point de contact du filet de la vis et de la développante.

Cela dit :

La vis prenant autour de son axe un mouvement de rotation dans le sens *uv* (*fig.* 14), la *spirale hélicoïdale gauche* tournera autour de l'axe Soo'', le point o restant fixe, et cette courbe décrira dans l'espace une surface de révolution.

Pendant le mouvement de sa rotation, la *spirale hélicoïdale* viendra couper *st* successivement le *plan-milieu*, en des points qui seront tous distribués sur la droite oA.

Si par l'axe de la vis on fait passer un plan méridien arbitraire, la *spirale hélicoïdale* viendra aussi couper ce plan et successivement en des points qui seront tous distribués sur une droite passant par le point o, car ce qui a lieu pour le *plan milieu*, doit évidemment avoir lieu pour un plan méridien quelconque.

Ainsi, la *spirale hélicoïdale* engendre par son mouvement de rotation autour de l'axe de la vis, une surface conique Δ ayant le point o pour *sommet*, ayant pour *axe* celui de la vis, ayant pour *base* le cercle section droite du cylindre sur lequel on peut imaginer que se trouve tracée l'hélice arête saillante du filet de vis triangulaire, et ayant pour l'une de ses arêtes ou *génératrices droites*, la droite oA.

Ainsi, la *spirale hélicoïdale gauche* n'est autre que la *spirale conique d'Archimède* (*).

Il est évident, d'après ce qui a été dit ci-dessus, que les parties des génératrices droites de la surface conique Δ, qui sont interceptées entre les spires de la surface du filet de vis, sont égales entre elles.

§ VIII.

De la construction de la dent de la roue dentée.

On donne à la roue dentée une certaine épaisseur, en sorte que chacune de ses dents doit être arrêtée aux deux plans parallèles qui terminent supérieurement et

(*) Voyez dans les *Développements de géométrie descriptive*, ce que j'ai dit au sujet de cette spirale conique d'Archimède, dans le mémoire sur les *trois spirales*.

Ici j'arrive à reconnaître que la spirale conique d'Archimède est l'intersection d'une surface hélicoïde gauche et d'un cône de révolution, par des considérations différentes de celles employées dans le mémoire sur les *trois spirales*; et cela doit être, puisque ici le point de départ est différent. T. O.

inférieurement la roue. On peut construire la dent du pignon de trois manières différentes, en nous rappelant que, pour que les vitesses soient dans un rapport constant, il faut que la dent de ce pignon soit coupée par le *plan-milieu* suivant une développante de cercle.

On peut d'abord supposer que la dent du pignon n'aura en chaque instant du mouvement qu'un point de contact avec le filet de la vis; ce résultat peut s'obtenir de diverses manières.

I. On peut donner à la dent la forme d'un *couteau* ayant son arête saillante située dans le *plan-milieu.*

Alors le filet de vis conduira le couteau à développante, à la façon de ce qui se passe dans les engrenages de White; seulement le frottement sera ici de glissement angulaire.

On pourrait tracer sur le filet de vis triangulaire, une série de *spirales coniques* d'Archimède, équidistantes entre elles et telles qu'elles viennent s'engager entre les dents du pignon, et évider le filet de vis en l'entaillant sous forme de *couteaux* ayant ces spirales pour tranchant. On formerait alors un engrenage analogue aux engrenages de White, mais un engrenage qui serait toujours à frottement de glissement angulaire.

On voit de suite que ce travail, qui consiste à entailler le filet de vis, serait en pure perte, et qu'il vaut mieux laisser toutes les spirales enveloppées par le filet de vis.

II. On pourrait construire une surface D passant par la développante δ située dans le *plan-milieu*, cette surface D étant telle qu'à chaque instant du mouvement elle ne se trouve en contact avec le filet de la vis carrée ou triangulaire que par un seul point situé sur la développante δ.

Il paraîtrait au premier aperçu que la surface la plus simple que l'on pourrait employer, dans ce cas, serait l'enveloppe de l'espace parcouru par le paraboloïde hyperbolique tangent à l'hélicoïde gauche formant la surface de la vis, ce paraboloïde étant tangent à cette surface suivant une de ses génératrices droites. Mais comme pour chaque génératrice droite de l'hélicoïde il existe une infinité de paraboloïdes tangents, on paraît disposé tout d'abord à choisir, vu le problème à résoudre, le paraboloïde qui est formé par les tangentes aux diverses hélices cylindriques tracées sur le filet de vis. Nous désignerons ce paraboloïde par Σ.

Ainsi le paraboloïde Σ étant supposé tangent au filet de vis, tout le long de la génératrice droite G, de ce filet, située dans le *plan-milieu*, touchera la développante δ au point pour lequel la droite G est sa tangente.

Le paraboloïde Σ passera donc, par rapport à la développante δ, et en vertu du mouvement relatif, en supposant que le pignon reste fixe et que la crémail-

lère s'enroule sur le cercle primitif du pignon, en diverses positions infiniment voisines Σ, Σ', Σ'', etc., qui par leurs intersections successives donneront des *lignes* qui détermineront une surface B passant par la développante δ, et cette surface B satisfera à la condition de n'être en contact avec le filet de la vis, et en chaque instant du mouvement, que par un seul point situé sur la développante δ.

La surface enveloppe de l'espace parcouru par le paraboloïde Σ serait une surface courbe assez compliquée ; aussi est-ce par une considération autre que celle du paraboloïde tangent Σ que nous allons arriver à une surface *réglée* assez simple, laquelle passera par la développante δ, et satisfera aux conditions exigées de contact avec le filet de la vis.

Nous allons rechercher cette surface réglée pour l'une et l'autre vis.

1. *Vis à filet carré.*

Les points de l'hélice cylindrique qui forme l'arête saillante du filet de la vis carrée, étant les seuls entre tous ceux de la surface du filet, qui se mettent successivement en contact avec la développante, l'on peut considérer la surface réglée de la dent du pignon comme engendrée par les diverses positions que prendra, non la tangente à cette hélice cylindrique, mais une droite G située dans le plan tangent mené à la surface du filet de vis carrée au point où l'hélice saillante coupe le *plan-milieu*, cette droite G étant perpendiculaire à la génératrice du filet de vis qui est situé dans le *plan-milieu;* cette droite G prendra successivement, par rapport aux diverses positions qu'affectera la développante δ pendant le mouvement de l'engrenage, des positions en lesquelles elle sera toujours tangente au cylindre qui a pour base le cercle développé de la développante δ (*).

Dès lors, il est évident que la surface *réglée* de la dent du pignon ne sera autre que la surface hélicoïde développable dont j'ai donné la construction, lorsque j'ai décrit ce qui était relatif à la crémaillère à dents *parallelipipèdes obliques*.

2. *Vis à filet triangulaire.*

Je suppose que le côté V'V'' (*fig.* 4), situé dans le *plan-milieu*, est une génératrice droite de l'hélicoïde gauche qui forme la surface du filet de la vis triangulaire.

(*) On doit remarquer en passant que si l'on trace sur une surface courbe C une ligne courbe φ; si l'on fait mouvoir sur cette surface C un plan tangent dont le point de contact se meut sur cette courbe φ, ce plan engendrera une surface développable D, dont je désigne l'arête de rebroussement par δ. Si la courbe δ est la développée de la courbe φ, la courbe φ sera une ligne de courbure de la surface D. Ainsi, dans le cas de la vis à filet carré, la développante δ située dans le plan-milieu, est une ligne de courbure de la surface de la dent.

Le point M′, contact de la droite V′V″ et de la développante M′m′, engendrera une hélice cylindrique (M′) tracée sur un cylindre de révolution ayant pour axe celui de la vis et ayant pour base un cercle dont le rayon est égal à la distance du point M′ à l'axe de la vis. J'appellerai le rayon de ce cercle, rayon de l'hélice (M′).

La tangente à l'hélice (M′) au point M′ sera une des génératrices droites du paraboloïde Σ (ci-dessus) tangent à la surface hélicoïde gauche du filet de la vis, suivant la droite V′V″.

La vis ayant tourné autour de son axe d'une certaine quantité angulaire, le côté V′V″ sera venu se placer, je suppose, en V‴C′ le point de contact de la développante et de la nouvelle position V‴C′ du côté V′V″ étant en M.

Ce point M engendrera une hélice cylindrique (M) tracée sur un cylindre de révolution ayant pour axe celui de la vis et ayant pour base (ou section droite) le cercle dont le rayon est égal à la distance du point M à l'axe de la vis.

J'appellerai ce rayon, rayon de l'hélice (M).

La tangente à l'hélice (M) au point M sera une des génératrices du paraboloïde Σ_1 tangent à la surface hélicoïde gauche du filet, suivant la droite V‴C″ et ce paraboloïde Σ_1 est parallèle au paraboloïde précédent Σ, et ainsi de suite. Il faudrait démontrer que les diverses tangentes aux hélices (M′), (M), etc., formeront une surface. Mais on n'en peut douter, car on sait que toutes les fois que les conditions du mouvement d'une droite sont soumises à la loi de continuité, cette droite engendre une surface réglée.

Ainsi, la surface de la dent du pignon sera le lieu des tangentes aux diverses hélices (M′), (M), etc. Je désigne cette surface par S.

Cette surface S serait une surface gauche moins simple que celle que l'on peut obtenir de la manière suivante.

Au lieu de prendre les tangentes aux diverses hélices (M′), (M),... en les points où ces hélices coupent le plan-milieu et la développante δ, on mènera au filet de vis triangulaire, les plans tangents successivement en les points M′, M... et l'on tracera dans ces plans des droites G′, G,... perpendiculaires (normales) à la développante δ; ces diverses droites G′, G,... formeront une surface réglée S_1.

Ainsi, toutes les génératrices de la surface S_1 seront tangentes au cylindre de révolution et vertical Z, ayant pour section droite le cercle primitif du pignon, cercle qui est la développée de toutes les développantes δ... situées dans le *plan-milieu*.

Chacune des génératrices droites de la surface S_1 fera avec le *plan-milieu* un angle particulier, en sorte que les génératrices seront diversement inclinées sur le *plan-milieu*.

D'après ce qui précède, on voit que la surface S_1 aura ses génératrices droites

placées successivement en la position que viendra prendre chacune des génératrices droites G d'un certain paraboloïde hyperbolique L tangent au filet de vis, suivant l'arête droite K de ce filet, située dans le *plan-milieu;* ce paraboloïde tangent L étant précisément celui dont les génératrices droites G sont perpendiculaires à l'arête K.

III. Avec les constructions précédentes, la dent du pignon n'est en contact que par un seul point avec le filet de la vis; si l'on veut que la surface de la dent soit en contact par une *ligne*, il faut considérer cette surface comme l'enveloppe de l'espace parcouru par la surface du filet.

La meilleure manière, et certainement la plus simple de la construire, c'est de la tailler au moyen de la vis transformée en taraud.

On pourrait cependant désirer pouvoir la construire à part et au moyen d'une *épure;* l'on pourrait aussi désirer connaître les propriétés géométriques dont cette surface enveloppe doit jouir.

Si l'on veut construire une *épure* de cette surface enveloppe, on devra suivre le procédé suivant :

On coupera la surface hélicoïde du filet de la vis par le plan-milieu P et par une suite de plans parallèles entre eux et au plan-milieu, savoir : P', P'', P''',... Le plan P donnera pour section une droite A, et les plans P', P'', P''',... donneront respectivement des courbes φ', φ'', φ''',...

Au moyen du mouvement relatif, la droite A prendra dans le plan-milieu P les positions A, A_1, A_2,... qui auront pour enveloppe la développante δ; la courbe φ' prendra les positions φ_1', φ_2',... dans le plan P', et l'on tracera une courbe ζ' tangente aux diverses courbes φ', φ_1', φ_2',... et l'on opérera de la même manière pour les courbes φ'', φ''',... et l'on obtiendra par ce moyen une suite de courbes δ, ζ', ζ'', ζ''',... respectivement situées dans les plans P, P', P'', P''',... qui seront des sections équidistantes de la surface de la dent du pignon.

Si l'on veut connaître les propriétés géométriques de la surface de la dent du pignon, on devra lire l'ouvrage que j'ai publié sous le titre : *Théorie géométrique des engrenages aptes à transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes situés ou non dans un même plan* (publié chez Bachelier, libraire-éditeur; 1842).

L'ouvrage que je viens de citer doit être considéré comme la suite de ce quatrième livre; on y trouvera le complément des recherches géométriques que je viens d'exposer, et dont j'ai donné dans ce quatrième livre les applications à divers engrenages qui n'avaient point encore été étudiés.

N° 10.

DES ENGRENAGES CLEPSYDRES.

§ I.

L'engrenage clepsydre n'est autre qu'un engrenage composé d'une roue dentée ou *pignon* et d'une vis tangentielle ; seulement, dans l'engrenage connu sous le nom de *vis-sans-fin*, et que nous avons étudié ci-avant, le filet de vis est placé sur une surface cylindrique et de révolution, tandis que pour l'engrenage auquel on a donné le nom de *clepsydre*, le filet de vis est placé sur une surface annulaire et de révolution, cette surface étant engendrée par un arc de cercle tournant autour d'un axe en lui présentant sa convexité, de telle sorte que cette surface a la forme d'un *piédouche.*

Ces sortes d'engrenages n'ont été examinés jusqu'à présent dans aucun des traités publiés jusqu'à ce jour.

En 1815, alors que j'étais élève à l'École polytechnique, *Hachette*, notre professeur de géométrie descriptive, me conduisit au Conservatoire des arts et métiers, et me montra dans la collection des machines, un engrenage clepsydre, engrenage tout nouveau et dont on ignorait la construction géométrique; il m'engagea à l'étudier et à en faire l'*épure*, que je reproduis dans l'atlas de cet ouvrage (*fig.* A et B).

L'examen de cet engrenage me conduisit, à cette époque (1815), aux divers résultats que j'expose dans ce mémoire.

Depuis, à l'École d'arts et métiers de Châlons-sur-Marne, vers 1828 environ, car je ne puis préciser en ce moment la date, les élèves construisirent avec beaucoup de soin une vis clepsydre, la trempèrent, et par des entailles la transformèrent en taraud, puis ils s'en servirent comme outil et taillèrent les dents d'une roue d'un diamètre assez considérable. La forme de la surface de ces dents était très-originale. J'ignore ce que ce travail est devenu; s'il existe encore, il devrait être déposé dans les collections du Conservatoire royal des arts et métiers de Paris, pour compléter la collection de tous les *engrenages connus*, que j'ai fait exécuter pour cet établissement, dont le musée est si utile à l'industrie et à l'enseignement de la mécanique des machines.

§ II.

Supposons dans le plan méridien M parallèle au plan vertical de projection (*fig.* 1) un arc de cercle C et un axe vertical A.

Le cercle C en tournant autour de l'axe A engendrera une surface de révolution sur laquelle on tracera une spirale S.

La spirale S sera construite de la manière suivante :

On divisera le cercle B base du piédouche en parties égales par les points de division a, 1, 2, 3, 4, etc., par l'axe A, et par chacun de ces points de division on fera passer un plan méridien ; ces divers plans méridiens auront donc pour traces horizontales, les droites $A^h a$, $A^h 1$, $A^h 2$, $A^h 3$, etc.

On divisera la courbe méridienne C en parties égales, par les points de division a^v, 1′, 2′, 3′, 4′, etc. ; par ces points de division, on fera passer une suite de plans horizontaux qui couperont le piédouche suivant des cercles (des *parallèles*). Ainsi, par exemple, le plan horizontal passant par le point 3′ coupera suivant le cercle ou *parallèle* 3.

Les *parallèles* passant par les divers points de division de la méridienne C, seront coupés respectivement par les plans méridiens passant par les divers points de division du cercle-base B en des points qui détermineront la spirale demandée S.

Ainsi, le *parallèle* passant par le point 3′ sera coupé par le plan méridien passant par le point 3, en le point x qui appartiendra à la spirale S.

On pourra donc facilement construire les projections S^v et S^h de la spirale S ; et l'on voit de suite que la construction de ces projections est identiquement la même que celle que l'on emploie pour la construction de la projection verticale de l'hélice tracé sur un cylindre de révolution.

Cela posé :

Construisons la surface du filet de vis ; par chaque point de division 1, 2, 3, etc. (*fig.* 2) du cercle méridien C, nous mènerons les rayons $o^v 1$, $o^v 2$, $o^v 3$, etc. de ce cercle ; ces rayons couperont l'axe A (en les prolongeant) réciproquement aux points l, i, r, etc. Cela fait, si nous considérons les *parallèles* décrits par les divers points de division 1, 2, 3′, etc., au point 2 correspondra le point m de la courbe spirale S, et en joignant les points i et m, on aura une génératrice droite de la surface du filet de la vis ; en opérant de même pour les autres points de la spirale S, on voit que la surface du filet de la vis est engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur la spirale S, et en restant constamment normale à la surface de révolution du piédouche.

Cela posé :

On voit que le filet de la vis sera engendré (*fig.* 3) en faisant mouvoir autour de l'axe A le quadrilatère *abcd*, composé de deux arcs de cercles concentriques *ad* et *bc* et de deux rayons *ab* et *dc*.

Chacun des quatre sommets de ce quadrilatère décrira une spirale; les spirales décrites par les sommets *b* et *c* seront situées sur le piédouche engendré par le cercle C, et les spirales décrites par les sommets *a* et *d* seront situées sur un second piédouche ayant même axe A que le premier et engendré par le cercle C′ concentrique au cercle C.

Le filet de la vis clepsydre étant engendré, il sera facile de le mettre en présence d'une roue dentée ou d'un pignon.

On fera passer par l'axe de la vis un plan perpendiculaire à l'axe du pignon; ce plan sera dit *plan milieu*, et il coupera (*fig.* 4) les dents du pignon suivant des trapèzes *mpqn*, qui seront composés de deux rayons *mp* et *nq* et de deux arcs de cercle concentriques *mn* et *pq*; le cercle primitif D du pignon aura même centre *o* que le cercle C qui engendre le piédouche ou le *corps* de la vis.

On voit de suite que les dents du pignon seront équidistantes entre elles et que le filet de la vis glissera sur l'arête *nq* ou sur l'arête *mp*, suivant que la vis tournera dans un sens ou en sens contraire.

Le profil, construit suivant *xy* (*fig.* 4), de la dent du pignon devra offrir la forme indiquée (*fig.* 5).

L'engrenage clepsydre, exécuté ainsi qu'on vient de le dire, se comportera donc à la manière des cames et mentonnets des pilons, ou, ce qui est la même chose, de la même manière que les dents du pignon et de la crémaillère à dents rectangulaires; le filet glissera pendant tout le temps du mouvement sur l'arête saillante de la dent du pignon, cette dent ayant la forme d'un couteau.

Et il est évident que le rapport des vitesses sera constant.

§ III.

En prenant une vis clepsydre transformée en taraud, on pourra s'en servir pour tailler les surfaces des dents du pignon, et l'opération s'effectuera tout aussi facilement qu'avec la vis cylindrique ordinaire; d'ailleurs l'épreuve en a été faite à l'École d'arts et métiers de Châlons-sur-Marne, comme nous l'avons dit ci-dessus.

La surface de la dent du pignon étant alors l'enveloppe de l'espace parcouru par la vis clepsydre, donnerait lieu à diverses recherches géométriques touchant ses propriétés. On pourra construire l'*épure* de cette surface au moyen de ses

sections équidistantes, comme nous l'avons fait dans le mémoire précédent pour la surface de la dent du pignon de l'engrenage dit *vis-sans-fin*.

Toutefois la construction devra être modifiée en quelques points, attendu que si l'on conçoit un cylindre Δ ayant l'axe A de la vis cylindrique pour axe, tout plan tangent à ce cylindre coupe le filet de vis cylindrique suivant des courbes identiques, superposables; tandis que si l'on conçoit le même cylindre Δ pour la vis clepsydre, les sections faites par les divers plans tangents à ce cylindre et au travers du filet de la vis clepsydre, ne seront plus des courbes identiques, superposables.

Dès lors nous emploierons la construction suivante :

Nous prendrons d'abord le plan milieu pour plan horizontal ; ce plan coupera le filet de vis suivant le trapèze générateur du filet.

Cela fait, nous considérerons une série de cylindres de révolution ayant tous pour axe l'axe A de la vis, et ayant des rayons respectivement égaux à h, $2h$, $3h$, $4h$, etc. ; h étant la distance qui existe entre chacun des plans parallèles et équidistants entre eux qui doivent couper la surface de la dent du pignon.

Je construirai la série des plans horizontaux tangents aux cylindres (h), $(2h)$, $(3h)$, etc., lesquels couperont le filet de la vis suivant les courbes φ^1, φ^2, φ^3, etc.

Cela fait :

Je construirai une série de plans tangents parallèles entre eux aux cylindres (h), $(2h)$, etc., lesquels plans feront avec le plan horizontal (ou *plan milieu*) un angle α, et j'obtiendrai dans le filet de vis les sections respectives β^1, β^2, β^3, etc.

Puis je ferai tourner tous ces plans tangents de l'angle α pour les rabattre respectivement sur les plans tangents horizontaux et équidistants ; par ce mouvement la courbe β^1 prendra sur le plan horizontal tangent au cylindre (h) la position β_1^1 ; par suite de ce mouvement les courbes β^2, β^3, etc., viendront prendre les positions β_1^2, β_1^3, etc., sur les plans tangents horizontaux respectifs.

La vis est donc supposée, par cette construction, avoir tourné de l'angle α autour de son axe, et dès lors le pignon aura dû tourner aussi autour de son axe d'un certain angle λ. Si donc on suppose que le pignon a tourné de l'angle λ de gauche à droite, il faudra faire tourner ce pignon du même angle λ et réellement de droite à gauche, et alors les courbes β_1^1, β_1^2, β_1^3, etc., viendront prendre respectivement, sur les plans tangents horizontaux qui les contiennent respectivement, les positions β_2^1, β_2^2, β_2^3, etc.

En faisant varier la valeur de l'angle α, on obtiendra sur chacun des plans horizontaux équidistants une série de courbes analogues aux courbes β_2^1, β_2^2, β_2^3, etc., et l'on pourra tracer la courbe ξ enveloppe des courbes β_2^1..., la courbe ξ' enveloppe des courbes β_2^2..., la courbe ξ'' enveloppe des courbes β_2^3..., et ainsi

de suite. Dès lors les courbes ξ, ξ', ξ''..., seront les sections horizontales et équidistantes de la surface de la dent du pignon que l'on obtiendrait par le taraudage de la vis clepsydre.

Une surface peut être exécutée en relief lorsque l'on connaît une série de sections équidistantes et parallèles entre elles de cette surface.

L'*épure* étant donc tracée ainsi que nous venons de l'expliquer, il sera facile d'exécuter la surface de la dent du pignon, et cela *directement*, sans avoir besoin par conséquent de l'obtenir au moyen du taraudage.

Mais il est évident qu'il sera plus simple d'exécuter *immédiatement* cette surface par le taraudage, que de la construire par *points* au moyen de l'*épure* précédente.

§ IV.

Les mécaniciens étaient dans l'habitude de construire la *vis-sans-fin*, en supposant que l'axe de la vis est perpendiculaire à l'axe du pignon; ils croyaient que la vis transformée en taraud ne pouvait entailler le pignon pour le denter, qu'autant que les deux axes étaient rectangulaires entre eux. En 1829 je fis exécuter une vis-taraud et je montrai que cet outil pouvait denter le pignon, lors même que les deux axes faisaient entre eux un angle aigu.

Les modèles exécutés à cette époque sont dans les collections du Conservatoire royal des arts et métiers de Paris.

Ce que l'on a pu faire avec une vis-taraud cylindrique, on pourra évidemment le faire avec une vis-taraud clepsydre; ainsi l'on peut exécuter des engrenages clepsydres dans lesquels les axes font entre eux un angle droit ou un angle aigu.

Toutefois l'expérience n'a pas encore indiqué la limite de l'angle que doit faire l'axe de la vis-taraud avec l'axe du pignon, pour que cette vis cesse d'agir sur la matière du pignon et refuse de l'entailler.

Des expériences de ce genre ne seraient pas, je crois, sans intérêt.

Il ne faudrait pas, dans ces expériences, négliger d'examiner l'influence de la direction des entailles pratiquées sur la surface du filet de la vis-taraud par rapport à l'axe de cet outil, et en raison de l'amplitude de l'angle que font entre eux les axes de la vis et du pignon.

Ayant reconnu que la vis-taraud cylindrique pouvait denter le pignon sous diverses inclinaisons, j'imaginai alors (1829) une machine qui pouvait réaliser la théorie de l'engrenage dans lequel une roue centrale taillée par un écrou, conduirait des roues satellites taillées par la vis de cet écrou, ces roues satellites ayant des axes diversement inclinés par rapport à l'axe de la roue centrale, de telle sorte que l'axe du premier satellite serait parallèle à l'axe B de la roue cen-

trale, que l'axe du second satellite couperait l'axe B, et que l'axe du troisième satellite ne serait point situé avec l'axe B dans un même plan, et ferait avec lui un angle aigu.

Avant de faire construire cette machine, je fis un essai, vers 1834, dans les ateliers de M. Saulnier, mécanicien de la Monnaie. Ces essais, qui sont déposés dans les collections du Conservatoire royal des arts et métiers de Paris, m'ayant démontré que l'exécution de ces nouveaux engrenages n'offrait aucune difficulté sérieuse, je fis construire la grande machine qui est déposée dans les galeries du Conservatoire; cette machine fut exécutée en 1840, sur mes dessins, par M. Martin père, mécanicien à Paris. Elle servit à exécuter des roues dentées dont les dents ont deux centimètres environ de longueur. La roue centrale et les roues satellites ayant été mises en présence, le mouvement de rotation uniforme eut lieu, et quoique les dents n'eussent point été *repassées* après être sorties, la roue centrale de dessous l'écrou-taraud et les roues satellites de dessous la vis-taraud, elles fonctionnèrent avec douceur, égalité et sans perte de temps.

On trouvera dans l'ouvrage déjà cité, et qui a pour titre : *Théorie géométrique des engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes situés ou non dans un même plan*, imprimé par Bachelier en 1842, tout ce qui est relatif à la théorie géométrique de ce nouvel engrenage.

N° 11.

MÉCANISME SERVANT DE SUPPORT AUX TOURILLONS DE LA GROSSE CLOCHE DE LA CATHÉDRADE DE METZ (*).

§ I.

Lorsque je visitai, en 1817, pour la première fois, le clocher de la cathédrale de Metz, j'eus l'occasion d'examiner un mécanisme ingénieux qui servait de support aux tourillons de la grosse cloche, dite *la Mutte* (**).

(*) Extrait du *Bulletin de la société d'encouragement pour l'industrie nationale*, août 1828.

(**) On ignore quel est l'auteur de ce mécanisme déjà fort ancien. Il y quelques années que les dimensions de ce mécanisme ont été agrandies et que les diverses parties en ont été *heureusement* modifiées par M. *Jaunez* père, ci-devant ingénieur de la ville de Metz, et M. *Jaunez* fils. Avant cette correction, seize hommes étaient nécessaires pour mettre la cloche à volée; maintenant dix hommes suffisent. La cloche pèse environ 13,000 kilog. et le battant pèse environ 250 kilog.

Au moyen de ce mécanisme, le frottement des tourillons sur les pièces qui les supportaient devenait un frottement de roulement ou de deuxième espèce.

Ce qui distingue ce mécanisme, c'est que l'on a eu égard aux accidents qui pourraient empêcher les cylindres-supports des tourillons de tourner librement sur leurs axes; accidents qui dès lors auraient rendu le frottement de glissement.

L'auteur de ce mécanisme a donc employé le mouvement d'oscillation de la cloche pour transmettre forcément aux cylindres-supports des tourillons un mouvement de rotation autour de leurs axes, et tel que le frottement fût toujours de roulement.

Nomenclature des parties composant le mécanisme représenté en élévation, vu de face et de côté (fig. 1 et 2) (*).

M, cloche dite *la Mutte*.

T, T, tourillons de la cloche.

$t't't''t''$ (*fig.* 2), têtes des quatre boulons $b'b'b''b''$, tournées et servant d'axes de rotation aux quatre leviers-supports des tourillons, terminés par des portions cylindriques $C'C'C''C''$ sur lesquelles tournent, avec un frottement de roulement ou de deuxième espèce, les tourillons de la cloche.

Chacune des portions cylindriques a son centre sur l'axe de rotation du levier auquel elles appartiennent.

Les quatre boulons $b'b'b''b''$ traversent deux poutres, P, P, horizontales et parallèles.

Aux tourillons de la cloche et dans la direction de son axe, est fixée, d'une manière invariable, une tige *m*, percée à son extrémité d'un trou oblong *vv'* (*fig.* 2), dans lequel passe une verge cylindrique et horizontale N; les extrémités *gg* de cette verge servent d'axes de rotation à deux leviers coudés GG, dont les branches sont égales.

Les extrémités A'A'*a'a'*, des deux leviers coudés G et G sont reliées entre elles par deux tringles *h* et *h'*, horizontales et parallèles à la verge N, et qui maintiennent pendant le mouvement l'écartement des deux leviers coudés.

Les extrémités des leviers coudés G et G sont liées aux extrémités des leviers-supports des tourillons, $C'C'C''C''$, par quatre bielles égales en longueur, AA, A'A', *aa*, *a'a'* : de sorte que, dans le système, il y a huit *articulations* AA, A'A', *aa*, *a'a'*.

(*) Je donne ici le croquis, tel que je le fis sur les lieux et très à la hâte; les diverses parties sont à peu près dans les rapports qui existent entre les pièces de grandeur réelle; toutefois, on ne doit considérer les fig. 1 et 2 que comme donnant seulement l'idée du mécanisme.

Jeu de la machine pendant les oscillations de la cloche.

La cloche prenant un mouvement d'oscillation autour de ses tourillons, la tige *m* décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe du tourillon TT.

Cette tige force alors la verge N à décrire un cylindre, dont la section droite n'est point un cercle : de sorte que la verge N glisse dans le trou oblong *vv'*, en s'éloignant et se rapprochant alternativement de l'axe des tourillons pendant une oscillation totale de la cloche.

Le mouvement de rotation imprimé à la verge N se communique au moyen des deux leviers coudés et par suite des quatre bielles aux *leviers-supports des tourillons*, et de telle sorte que :

1° Les quatre *leviers-supports* tournent dans le même sens et en sens inverse du mouvement de la tige *m* : ainsi de gauche à droite si la tige s'est mue de droite à gauche, et *vice versâ;*

2° Les *leviers-supports* décrivent des angles égaux pour des oscillations de même amplitude ;

3° Le rapport de l'angle (α) (*fig.* 4), décrit par chacun des leviers-supports, et de l'angle (6) de l'oscillation de la cloche, est inverse de celui du rayon (r) du levier-support et du rayon (R) du tourillon de la cloche, de sorte que l'on a l'équation :

$$\frac{(\alpha)}{(6)} = \frac{(R)}{(r)}$$

Tracé du mécanisme.

Pour faciliter la mise en place du mécanisme, il paraît convenable de donner aux diverses pièces qui le composent une disposition telle, que la cloche étant en repos, elles soient symétriquement placées par rapport à un plan vertical passant par l'axe des tourillons.

Je supposerai donc, pour plus de simplicité, que les quatre *leviers-supports* sont horizontaux dans l'état de repos.

Soient o' et o'' (*fig.* 4) les centres des axes de rotation des *leviers-supports* d'un des tourillons de la cloche ;

o, le centre d'une section faite dans ce tourillon perpendiculairement à son axe ;

$o''m = o'n$ la longueur d'un *levier-support;*

MoM' l'angle de la plus grande oscillation de la cloche.

Cela posé :

Le tourillon ayant tourné de u en v, de l'angle MoM', les cylindres (o') et (o'') auront tourné en sens inverse, de x en y, le premier, de l'angle $no'n''$, et le second, d'un angle égal $mo''m''$; et l'angle $no'n''$ sera avec l'angle MoM', dans le rapport inverse des rayons ot du tourillon et $o''t$ du cylindre (o''), afin que le frottement soit de roulement.

Ainsi l'on aura l'équation :

$$\frac{\text{angle } n\,o'\,n''}{\text{angle } mo'm''} = \frac{ot}{o''t}$$

Les deux positions $o''m''$ et $o'n''$ seront les positions extrêmes des deux leviers-supports pendant le mouvement d'oscillation de la cloche.

Du point m'' avec un rayon arbitraire $m''g$, je décris une circonférence (b) ; du point n'', avec un rayon $n''G = m''g$, je décris une circonférence (a).

Sur oM prolongé, je prends un point arbitraire H, duquel, comme centre, et avec un rayon arbitraire Hg, je coupe le cercle (a) en G et le cercle (b) en g.

Alors le *levier coudé* aurait la position GHg.

Mais cette position n'est point admissible, puisque la branche GH pénètre dans le tourillon.

Je prends donc sur oH un autre point P'' plus éloigné du centre o que le point H, et tel que la tangente $P''G$ au tourillon puisse couper le cercle (a).

Cela ayant lieu, du point P'' comme centre et avec le rayon $P''G'$, je coupe le cercle (b) en g'.

Mais alors le point g' se trouve en dessous du prolongement de la position extrême du levier-support : de sorte que la bielle étant, dans l'état de repos, au-dessus du levier-support auquel elle est attachée, passerait au-dessous pendant le mouvement d'oscillation : il y aurait donc un instant où le levier-support et sa bielle seraient en ligne droite.

Cette disposition serait mauvaise, parce que le levier-support et la bielle pourraient, en cet instant du mouvement, s'arc-bouter.

On doit donc augmenter la longueur des bielles pour obvier à cet inconvénient.

Il faudra très-peu de tâtonnements pour trouver une longueur de bielle et une position du point H sur oH, telles que la disposition n'offre pas les inconvénients signalés.

Ainsi :

Du point m'', avec le rayon $m''q''$, je décris le cercle (c'').

Du point n'', avec le rayon $n''Q'' = m''q''$, je décris le cercle (C'') (les rayons $m''q''$ et $n''Q''$ étant convenablement choisis).

Du point P″, choisi convenablement sur oH, avec le rayon P″Q″, aussi convenablement choisi, je décris un cercle qui coupe (C″) en Q″ et (c'') en q''.

Dès lors les diverses pièces du mécanisme détermineront, par les positions qu'elles affectent au moment de la plus grande oscillation, le polygone

$$o''n''Q''P''q''m''o''.$$

Cela fait :

Du point o comme centre, je décris avec le rayon oP'' un cercle qui coupe la verticale passant par l'axe de la cloche, en repos, au point R.

Du point n, avec le rayon $nQ = n''Q''$, je décris le cercle (C).

Du point m, avec le rayon $mq = m''q''$, je décris le cercle (c); puis, en un point arbitraire L′ de la verticale oM', je mène l'horizontale $L'L'' = \frac{1}{2}Q''q''$.

Par le point L″ je mène L″Q parallèle à oM' et coupant le cercle (C) au point Q.

Par le point Q je mène Qq perpendiculaire à oM' et coupant le cercle (c) au point q, tel que $LQ = Lq$.

Enfin, du point Q comme centre, avec un rayon $PQ = Q''P''$ = la branche du levier coudé, je décris un cercle qui coupe oM' au point P.

De sorte que dans l'état de repos les diverses pièces du mécanisme détermineront le polygone $o'nQPqmo''$, symétrique par rapport à la verticale oM'.

Le point P sera en dessus ou en dessous du point R, suivant les relations de grandeur qui existeront entre la bielle nQ, la branche QP du levier coudé, l'angle QPq que forment entre elles les deux branches du levier coudé, le levier-support $o'n$, la distance $o'o''$ des deux axes des rouleaux et les rayons $o''t$ et ot d'un des rouleaux et du tourillon.

Il faut maintenant déterminer la courbe parcourue par le sommet P du triangle QPq, pendant qu'il passe de la position au repos P à la position extrême P″.

Pour cela :

1° Je mène par le point o une droite oP'.

2° Par le point o', je mène une droite $o'n'$ faisant avec la droite $o'n$ un angle $no'n'$, qui est à l'angle PoP' dans le rapport inverse des rayons ot et $o''t$.

3° Enfin par le point o'' je mène $o''m'$ parallèle à $o'n'$.

Ensuite :

4° Du point n' comme centre, avec un rayon $n'Q' = nQ$, je décris un cercle (C′).

5° Du point m' comme centre, avec un rayon $m'q' = mq = nQ$, je décris un cercle (c').

6° Avec un compas à trois pointes il sera facile, sans beaucoup de tâtonnements, de placer le triangle QPq de manière que son sommet P soit sur la droite oP',

son sommet Q sur le cercle (C′), et son sommet q sur le cercle (c′), en sorte qu'il prendra la position Q′P′q.

Dès lors, pour l'oscillation dont l'angle = PoP′, les diverses parties du mécanisme détermineront le polygone $o'n'$Q′P′$q'm'o''$.

Pour des oscillations dont les angles seraient successivement PoP′′′′, PoP′′′, etc., on déterminerait par le même procédé les points P′′′′, P′′′, etc., positions successives et correspondantes du sommet P du triangle QPq.

En sorte que la courbe PP′′′′P′P′′′P′′ sera la courbe parcourue par le sommet P du triangle QPq, ou, en d'autres termes, sera la section droite du cylindre parcouru par l'axe de la verge horizontale N, pendant le mouvement d'oscillation de la cloche tournant de u en v.

Si ensuite on décrit du point o, comme centre, un cercle tangent à cette courbe, la différence PR′ qui existera entre les deux rayons oR′ du cercle tangent et oP (le point P étant en dessous du point R), ou la différence RR′ existant entre les deux rayons oR′′ et oP′′ (le point P étant au-dessus du point R), déterminera la longueur de la course de l'axe de la verge horizontale N pendant le mouvement d'oscillation de la cloche.

On aura donc, par ce moyen, tout ce qui est nécessaire pour déterminer la position et les dimensions du trou oblong qui doit être percé à l'extrémité de la tige m.

§ II.

Dans le paragraphe précédent nous avons indiqué la construction de l'ancien système, nous allons maintenant faire connaître les modifications que MM. Jaunez père et fils y ont apporté; les fig. 5 et 6 donnent l'élévation et le plan, à l'échelle, du nouveau mécanisme.

Ces dessins suffisent pour que tout ingénieur voie au premier coup d'œil tout ce que le nouveau système présente d'avantageux sur l'ancien.

Les ingénieurs de Metz ont conservé le principe de l'ancien système, mais ils l'ont très-heureusement modifié; et on peut, je crois, comparer les modifications qu'ils y ont introduites à celles que les mécaniciens anglais ont apportées à l'*ordon*. Jusqu'à eux la came frappait sur la queue du marteau, ils ont imaginé de placer un mentonnet à la tête du marteau et de faire soulever le marteau par la came.

Si l'on compare l'ancienne disposition avec la nouvelle, introduite par MM. Jaunez père et fils dans le mécanisme de suspension de la cloche de la cathédrale de Metz, on ne pourra se refuser à reconnaître l'exactitude de ce que nous venons de dire.

De plus, dans l'ancien mécanisme, le poids de la cloche produisait une pression sur les axes des deux disques tournants, et qui devait beaucoup les fatiguer; dans le nouveau mécanisme les axes des deux disques tournants n'éprouvent aucune pression, puisque c'est le troisième disque qui a été ajouté qui supporte tout le poids de la cloche.

En comparant les deux mécanismes, ancien et nouveau, on ne peut s'empêcher de faire des réflexions sérieuses sur l'importance des *formes*, *dispositions* et *emmanchements mécaniques* pour les diverses pièces d'une machine; et en même temps cette comparaison nous démontre qu'un principe, bon en lui, peut être *matérialisé* dans une machine de diverses manières, et que l'une de ces manières doit seule être préférée, parce qu'elle satisfait mieux que toutes les autres aux conditions de stabilité, de durée, d'économie, de réparation facile, et exige l'emploi d'une moins grande force pour fonctionner.

FIN.

ERRATUM.

Page 19, ligne 7 en remontant du bas de la page : inclince, *lisez* : inclinée.

Page 90, 4e ligne en remontant du bas de la page : queques, *lisez* : quelques.

Page 99, 8e ligne de la note : construit les droites, *lisez* : construit sur les droites.

Page 125, dernière ligne de la note : 2e partie, chap. VI, *lisez* : 1re partie, chap. VI.

Page 242, ligne 15 : $d=\sqrt{\frac{p}{m}+\left(\frac{\frac{1}{2}m}{m}\right)^2}-\frac{\frac{1}{2}n}{m}$, *lisez* : $d=\sqrt{\frac{p}{m}+\left(\frac{\frac{1}{2}n}{m}\right)^2}+\frac{\frac{1}{2}n}{m}$.

Page 243, lignes 23, 24 et 25 (colonne de gauche), au lieu du signe $\times$, *lisez* le signe $+$.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME PARTIE.

QUATRIÈME PARTIE.

Mémoire n° 5.

Mémoire n° 6.

Mémoire n° 7.

Mémoire n° 8.

Mémoire n° 9.

Mémoire n° 10.

Mémoire n° 11.

Mémoire n° 12.

SECOND LIVRE.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE A LA PERSPECTIVE.

TROISIÈME LIVRE.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE A LA GNOMONIQUE.

QUATRIÈME LIVRE.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AUX ENGRENAGES.

Mémoire n° 4.

Paris — Imprimerie de Fain et Thunot, rue Racine, 28, près de l'Odéon.





